# Оглавление

# Глава 1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Понятие "колебание "колебательное движение "колебательный процесс"вошли в языки давно и часто употребляемы, поэтому ограничимся и здесь интуитивными представлениями об их сути, снабжая, однако, строгими определениями их математические модели. Эта позиция достаточно распространена в тех работах, где вообще используются строгие определения.

Простейшая модель колебания — периодическая функция — идеализирует его в наибольшей степени, но в некоторых задачах, таких как о маятнике, достаточно хорошо описывает процесс.

Задачи о движении планет и им подобные привели к созданию более общей и сложной модели — почти-периодических функций, полная теория которых была построена Г. Бором и опубликована в 1924 г. Ее разработка стала значительным этапом в моделировании колебательных движений и дала толчок появлению новых, еще более сложных моделей.

С середины этого века стала развиваться теория рекуррентных функций, включающих в себя, как частный случай, почти-периодические. В 1936 году Дж. Биркгоф в "Динамических системах"(русский перевод 1941 г. [2]) описал рекуррентное движение.

Определение В.1. Движение $P_t$ рекуррентно, если для любого положительного количества $\varepsilon$ можно найти такое положительное число $T(\varepsilon)$, чтобы всякая дуга $P_{t,t+T(\varepsilon)}$ кривой движения содержала точки, лежащие на расстоянии, меньшем $\varepsilon$ от любой точки кривой движения. ■

Начавшая быстро развиваться теория динамических систем явила множество новых классов колебаний. Разными авторами были введены слабо-, цепно-, почти-, псевдо-, особо-рекуррентные движения [28]. Появились слабо-почти-периодические функции, почти-периодические функции Степанова и Безиковича, а также рекуррентные функции Б. М. Левитана [19]. Полный аналог определения В.1 для функций введен В. И. Зубовым [11] и развит в [12]:

Определение В.2. Функция $f$, непрерывная на всей вещественной оси, называется рекуррентной, если для каждого положительного $\varepsilon$ существует конечное $L_\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\alpha \in R^1$ и каждого $t$ найдется $\tau_t$ из интервала $[\alpha, \alpha + L_\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству $|f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon$. ■

Если в этом определении потребовать независимости $\tau$ от $t$, то мы придем к почти-периодической функции Бора

Рекуррентной функцией можно описать колебания уровня моря при волнении, и ее можно рассматривать как одну из самых общих моделей колебаний. Результаты, полученные для нее, справедливы для многочисленных сужений. За общность, однако, приходится платить обеднением теории. (А за сужение — иногда недостаточной адекватностью действительности.)

Класс почти-периодических функций является компромиссом между адекватностью и богатством теории. Иной вариант подобного компромисса рассматривается здесь.

Пусть к исследованию предложен природный колебательный процесс, которому обычно сопоставляются периодические функции в качестве моделей. Основных расхождений "природы"с периодической моделью два: "плавание"частоты; различие в амплитуде в виде шумов и помех.

Второе принималось в расчет практически со времени появления периодических моделей. Сумма $p(t) + e(t)$, где $p$ — периодическая функция, $e$ — та или иная функция-модель помехи, использовалась по необходимости.

Уделим основное внимание первому типу расхождений. Переменный период, или плавающая частота — весьма распространенное явление. Его можно обнаружить в периодических моделях обращения планет, колебании маятника, вращении турбины, переменном токе, несущей частоте радиостанции. В техногенных процессах, отвечающих этим моделям, "плавание частоты— нежелательное явление, с ним ведется борьба. Но существует и специально организуемая вариация частоты, такая, например, как в частотной модуляции в радиовещании и телевидении, в устройстве для систематического обзора заданного диапазона радиоволн и т. п. В этих случаях описывающая колебания функция очень близка к периодической, и для ее исследования может оказаться удобной модель, опирающаяся на некоторый периодический образец, в котором каким-то образом внесены возмущения по частоте и амплитуде. Когда амплитуда постоянна, а меняется только частота, естественно описать такой процесс с помощью 1-периодической функции $p$, аргумент которой несколько отклоняется от линейного $at+c$. Если же и амплитуда не постоянна, в модель можно ввести аддитивную поправку для учета таких возмущений.

## §1.1. Моделирование ухода фазы в технических периодических колебаниях

Опишем вначале один абстрактный объект, имеющий касательство ко всем явлениям ухода фазы.

**Определение 1.1.** *Назовем функцию $f$ фазопериодической, если она представима в виде $f(t) = p(\theta(t))$, где $p$ — непрерывная 1-периодическая функция, функция $\theta$ строго возрастает и непрерывна в $\mathbb{R}^1$, причем $\theta(0) = 0$ и для любых $t$ и $\Theta > 0$ существует $\tau > 0$, такое, что $\theta(t+\tau) - \theta(t) > \Theta$.*

*Будем называть вышеописанные $\theta$ и $p$ фазовой функцией и периодическим образцом, соответственно.*

*Класс фазоопериодических функций, построенных на одном периодическом образце, обозначим через $F(p)$, а суперпозицию $f(t) := p(\theta(t))$ назовем* фазопериодическим разложением *(функции $f$). Наименьшее положительное число $\theta_0$, для которого имеет место $\theta(t) \equiv \theta_0\, mod(1)$, назовем* фазой момента $t$

*Функцию $T(t)$, такую, что $\theta(t + T(t)) - \theta(t) = 1$ назовем* местным периодом.

*Множество фазопериодических функций с ограниченной скоростью приращения фазовых функций: $N_2 \doteq \sup_t D^+\theta(t) < +\infty$ и $N_1 \doteq \inf_t D_+\theta(t) > 0$,[1)] обозначим через $K_3(p, N_1, N_2)$, здесь $D^+$, $D_+$ — операции нахождения верхнего и нижнего, соответственно, правого производного числа.*

Напомним определение производных чисел (чисел Дини). Верхние левые и правые, соответственно:

$$D^-\theta(t) \doteq \varlimsup_{\tau\to -0}(\theta(t+\tau)-\theta(t))/\tau, \qquad D^+\theta(t) \doteq \varlimsup_{\tau\to +0}(\theta(t+\tau)-\theta(t))/\tau,$$

для нижних левого $D_-$ и правого $D_+$ используется $\varliminf$.

Функция $g$ дифференцируема в точке $t$ справа, когда $D^+g(t) = D_+g(t)$, и слева, когда $D^-g(t) = D_-g(t)$.

Далее, если не оговаривается особо, будем полагать, что фазовая функция непрерывно дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^1$.

Согласно определению, очевидно, $N_1 \le N_2$.

[1)] Это определение можно расширить и на существование моментов $t$ таких, что $D_+\theta(t) = 0$ или $D^+\theta(t) = +\infty$. Однако, для легкости изложения мы не будем этого делать, по крайней мере, пока не появятся залачи, для которых это будет полезно.

Так как частота суперпозиции $p(at + \text{const})$ по определению есть $a$, т.е. производная аргумента внешней 1-периодической функции, то частотой суперпозиции $p(\theta(t))$ в момент $t$ естественно полагать производную $\dot{\theta}(t)$, если она существует, в дальнейшем именуемой *местной частотой.*

Согласно опр. 1.1 если у фазопериодической функции в момент $t$ наблюдается локальный экстремум, то он также случается в момент $t + T(t)$. Таким образом, фазопериодическая функция имеет такое разбиение области задания на интервалы, что в каждом из них она имеет одинаковое число минимумов и максимумов, а соответствующие графики могут быть получены растяжениями и сжатиями одного графика произвольного интервала из разбиения.

