ВЕРНЫЕ ЦИФРЫ

Определение 1. Цифра в позиционном p-ичном представлении приближения (приближенного числа) a к числу (точному числу) A называется верной, если погрешность приближения не более половины единицы разряда, в котором находится эта цифра.

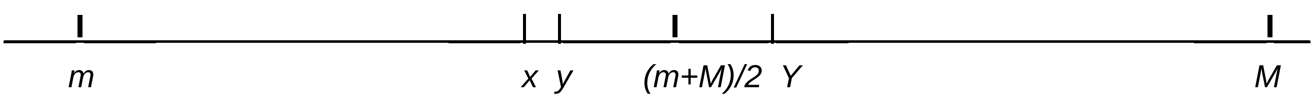
Очевидно, что если какая-то цифра верна, то и все предыдущие цифры верны.

Определение 2. Количество верных цифр в числе есть число цифр от включительно самой правой цифры, про которую известно, что она верна, до включительно самой левой ненулевой цифры числа.

Если основание p системы исчисления четно, то существуют в редком случае 2 варианта записи числа с верными цифрами. Случай такой: истинное число имеет вид $A=A_0.A_1A_2...A_r\, p^n$, где A_i – p-ичные цифры, причем $A_r = p/2$ и n - целое число. Тогда приближений с r-той верной цифрой два: Одно: $m = A_0.A_1A_2...A_{r-1}\, p^n$. Другое: $M = A_0.A_1A_2...A_{r-1}\, p^n+p^{n-r+1}$. Если p нечетно, то ситуация $A_r = p/2$ не возникает.

Получение заданного количества верных цифр в приближенном решении имеет некоторые тонкости.

1. Верные цифры можно потерять при округлениях. Дадим этому геометрическую интерпретацию.



На рисунке проведена числовая ось. Отметки m и M, определенные выше, соответствуют разрядной сетке с r значащими цифрами, x - вычисленное приближение к решению, y и Y - варианты расположения истинного решения задачи. Легко заметить, что при “правильном” округлении x до m и реализации y, погрешность будет меньше половины разряда, т. е. $|y - m| < (M - m)/2$. Однако, при реализации Y и правильном округлении будет $|Y - m| > (M - m)/2$. (В тех трансляторах, где при укорочении при печати мантиссы числа происходит “правильное” округление, ситуация когда $x > (m + M)/2$ симметрична рассмотренной.) Таким образом, последняя цифра числа m окажется неверной, несмотря даже на то, что разность $|Y - x|$ может быть весьма малой. Чтобы избежать такой неприятности, следует уменьшать погрешность вычислений d до тех пор, пока не станет d $< |x - (m + M)/2|$

Определение 3. Погрешность вычислений d - это оценка $|x - x^*| \leq$ d, где x^* - точное решение.

2. Кое какие проблемы возникают при работе с разными основаниями позиционного представления числа. В частности, появление результатов после форматирования в нашей «родной» десятичной системе, в то время как вычисления на современных ЭВМ идут в 16-ричной системе. Это оставим без анализа.

3. Приближенные вычисления обычно происходят с заранее заданной абсолютной погрешностью. Она, как правило, входит в критерий остановки бесконечного итеративного процесса. Реже используется относительная погрешность. Количество верных цифр – это третий вид погрешности, имеющий общее и с абсолютной и с относительной погрешностью. Как внедрить в программу с критерием остановки по достижению заданной абсолютной погрешности остановку по достижению заданного количества верных цифр?

По ходу итеративного процесса должны появиться приближения, содержащие большее число цифр, чем заданное число верных: $a = a_0 .a_1 a_2 ...a_r p^n$ где a_j - р-ичные цифры . Это число будет иметь r верных цифр, если $|a\text{-}A| < p_{n-r+1}/2$. Поэтому если известен способ S оценки абсолютной погрешности, который чувствителен к изменениям приближений на величины порядка $p^{n-r+1}/2$, то остановиться следует, когда $S(a) < p^{n-r+1}/2$.

Остается только оперативно узнавать число n. Оно занимает конкретные биты в 16-ричном представлении числа с плавающей точкой (типы float, double,…)

Задание получить требуемое количество верных цифр невыполнимо, если упомянутый способ S чересчур груб, или не существует вовсе.

3/7/2019 С. Михеев