Итак, пусть моделирующая колебания функция отличается от чисто периодической только непостоянством частоты. Тогда ее всегда можно представить в виде суперпозиции некоторой 1-периодической функции $p$ и фазовой непрерывной функции $\vartheta(t)$.

Такое представление, однако, затруднительно для оценки степени неустойчивости частоты. Удобнее будет выделить линейную часть фазовой функции: $\vartheta(t) = at + b(t)$ да так, чтобы *фазовое возмущение* $b(t)$ было *поменьше*. Местная частота тогда есть $a + \dot{b}(t)$. Будем называть величину $a$ — *номинальной частотой*, а функцию $\dot{b}(\cdot)$ — *частотным возмущением.* Очевидную неоднозначность последнего разложения фазовой функции можно устранить наложением на него требования оптимальности в каком либо смысле. Возможные критерии качества, по которым производиоась бы оптимизация обсудим позднее.

При рассмотрении нескольких разложений удобно будет внести номинальную частоту в список параметров фазового возмущения, т.е. $\vartheta(t) = at + b(t, a)$.

Частота традиционно считается положительной величиной, поэтому $a > 0$. Формальное введение отрицательных частот не расширяет класса, так как для всякой 1-периодической функции $p$ найдется 1-периодическая функция $q$, такая, что $(\forall\, t)\ p(\alpha t) = q(at)$ и $\alpha = -a$. Если же $a = 0$, то фактически линейная часть не выделена. По аналогии либо из соображения, что фаза должна строго возрастать, иначе о плавании частоты говорить уже бессмысленно, следует потребовать положительности и местной частоты: $(\forall\, t)\ \dot{b}(t) > -a$.

Вышеизложенное можно формализовать следующим образом.

Зададим класс $K_4(p, a, M_1, M_2)$ функций $f$ (являющийся под-классом класса $F(p)$) следующими аксиомами:

$$p(t) - 1\text{-периодическая функция;} \tag{1.1}$$

$$f(t) = p(at + b(t)) \qquad \forall\, t \in (-\infty, +\infty); \tag{1.2}$$

$$p, b \in C^1, \quad b(0) = 0; \tag{1.3}$$

$$a > 0,\ +\infty > M_2 \geq -M_1 > -a; \tag{1.4}$$

$$(\forall\, t)\ -M_1 \leq \dot{b}(t) \leq M_2\ . \tag{1.5}$$

Очевидно,

$$K_4(p, a, M_1, M_2) = K_3(p, N_1, N_2) \iff N_1 = a - M_1 \bigwedge N_2 = a + M_2.$$

Отметим, что аргумент $at + b(t)$ функции $p$ в (1.2) есть строго возрастающая функция времени $t$, так как ее производная ограничена снизу положительным числом $a - M_1$. Поэтому местный период $T(t)$ функций класса $K_4(p, a, M_1, M_2)$ ограниченен для всех $t$ сверху величиной $(a - M_1)^{-1}$.

Поскольку производная функции $at + b(t)$ ограничена сверху величиной $a + M_2 < +\infty$, местный период $T(t)$ ограничен снизу положительным числом $(a + M_2)^{-1}$ (см. далее (**??**)). Этим же ограничениям удовлетворяет для всех $t$ обратный местный период $T_{-1}(t)$ — знакоположительная функция, определяемый формулой $\vartheta(t) - \vartheta(t - T_{-1}(t)) = 1$ (**??**).

Местный период, согласно определению 1.1, при наличии непрерывной производной фазовой функции, является решением интегрального уравнения $\int_t^{t+x} \dot{\vartheta}(s)\,\mathrm{d}s = 1$ относительно $x$. Которое только в частном случае $\dot{\vartheta} \equiv \mathrm{const}$ дает связь $\dot{\vartheta}(t) = (T(t))^{-1}$. Поэтому в общем случае для фазопериодической функции местный период нельзя считать равным $\left(a + \dot{b}(t)\right)^{-1}$.

Рассмотрим однопараметрическое преобразование величин из разложения фазовой функции — $V_v : \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{C}^1$, задаваемое формулой

$$\big(a, b(t, a)\big) = \big(\tilde{a} - v, b(t, \tilde{a}) + vt\big) \ \ \forall t. \tag{1.6}$$

Тогда $at + b(t, a) = \tilde{a}t + b(t, \tilde{a})$ и $a + \dot{b}(t, a) = \tilde{a} + \dot{b}(t, \tilde{a})$.

Аксиомы (1.1)–(1.5) вполне естественны и наглядны, однако между множеством классов $K_4(p, a, M_1, M_2)$ при фиксированной $p$ и тройками $(a, M_1, M_2)$ нет взаимно однозначного соответствия, т. е. разные тройки, если $N_1 = M_1 - a$ и $N_2 = a + M_2$, задают один класс, $K_3(p, N_1, N_2)$, выделенный из $F(p)$ ограничениями на фазовую функцию

$$(\forall\, t) N_1 \le \dot\theta(t) \le N_2.$$

Рассмотрим однопараметрическое множество

$$L := \Big\{(a, M_1, M_2) \,|\, M_1 = \widetilde{M}_1 - v,\ M_2 = \widetilde{M}_2 + v,\ a = \tilde a - v,\ v \in \mathbb{R}^1\Big\}.$$

Очевидно,

$$(a, M_1, M_2) \in L \implies \dot b(t, a) = \dot b(t, \tilde a, ) + v. \tag{1.7}$$

Если $N_1 = \widetilde{M}_1 - a$ и $N_2 = a + \widetilde{M}_2$, то

$$(a, M_1, M_2) \in L \implies (a + M_2 = N_2) \bigwedge (a - M_1 = N_1)$$

Поэтому

$$K_4(p, \tilde a, \widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2) = K_3(p, N_1, N_2) = K_4(p, a, M_1, M_2).$$

Введем дополнительное условие на параметры, для устранения упомянутой неоднозначности. В зависимости от номинала $a$ частотное возмущение $\dot b(t, a)$ по-разному сказывается на отклонении фазопериодической функции $p(at + b(t, a))$ от периодического колебания $p(at)$. Более полноценной характеристикой отклонений следует признать относительное частотное возмущение $\dot b/a$. Кроме того, повышение $(\dot b > 0)$ и понижение $(\dot b < 0)$ текущей частоты не равноценны. Целесообразно считать эквивалентными такие частотные возмущения, которые в одно число раз уменьшают либо увеличивают текущую частоту, т. е.

$$\left.\begin{array}{c} \dot b_1(t) \sim \dot b_2(t) \\ \dot b_2(t) > 0 > \dot b_1(t) \end{array}\right\} \iff \frac{a + \dot b_2(t)}{a} = \frac{a}{a + \dot b_1(t)}.$$

Откуда $\dot b_1(t) = \dfrac{-a\dot b_2(t)}{a + \dot b_2(t)}, \qquad \dot b_2(t) = \dfrac{-a\dot b_1(t)}{a + \dot b_1(t)}.$

При таком понимании эквивалентности для унификации оценок отклонений будет удобна *девиация*

$$\operatorname{dev}(a, m) \doteq \begin{cases} m/a, & m \ge 0, \\ \dfrac{-m}{a + m}, & m < 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Таким образом, $\operatorname{dev}(a, m^-) = \operatorname{dev}(a, m^+) \wedge m^- m^+ < 0 \iff$

$$\iff m^- = \frac{-am^+}{a+m^+} \iff m^+ = \frac{-am^-}{a+m^-}.$$

Пусть имеется класс $K_4(p, \tilde{a}, \widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2) =: K'$. Найдем во множестве $L$ тройку скалярных параметров, минимизирующих девиацию частотного возмущения относительно номинальной частоты (при неизменном периодическом образце):

$$S(a, M_1, M_2) := \sup_t \operatorname{dev}(a, \dot{b}(t, a, M_1, M_2)) \longrightarrow \min_{(a, M_1, M_2),\ K_4(p,a,M_1,M_2)=K'}$$

Оказывается

$$S(a, M_1, M_2) = \max\Big(\frac{M_1}{a - M_1}, \frac{M_2}{a}\Big) \tag{1.9}$$

Д е й с т в и т е л ь н о. Если $M_2 < 0$, то в каждый момнт частотное возмущение отрицательно и ограничено снизу величиной $-M_1$. Следовательно активна нижняя часть формулы (1.8). И (1.9) ее доставляет в виде первого аргумента максимума.

Если $M_1 < 0$, то в каждый момнт частотное возмущение положительно и ограничено сверху величиной $M_2$. Активна верхняя часть формулы (1.8). И (1.9) ее доставляет в виде второго аргумента максимума.

Убедились, что в минимайзере должно быть $M_1, M_2 \geq 0$. Воспользуемся связью между параметрами в однопараметрическом множестве $L$:

$$\max\Big(\frac{M_1}{a - M_1}, \frac{M_2}{a}\Big) = \max\Big(\frac{\widetilde{M}_1 - v}{\tilde{a} - \widetilde{M}_1}, \frac{\widetilde{M}_2 + v}{\tilde{a} - v}\Big) =: \widehat{S}(v, \tilde{a}, \widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2).$$

Когда $v$ пробегает интервал $\mathcal{I} = (-\widetilde{M}_2, \tilde{a})$ второй аргумент второго максимума в этой формуле принимает строго монтонно возрастая все значения из $(0, \infty)$, а первый аргумент принимает только положительные значения строго монотонно убывая. Следовательно в интервале $\mathcal{I}$ найдется единственная точка $v'$, реализующая минимум этого максимума $x = \arg\min_v \widehat{S}(v, \tilde{a}, \widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2)$. И в ней значения обоих аргументов совпадут.

$$\frac{\widetilde{M}_1 - v'}{\tilde{a} - \widetilde{M}_1} = \frac{\widetilde{M}_2 + v'}{\tilde{a} - v'} \iff \frac{\widetilde{M}_1 - v'}{\tilde{a} - \widetilde{M}_1} + 1 = \frac{\widetilde{M}_2 + v'}{\tilde{a} - v'} + 1. \tag{1.10}$$

Из последнего равенства получаем

$$(\tilde{a} - v')^2 = (\tilde{a} - \widetilde{M}_1)(\tilde{a} + \widetilde{M}_2) \equiv N_1 N_2.$$

Здесь $\tilde{a} - v' =: a'$ — это новая номинальная частота для исходного класса $K'$, равная среднегеометрическому от супремума и инфимума фазовых скоростей. Для нее частотное возмущение будет иметь минимальную девиацию. Отмечая апострофом новые ограничения на новое частотное возмущение, согласно связям $M_1 = \widetilde{M}_1 - v'$ и $M_2' = \widetilde{M}_2 + v'$ из первого равенства в (1.10) получаем зависимости

$$M_2' = \frac{M_1' a'}{a' - M_1'} \iff M_1' = \frac{M_2' a'}{a' + M_2'},$$

позволяющие указывать лишь одно ограничение в описании класса. Будем использовать верхнее $M = M_2$ и обозначение

$$K(p, a, M) := K_4(p, a, Ma/(a + M), M).$$

Автономно можно задать класс $K(p, a, M)$ аксиомами (1.1)–(1.3) и аксиомой

$$-aM/(a + M) \le \dot{b}(t) \le M \qquad \forall\, t,\ \ M \ge 0, \tag{1.11}$$

или, что тоже, $\operatorname{dev}(a, \dot{b}) \le M/a$.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Для совпадения классов* $K_4(p, d, M_1, M_2)$ *и* $K(p, a, M)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$a = \sqrt{(d - M_1)(d + M_2)}, \qquad M = M_2 + d - a. \tag{1.12}$$

Необходимость. Пусть классы совпадают. Это означает, что произвольному возмущению $b_d(t)$, удовлетворяющему классу $K_4(p, d, M_1, M_2)$, будет соответствовать возмущение $b_a(t)$, удовлетворяющее классу $K(p, a, M)$:

$$at + b_a(t) = dt + b_d(t). \tag{1.13}$$

Пусть возмущение $b_d$ реализует $M_2$, т. е. $\sup_t \dot{b}_d(t) = M_2$. Тогда из (1.13) получаем $M \le M_2 + d - a$. Обратно. Пусть возмущение $b_a$ реализует $M$. Тогда из (1.13) получаем $M \ge M_2 + d - a$. Отсюда

$M = M_2 + d - a$. Полагая последовательно $b_d$ реализующим $-M_1$ и $b_a$ реализующим $-aM/(a+M)$ получаем из (1.13)

$$a - \frac{aM}{a+M} = d - M_1, \quad \text{т.е.} \quad a^2 = (d - M_1)(a+M). \tag{1.14}$$

Выражая здесь $M$ через $M_2$, видим, что $a^2 = (d-M_1)(d+M_2)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Класс $K_4(p, d, M_1, M_2)$ совпадает с классом $K_3(p, N_1, N_2)$, где $N_1 = d - M_1$, $N_2 = d + M_2$. Из (1.13) и (1.12) следует

$$\sup_{t,\ b_a} a + \dot b_a(t) = a + M = d + M_2 \equiv N_2,$$

$$\inf_{t,\ b_a} a + \dot b_a(t) = a - \frac{aM}{a+M} = \frac{a^2}{d+M_2} = d - M_1 \equiv N_1,$$

что влечет $K(p, a, M) = K_3(p, N_1, N_2)$. ■

Итак, трех параметров достаточно для описания интересующих нас функций. Кроме того, имеет место единственность по двум параметрам.

**Теорема 1.2.** *При фиксированном периодическом образце паре* $(a, M)$ *взаимно однозначно соответствует множество* $K(p, a, M)$, *т. е.*

$$K(p, \hat a, \widehat{M}) = K(p, a, M) \iff (\hat a, \widehat{M}) = (a, M). \tag{1.15}$$

Д е й с т в и т е л ь н о. “⇐— по определению.

“⇒". Пусть есть множество $K_3(p, N_1, N_2)$ функций вида $p(\theta(t))$, где $p$ 1-периодична, а фазовая функция подчинена условию $\dot\theta(t) \in [N_1, N_2]$. Очевидно, что $K_3(p, N_1, N_2) = K_3(p, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2)$ тогда и только тогда, когда $(N_1, N_2) = (\widehat{N}_1, \widehat{N}_2)$.

Положим $N_2 = a + M$, $N_1 = a - aM/(a+M)$, $\widehat{N}_2 = \hat a + \widehat{M}$, $\widehat{N}_1 = \hat a - \hat a\widehat{M}/(\hat a + \widehat{M})$. Тогда по аксиоме (1.11) и в силу построений $K_3(p, N_1, N_2) = K(p, a, M)$, $K_3(p, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2) = K(p, \widehat{a}, \widehat{M})$. Поэтому

$$K(p, \widehat{a}, \widehat{M}) = K(p, a, M) \iff K_3(p, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2) = K_3(p, N_1, N_2) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \widehat{N}_2 = N_2 \\ \widehat{N}_1 = N_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat a + \widehat{M} = a + M, \\ \hat a - \hat a\widehat{M}/(\hat a + \widehat{M}) = a - aM/(a+M). \end{cases} \tag{1.16}$$

Решая последнюю систему в (1.16) относительно $(a, M)$ при фиксированных $(\hat{a}, \widehat{M})$, видим, что решение единственно: $(a, M) = (\hat{a}, \widehat{M})$. Отсюда (1.15). ■

*Замечание.* Между классами $K(p, a, M)$ и $K_3(p, N_1, N_2)$ имеется взаимно однозначное соответствие, ибо согласно их определениям, когда они совпадают, однозначно должно быть

$$N_1 = a + M \qquad \wedge \qquad N_2 = a - \frac{aM}{a+M},$$

что всегда однозначно разрешимо относительно $a$ и $M$:

$$a = \sqrt{N_1 N_2} \qquad \wedge \qquad M = N_1 - \sqrt{N_1 N_2}. \qquad ■$$

Теорема 1.2 позволяет назвать класс $K$, совпадающий с классом $K_4$, *каноническим K-представлением* класса $K_4$.

Девиация $\operatorname{dev}(a, \dot{b})$ была определена так, чтобы ее малость характеризовала “близость"функции $p(at + b(t))$ к периодической $p(at)$. Оказывается, множество функций класса $K(p, a, M)$ ближе к периодической функции $p(at)$, чем множество функций класса $K_2(p, d, M_1, M_2) \equiv K(p, a, M)$ к периодической $p(dt)$.

**Теорема 1.3.** *Совпадение классов* $K(p, a, M)$ *и* $K_4(p, d, M_1, M_2)$ *влечет*

$$\frac{M}{a} \le \max\left(\frac{M_2}{d}, \frac{M_1}{d - M_1}\right) \doteq \mu,$$

*причем равенство имеет место лишь при* $a = d$, $M_2 = M$, $M_1 = aM/(a + M)$.

Действительно. Из (1.12) и (1.14) извлекаем

$$M_2 = M + a - d, \qquad M_1 d - a + \frac{aM}{a+M} = \frac{ad + Md - a^2}{d + M_2}.$$

Отсюда и из (1.12): $\dfrac{M_1}{d - M_1} = \dfrac{ad + Md - a^2}{a^2}$. Таким образом,

$$\mu = \max\left(\frac{M+a}{d} - 1, \frac{ad + Md}{a^2} - 1\right) = (M + a)\max\left(\frac{1}{d}, \frac{d}{a^2}\right) - 1.$$

Очевидно, что $\min_d \max$ достижим при $d = a$ и равен $1/a$.

*Следствие.* Верхние границы девиаций частотных возмущений в каноническом представлении $K(p,a,M)$ меньше, чем в любом классе $K_4(p,d,M_1,M_2) = K(p,a,M)$.

Действительно, по определениям $\sup_{b_a,t} \operatorname{dev}(a,\dot{b}_a) \equiv M/a$ и $\sup_{b_d,t} \operatorname{dev}(d,\dot{b}_d) \equiv \mu$; далее применяем теорему 1.3. ∎

Очевидно, что чем меньше $M/a$, тем "ближе"функции класса $K(p,a,M)$ к периодической функции $p(at)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем называть *p-минимальным покрытием* конкретной фазопериодической функции $f$ с известным для нее 1-периодическим образцом $p$ содержащий ее класс $K(p,a,M)$, такой, что предельная девиация фазовой частоты $M/a$ в нем не более чем в других классах $K$, содержащих $f$. ∎

Пусть $f(t) = p(\theta(t))$. Тогда $\dot{\theta}(t) = \dot{f}(t)/p'(\theta(t))$. Положим

$$N_2^\theta = \sup_t \dot{\theta}(t), \qquad N_1^\theta = \inf_t \dot{\theta}(t). \tag{1.17}$$

*Замечание 1.* Если $f \in K_4(p,a,M_1,M_2)$, то $N_2 \le a + M_2$ и $N_1 \ge a - M_1$.

*Замечание 2.* В отличие от описания в определении 1.1 чисел $N_1$, $N_2$, характеризующих некоторый класс $K_3$, в (1.17) функционалы $N_1^\theta$, $N_2^\theta$ вводятся для конкретной функции из этого класса.

**Теорема 1.4.** *Если функция $f \in F(p)$ и числа $N_1^\theta$, $N_2^\theta$ из (1.17) конечны, то минимальное число $M$, еще обеспечивающее, хотя бы на одной частоте $a$, условие У: $f \in K(p,a,M)$, равно $N_2^\theta - a$, при этом номинальная частота $a$ есть среднегеометрическое от $N_1^\theta$ и $N_2^\theta$. Кроме того, p-минимальное покрытие функции $f$ есть $K(p,a,M)$ с этими же значениями $M$ и $a$. Иных минимальных покрытий нет.*

Д е й с т в и т е л ь н о. Условие У эквивалентно:

$$\begin{cases} a + M \ge N_2^\theta, \\ N_1^\theta \ge a - M_1 \equiv a - \dfrac{aM}{a+M} \end{cases} \iff \begin{cases} M \ge N_2^\theta - a, \\ M \ge \dfrac{a^2}{N_1^\theta} - a, \end{cases} \tag{1.18}$$

что вместе с требованием минимальности $M$ дает нелинейную программу

$$\max\left(N_2^\theta - a,\ a^2/N_1^\theta - a\right) \longrightarrow \min_{a \in (N_1^\theta, N_2^\theta)}.$$

Поскольку здесь первый аргумент максимума убывает на всем интервале задания $a$, а второй возрастает, то в точке минимума должно выполняться $N_2^\theta - a = a^2/N_1^\theta - a$. Отсюда $a = \sqrt{N_1^\theta N_2^\theta}$, и по построению $M = N_2^\theta - a$ есть наименьшее из тех, для которых верно условие У.

Далее. Поделим в последней системе из (1.18) оба неравенства на $a$. То, что получится, совместно с требованием минимальности $M/a$ образует нелинейную программу

$$\max\left(N_2^\theta/a - 1,\ a/N_1^\theta - 1\right) \longrightarrow \min_{a\in(N_1^\theta, N_2^\theta)}.$$

Здесь тоже первый аргумент максимума убывает на всем интервале задания $a$, а второй — возрастает. Поэтому точка минимума удовлетворяет уравнению $N_2^\theta/a = a/N_1^\theta$. Оно имеет единственное положительное решение $a = \sqrt{N_1^\theta N_2^\theta}$. Этим доказывается вторая часть утверждения теоремы.

Определение 1.3. Пусть 1-периодическая функция $p$, номинальная частота $a$ и фазовое возмущение $b$ удовлетворяют аксиомам некоторого класса $C$ и $f(t) = p(at + b(t))\ \forall\, t$, тогда суперпозицию $p(at + b(t))$ будем называть *C-разложением функции* $f$. Когда параметр $a$ является номинальной частотой в минимальном покрытии классом $K$ функции $f$, эту суперпозицию будем называть *p-каноническим разложением* функции $f$. ■

В смысле минимальности как относительного частотного возмущения, так и предельной частотной девиации $\sup_t \mathrm{dev}(a, \dot b(t))$ p-каноническое разложение лучше неканонических. По теореме 1.4 p-каноническое разложение единственно.

**Алгоритм 1** построения p-канонического разложения.

*Вход*: C-разложение функции $f$. Если $C = K_3$, то это 1-периодический образец $p$ и фазовая функция $\theta$. Если $C = K, K_4$, то это 1-периодический образец $p$, номинальная частота $a$ и фазовое возмущение $b$. (Параметры классов, ограничивающие скорость фазовой функции и частотные возмущения, не используются.)

*Выход*: 1) p-каноническое разложение функции $f$, т. е. номинальная частота $a_0$ и фазовое возмущение $b_0$, такие, что $f(t) = p(a_0 t + b_0(t))$ и $K(p, a_0, \sup_t b_0(t))$ является p-минимальным покрытием функции $f$; 2) p-минимальное покрытие.

Шаг 1. Найти пределы изменения скоростей фазы в C-разложении функции $f$:

для $C = K_3$ это $N_1^\theta = \inf_t \dot\theta(t)$ и $N_2^\theta = \sup_t \dot\theta(t)$;

для $C = K, K_4$ это $N_1^\theta = a + \inf_t \dot{b}(t)$ и $N_2^\theta = a + \sup_t \dot{b}(t)$.

Ш а г 2. Вычислить номинальную частоту: $a_0 = \sqrt{N_1^\theta N_2^\theta}$.

Ш а г 3. Определить фазовое возмущение:

для $C = K_3$ это $b_0(t) = \theta(t) - a_0 t$;

для $C = K, K_4$ это $b_0(t) = (a - a_0)t + b(t)$.

Ш а г 4. Вычислить недостающий параметр p-минимального покрытия: $M^0 = N_2^\theta - a_0$; p-минимальное покрытие есть класс $K(p, a_0, M^0)$. ∎

Попробуем теперь распорядиться 1-периодическим образцом $\bar{p}$ и соответствующей ему номинальной частотой $a$ так, чтобы добиться еще большей близости к $p(at)$ заданной функции $f \in F(p)$.

## §1.2. Фазозависимые представления

Нетрудно заметить, что в силу определения 1.1 класс $F(p)$ может быть порожден бесконечным множеством периодических образцов: достаточно лишь для $F(p) = F(\bar{p})$ потребовать совпадения последовательности экстремумов образцов $p$ и $\bar{p}$, что будем обозначать как $pF\bar{p}$.

А можно ли повысить в том или ином смысле качество канонического представления $K(p, a, M)$, меняя образец $p$? Оказывается, нет, поскольку каноническому представлению взаимно однозначно соответствует набор $p, a, M$ (см. теорему 1.5). Однако множество p-минимальных покрытий $K(p, a, M)$ конкретной фазопериодической функции $f \in F(p)$ может состоять более, чем из одного элемента. Поэтому вполне корректна следующая

**Задача 1.** Найти такие параметры $p, a^p, M^p$ (здесь функциональная зависимость номинальной частоты и верхней границы частотного возмущения отражена в верхнем индексе), которые являются решением нелинейной программы

$$g(p) \doteq \frac{M^p}{a^p} \longrightarrow \min_{pF\bar{p}}. \tag{1.19}$$

Соответствующий этим параметрам класс $K(p, a^p, M^p)$ будем называть *минимальным K-покрытием функции f*. ∎

Для исследования этого потребуется дополнительный аппарат.

О п р е д е л е н и е 1.4. Будем называть момент $\tau$ *аналогичным* моменту $t$, если их фазы в фазопериодическом разложении $p(\theta(\cdot))$

функции $f$ сравнимы:

$$\theta(t) \equiv \theta(\tau)(\operatorname{mod} 1). \tag{1.20}$$

Когда определена номинальная частота $a$ $(\theta(t) = at + b(t))$, сравнение (1.20) принимает вид

$$at + b(t) \equiv a\tau + b\,(\tau) \equiv a\,\vartheta\,(\operatorname{mod} 1), \qquad \vartheta \in [0, 1/a). \tag{1.21}$$

Тогда же (есть $a$) аналогичные моменты можно определить через сравнимость суперпозиционных фаз (далее —*суперфаз*) $\vartheta$

$$\theta(t)/a \equiv \theta(\tau)/a \equiv \vartheta(\operatorname{mod} 1/a). \tag{1.22}$$

Множество всех аналогичных моментов будем обозначать $A(t)$, либо $A_\vartheta$ $(\vartheta \in [0, 1/a))$, либо $A^\theta$ $(\theta \in [0, 1))$.

Положим

$$I(\vartheta, b) = \inf_{t \in A_\vartheta} \dot{b}(t), \quad S(\vartheta, b) = \sup_{t \in A_\vartheta} \dot{b}(t), \qquad \vartheta \in [0, 1/a), \tag{1.23}$$

$$M_1(\vartheta) = -\inf_b I(\vartheta, b), \quad M_2(\vartheta) = \sup_b S(\vartheta, b), \quad \vartheta \in [0, 1/a), \tag{1.24}$$

$$N_1(\eta) = \inf_{t \in A^\eta} \dot{\theta}(t), \qquad N_2(\eta) = \inf_{t \in A^\eta} \dot{\theta}(t) \qquad \eta \in [0, 1). \tag{1.25}$$

■

*Замечание 1.* Можно предложить для определения аналогичного момента еще одно сравнение, эквивалентное (1.21) и (1.22):

$$\theta(t) \equiv a\vartheta(\operatorname{mod} 1), \quad \vartheta \in [0, 1/a).$$

*Замечание 2.* Через функции, определенные согласно (1.23) и (1.17), можно выразить ранее введенные в (1.17) параметры:

$$N_1^\theta = \inf_{\eta \in [0,1]} N_1(a, b, \eta) = a + \inf_{\vartheta \in [0, 1/a)} I(\vartheta, b),$$

$$N_2^\theta = \sup_{\eta \in [0,1]} N_2(a, b, \eta) = a + \sup_{\vartheta \in [0, 1/a)} S(\vartheta, b).$$

Расширим понятие класса $K_3(p, N_1, N_2)$, позволив величинам $N_1$, $N_2$ быть отличными от констант функциями, заданными на $[0, 1)$ и $(\forall\, \eta \in [0, 1))\ 0 < N_1(\eta) \leq N_2(\eta) < +\infty$. Такой класс будем обозначать через $Q_3(p, N_1, N_2)$.

**Теорема 1.5.** *Справедливо*

$$K(p,a,M) = K(\bar p,\bar a,\bar M) \iff (p,a,M) = (\bar p,\bar a,\bar M).$$

Действительно. "$\Leftarrow$"следует из определения класса $K$.

"$\Rightarrow$". **1.** Пусть $K(p,a,M) = K(\bar p,\bar a,\bar M)$, но $(p,a,M) \neq (\bar p,\bar a,\bar M)$. Уже доказано (теорема 1.4), что при $p=\bar p$ этого не может быть.

Пусть для некоторой функции $f$ существуют два не равных друг другу 1-периодических образца $p$ и $\bar p$ из $C^1$, т. е. существует фаза $\tau \in (0,1)$, такая, что $p(\tau) \neq \bar p(\tau)$. (В силу непрерывности образцов можно выбрать $\tau$ отличным от нуля.) Выделим вокруг $\tau$ в $(0,1)$ интервал строгой монотонности $(\tau_1,\tau_2)$ образца $p$ и $(\bar\tau_1,\bar\tau_2)$ — аналогичный интервал для $\bar p$. Согласно определениям

$$p(\tau_1) = \bar p(\bar\tau_2) \doteq y_1, \qquad p(\tau_2) = \bar p(\tau_2) \doteq y_2.$$

Обратные к $p$ и $\bar p$ функции, которые можно определить на $(y_1,y_2)$, тоже не равны друг другу, т. е. $\bigl(\exists\, y \in (y_1,y_2)\bigr)$ $p^{-1}(y) \neq \bar p^{-1}(y)$.

Положим для определенности $p^{-1}(y) > \bar p^{-1}(y)$. Обратная функция $p^{-1}$ имеет непрерывную производную $1/p'(p^{-1}(z))$ при всех $z \in [y,y_2)$, поэтому

$$p^{-1}(z) = p^{-1}(y) \ + \ \int_y^z \frac{\mathrm{d}x}{p'(p^{-1}(x))}.$$

Аналогично для $\bar p$.

Так как $p^{-1}(y_2) = \bar p^{-1}(y_2)$ и эти обратные функции непрерывны, должно существовать значение $z_2 \in (y,y_2)$, такое, что $p^{-1}(z_2) - \bar p^{-1}(z_2) < p^{-1}(y) - \bar p^{-1}(y)$, т. е.

$$\int_y^{z_2} \frac{\mathrm{d}x}{p'(p^{-1}(x))} < \int_y^{z_2} \frac{\mathrm{d}x}{\bar p'(\bar p^{-1}(x))}.$$

Это означает, что у функции $f$ существует значение $x_2 \in (y_1,y_2)$, такое, что $p'(p^{-1}(x_2)) > \bar p'(\bar p^{-1}(x_2))$.

Рассматривая интервал $(y_1,y)$, можно обнаружить в нем у функции $f$ значение $x_1$, такое, что $p'(p^{-1}(x_1)) < \bar p'(\bar p^{-1}(x_1))$.

Таким образом, на интервале $(y_1,y_2)$ справедливо

$$p'(p^{-1}(x))\big/\bar p'(\bar p^{-1}(x)) \neq \mathrm{const}\,. \tag{1.26}$$

**2.** Пусть рассмотренные в п. 1 $p$, $\bar{p}$ являются параметрами $Q_3$-разложений функции $f$:

$$f(t) = p(\theta(t)) = \bar{p}(\bar{\theta}(t)) \qquad \forall\, t. \tag{1.27}$$

Введем обозначения $\xi = \theta(t)$, $\bar{\xi} = \bar{\theta}(t) \equiv \Psi(\xi)$. И пусть значениям $y_1, y, y_2$ соответствуют моменты $t_1, t, t_2 \in (0,1)$. Тогда на интервале $(t_1, t_2)$ выполняется $\bar{\theta}(t) = \Psi(\theta(t))$, откуда

$$\bar{p}'(\bar{\xi}) \sup_{t \in A^{\bar{\xi}}} \bar{\theta}'(t) = \bar{p}'(\bar{\xi}) \Psi'(\xi) \sup_{t \in A^{\xi}} \theta'(t). \tag{1.28}$$

Согласно определениям $\sup_f \sup_{t\in A^{\xi}} \theta'(t) = N_2(\xi)$. Поэтому, когда $\bar{p}'(\bar{\xi}) \neq 0$, из (1.28) вытекает

$$\bar{N}_2(\bar{\xi}) = N_2(\xi)\Psi'(\xi). \tag{1.29}$$

В силу (1.27)

$$p'(\theta(t))\theta'(t) = \bar{p}'(\bar{\theta}(t))\Psi'(\theta(t))\theta'(t) \qquad \forall\, t. \tag{1.30}$$

Из (1.27) следует, что $\theta(t) = p^{-1}(x)$, $\bar{\theta}(t) = \bar{p}^{-1}(x)$, где $x = f(t)$, а поскольку производная $\theta'$ предполагается отличной от нуля $\big((\forall\, \xi \in [0,1))\ N_1(\xi) > 0\big)$ и утверждение (1.26) уже доказано, соотношение (1.30) означает, что $\Psi' \neq \mathrm{const}$ на интервале $(\tau_1, \tau_2)$ — образе $\theta((t_1,t_2))$ интервала $(t_1, t_2)$. Следовательно, если $\big(\forall\, \xi \in (\tau_1,\tau_2)\big)$ $N_2(\xi) = \mathrm{const}$, то $\bar{N}_2(\bar{\xi}) \neq \mathrm{const}$ согласно (1.29) на $(\tau_1, \tau_2) \equiv \bar{\theta}((t_1, t_2))$.

**3.** Непосредственно из определений классов $K_3$ и $Q_3$ вытекает

$$K_3(p, n_1, n_2) = Q_3(p, N_1(\cdot), N_2(\cdot)) \iff \begin{cases} N_1(\cdot) = \mathrm{const} = n_1, \\ N_2(\cdot) = \mathrm{const} = n_2. \end{cases} \tag{1.31}$$

С другой стороны,

$$Q_3(p, N_1(\cdot), N_2(\cdot)) = Q_3(p, \bar{N}_1(\cdot), \bar{N}_2(\cdot)) \iff \begin{cases} N_1 = \bar{N}_1, \\ N_2 = \bar{N}_2. \end{cases} \tag{1.32}$$

Согласно (1.31) для класса $Q_3$ существует совпадающий с ним класс $K_3$ тогда и только тогда, когда пределы девиаций $N_1$, $N_2$ в классе $Q_3$ — константы. В свою очередь классу $K_3$ однозначно соответствует его каноническое K-представление $K$. Поэтому

$$K(p, a, M) = K(\bar{p}, \bar{a}, \bar{M}) \iff$$

$$\iff K_3\Big(p,\ \frac{a^2}{a+M},\ a+M\Big)=K_3\Big(\bar p,\ \frac{\bar a^2}{\bar a+\bar M},\ \bar a+\bar M\Big)\iff$$

$$\iff Q_3\Big(p,\ \frac{a^2}{a+M},\ a+M\Big)=Q_3\Big(\bar p,\ \frac{\bar a^2}{\bar a+\bar M},\ \bar a+\bar M\Big). \tag{1.33}$$

С другой стороны, $Q_3\big(p,\frac{a^2}{a+M},a+M\big)=Q_3\big(\bar p,\bar N_1,\bar N_2\big)$. Поэтому из (1.32) и (1.33) вытекает, что $\bar N_2=\bar a+\bar M=\mathrm{const}$. Но это противоречит доказанному в п. 2, т. е. предположение о существовании двух различных образцов оказалось ложным.

**Лемма 1.1.** *Супремум* $\mathcal{S}(u)=\sup_i g_i(u)$ *и инфимум* $\mathcal{I}(u)=\inf_i g_i(u)$ *счетного семейства измеримых функций* $\{g_i\}$ *измеримы.*

Доказательство. Вначале супремум. Поскольку для каждого $i$ функция $g_i$ измерима, то $X(c,g_i)\doteq\{u\big|g_i(u)>c\}$ — измеримое множество. Но для всякого $i$ справедливо $\mathcal{S}(u)\geq g_i(u)$, поэтому $(\forall\, i)\ X(c,g_i)\subset X(c,\mathcal{S})$, откуда следует $\bigcup_i X(c,g_i)\subset X(c,\mathcal{S})$. С другой стороны, если в некоторой точке $\bar u$ выполнено $\mathcal{S}(\bar u)>c$, то, очевидно, возможны два варианта:

1) существует $i$, такое, что $g_i(\bar u)=\mathcal{S}(\bar u)$, и тогда $\bar u\in X(c,g_i)$;

2) существует последовательность $\{i_k\}$, такая, что по любому $\varepsilon>0$ найдется $K$, отвечающее условию $S(\bar u)-g_{i_k}(\bar u)<\varepsilon$ при $k\geq K$. Положим $\varepsilon=\mathcal{S}(\bar u)-c$ и найдем для него номер $K$, обладающий указанным свойством. Тогда $(\forall\, k\geq K)\ g_{i_k}(\bar u)>\mathcal{S}(\bar u)-\varepsilon=c$, т. е. $\bar u\in X(c,g_{i_k})$. В силу произвольности выбора $\bar u$ из $X(c,\mathcal{S})$ имеем $X(c,\mathcal{S})\subset\bigcup_i X(c,g_i)$, откуда $X(c,\mathcal{S})=\bigcup_i X(c,g_i)$. Так как счетное объединение измеримых множеств есть измеримое множество, то $X(c,\mathcal{S})$ измеримо, и, следовательно, $\mathcal{S}$ — измеримая функция.

Для инфимума — аналогично.

**Лемма 1.2.** *Функции* $S(\vartheta,b)$ *и* $I(\vartheta,b)$ *(по* (1.23)*) измеримы по* $\vartheta$ *при всех* $b$.

Доказательство. Возьмем $t=t_0=0$ и разобьем временную ось аналогичными точками $A(0)$ на интервалы: $(-\infty,+\infty)=\bigcup[t_i,t_{i+1}),\ i\in\{0,\pm1,\pm2,...\}$. На каждом таком интервале можно задать время как функцию суперфазы $t=t^i(\vartheta)\ [0,1/a)\xrightarrow{t^i}[t_i,t_{i+1})$. Функции $t_i$ монотонно возрастают и непрерывны. Поэтому из измеримости $\dot\theta(t)$ следует измеримость по $\vartheta$ суперпозиции $\dot\theta(t_i(\vartheta))\doteq$

$h_i(\vartheta)$. Функция $\theta$ непрерывна, а ее производная $\dot\theta$ ограничена. Известно [32], что тогда она ($\dot\theta$) измерима. Положим $g_i(\vartheta) = h_i(\vartheta) - a$. По построению

$$\big(t \in [t_i, t_{i+1}) \wedge t \in A_\vartheta\big) \Rightarrow g_i(\vartheta) = \dot b(t),$$

откуда $\sup_{\tau \in A_\vartheta} \dot b(t) = \sup_i g_i(u)$. Применим лемму 1.1 к семейству $g_i(u)$. ■

В надежде, что аналогия с предыдущей минимизацией в теореме 1.3 поможет, потребуем

$$\frac{a + S(\vartheta, b)}{a} = \frac{a}{a + I(\vartheta, b)}. \tag{1.34}$$

Пусть $P_x$ — множество непрерывных функций $f$ на интервале $[0, x]$ и $f(0) = f(x)$.

Используем для задания класса функций $Q(p(\cdot), a, M(\cdot))$ аксиомы (1.1)–(1.3), связи (1.23), (1.24), обозначение $M(\vartheta) = M_2(\vartheta)$, аксиому

$$M(\vartheta) \geq 0 \quad \wedge \quad M_1(\vartheta) = aM(\vartheta)/(a + M(\vartheta)), \quad \vartheta = \overline{0, 1/a}, \tag{1.35}$$

и аксиому

$$M \in P_{1/a} \quad \wedge \quad \bar M \doteq \sup M(\vartheta) > 0. \tag{1.36}$$

Проверка соотношения (1.34) на классе $Q$ не вызывает затруднений.

Класс функций $Q_4(p, a, M_1, M_2)$ зададим аксиомами (1.1)–(1.3), связями (1.23), (1.24) и аксиомами

$$\bar M \doteq \sup M_2 > 0 \quad \wedge \quad \sup M_1 = \frac{a\bar M}{a + \bar M} \quad \wedge \quad M_1, M_2 \in P_{1/a}, \tag{1.37}$$

Поскольку для произвольной функции $M(\vartheta) \geq 0$ верно

$$\sup_\vartheta \frac{aM}{a + M} = \frac{a \sup_\vartheta M}{a + \sup_\vartheta M} \qquad \forall\, a > 0,$$

функции $M_2 = M$ и $M_1 = \frac{aM}{a+M}$ с учетом обозначения из (1.36) удовлетворяют (1.37). Поэтому справедливо $Q(p, a, M) = Q_4\big(p, a, \frac{aM}{a+M}, M\big)$. Возможно, однако, что $M_1, M_2$ удовлетворяют (1.37), но $M_1 \neq \frac{aM}{a+M}$. Тогда можно лишь утверждать, что эти классы не совпадают. Причем $M_1 \geq \frac{aM}{a+M}$ $(\forall\, \vartheta)$ влечет $Q(p, a, M) \subseteq$

$Q_4\big(p, a, \frac{aM}{a+M}, M\big)$. Обратное неравенство влечет обратное включение.

Для классов $Q_4(p, a, M_1, M_2)$, порожденных аксиомами (1.1)–(1.3), (1.37), нарушена взаимная однозначность соответствия с четверками $(p, a, M_1, M_2)$. Аналогом теоремы 1.2 является

**Теорема 1.6.** *Пусть $M_1$, $M_2$ измеримы. Тогда для любого класса $Q_4(p\,(\cdot), a, M_1(\cdot), M_2(\cdot))$ найдется тройка $(p_0\,(\cdot), a_0, M(\cdot))$, такая, что $Q_4(p, a, M_1, M_2) = Q(p_0, a_0, M)$. С точностью до фазы эта тройка единственна, т. е. если $Q(p_0, a_0, M) = Q(p_1, a_1, N)$, то $a_0 = a_1$ и существует число $z$, такое, что $p_0(z+\theta) = p_1(\theta)$ и $M(z+\theta) = N(\theta)$ для всех $\theta$.*

*(Класс $Q$ будем называть тогда каноническим представлением класса $Q_4$, а его параметры $(p_0, a_0, M)$ — каноническими параметрами класса $Q_4$.)*

*Канонические параметры таковы*:

$$a_0 = \Big(a \int_0^{1/a} \frac{d\tau}{\rho}\Big)^{-1}, \quad \textit{где} \;\; \rho \;\; \textit{из} \;\; (1.43);$$

$$p_0(\tau) = p(a\Phi(\tau/a_0)), \quad \tau \in [0,1), \;\; \textit{здесь} \;\; \Phi = \eta^{-1}, \;\; \textit{а} \;\; \eta(\vartheta) \;\; \textit{из} \;\; \textit{(1.45)};$$

$$M(\hat{\vartheta}) = a_0 \frac{a + M_2(\Phi(\hat{\vartheta}))}{\rho(\Phi(\hat{\vartheta}))} - a_0, \quad \hat{\vartheta} \in [1, 1/a_0).$$

Доказательство. Очевидно, что всевозможные 1-периодические образцы $p_0$, посредством которых можно представить конкретную фазопериодическую функцию $f = p(a,b)$ или описать класс $Q_4(p_0, a_0, M_1^*, M_2^*) \equiv Q_4(p, a, M_1, M_2)$, выражаются через уже имеющийся образец $p$ при помощи суперпозиции

$$p_0(a_0\eta) \doteq p(a\Phi(\eta)), \tag{1.38}$$

где $\Phi$ — произвольная строго монотонная непрерывно дифференцируемая функция $\Phi:\; [z, z+1/a_0] \to [0, 1/a]$, а $z$ — некоторое смещение по фазе.

Положим далее $z = 0$ и распорядимся функцией $\Phi$ так, чтобы для каждой суперфазы $\eta \in [0, 1/a_0)$ имело место

$$\inf_{b_0} I(\eta, b_0) = \frac{-a_0 M(\eta)}{a_0 + M(\eta)}, \quad M(\eta) \doteq \sup_{b_0} S(\eta, b_0), \tag{1.39}$$

где фазовое возмущение $b_0$ и номинальная частота $a_0$ связаны с исходными так: $p(at+b(t)) = p_0(a_0t+b_0(t))$; $I, S$ см. (1.23). Соотношение (1.39) означает, что $Q_4(p,a,M_1,M_2) = Q(p_0,a_0,M^*)$.

Из связи $p(a\vartheta) = p(a\Phi(\eta))$ имеем

$$\dot\eta = \dot\vartheta/\Phi'(\eta) = \dot\vartheta/\Phi'(\Phi^{-1}(\vartheta)). \tag{1.40}$$

Введем обозначение

$$\rho(\vartheta) \doteq \Phi'(\Phi^{-1}(\vartheta))a. \tag{1.41}$$

Тогда из (1.40), (1.41) и свойств производной суперфазы $\vartheta$

$$(a-M_1(\vartheta))/\rho(\vartheta) \le \dot\eta(\tau) \le (a+M_2(\vartheta))/\rho(\vartheta) \;\; \forall\,\vartheta\in[0,1/a), \;\; \forall\,\tau\in A_\vartheta.$$

Поскольку $\dot\eta(t) = 1+\dot b_0(t)/a_0$, справедливо

$$\check\mu \doteq a_0(a-M_1(\vartheta))/\rho(\vartheta) - a_0 \le \dot b_0(\tau) \le$$

$$\le a_0(a+M_2(\vartheta))/\rho(\vartheta) - a_0 \doteq \hat\mu \quad \forall\,\vartheta\in[0,1/a), \quad \forall\,\tau\in A_\vartheta. \tag{1.42}$$

Поскольку на суперфазе $\vartheta$ правая часть (1.42) является точной верхней оценкой для всех $b_0$, соответствующих классу $Q$ ($\Rightarrow \check\mu = M$ из (1.39)), а левая часть — точной нижней, между ними должна быть связь $\hat\mu = \dfrac{-a_0\check\mu}{a_0+\check\mu}$. Объединяя это с обозначениями в (1.42) и сокращая на $a_0$, имеем

$$\frac{a+M_2(\vartheta)}{\rho(\vartheta)} - 1 = \frac{a_0 - a_0(a-M_1(\vartheta))/\rho(\vartheta)}{a_0(a-M_1(\vartheta))/\rho(\vartheta)} = \frac{\rho(\vartheta)}{a-M_1(\vartheta)} - 1.$$

Отюда следует, что

$$\rho(\vartheta) = \sqrt{(a-M_1(\vartheta))(a+M_2(\vartheta))}. \tag{1.43}$$

Из (1.40), (1.41) имеем зависимость на $[0,1/a)$:

$$\mathrm{d}\eta/\,\mathrm{d}\vartheta = a/\rho(\vartheta). \tag{1.44}$$

Интегрируя (1.44) с начальным условием $\eta(0)=0$, получаем

$$\eta(\vartheta) = a\int\limits_0^\vartheta \frac{\mathrm{d}\tau}{\rho(\tau)}, \qquad \vartheta\in[0,1/a). \tag{1.45}$$

Согласно условию теоремы $\rho$ измеримо. В силу аксиомы (1.37) $\sup M_1 < a$ и $a > 0$. Поэтому выражение под знаком радикала в (1.41) положительно и $\rho(\vartheta) \geq \mathrm{const} > a - \sup M_1 > 0 \quad \forall\ \vartheta$. Следовательно, $1/\rho$ измеримо и (1.45) определяет функцию $\eta$: $[0, 1/a) \to [0, 1/a_0)$, где $a_0$ — то число, которое надо назначить новой номинальной частотой.

По построению обратная функция к $\eta$ есть $\Phi$ и $\Phi^{-1}(1/a) = \eta(1/a) = 1/a_0$. Отсюда

$$\frac{1}{a_0} = \eta\left(\frac{1}{a}\right) = a\int\limits_0^{1/a} \frac{\mathrm{d}\tau}{\rho(\tau)}. \tag{1.46}$$

Обращая (1.46) относительно $a_0$, получаем новый период.

Поскольку $\eta'(\vartheta) = a/\rho(\vartheta)$ ограничена снизу положительной константой $c_1 = a/(a + \sup M_2)$ и сверху константой $c_1 = a/(a - \sup M_1)$, всегда существует обратная к $\eta$ строго возрастающая функция $\Phi$, производная которой лежит в пределах от $1/c_2$ до $1/c_1$. Из формулы (1.38) определится

$$p_0(\tau) = p(a\,\Phi(\tau/a_0)). \tag{1.47}$$

Из непрерывной дифференцируемости $p$ и $\Phi$ следует непрерывная дифференцируемость $p_0$. Осталось получить функцию $M$.

Выберем из класса $Q(p, a, M_1, M_2)$ конкретного представителя $p(a, b)$ таким, что $S(\vartheta, b) = M_2(\vartheta) \wedge I(\vartheta, b) = -M_1(\vartheta)$.

Скорость изменения суперфазы $\vartheta$ этого представителя есть $1 + \dot{b}(t)/a$ и с помощью (1.44) скорость изменения его канонической суперфазы

$$\dot{\eta}(t) = [\,a/\rho\,(\vartheta(t))]\,(1 + \dot{b}\,(t)/a) = (a + \dot{b}\,(t))/\rho\,(\vartheta\,(t)).$$

С другой стороны, $\dot{\eta}(t) = 1 + \dot{b}_0(t)/a_0$, и в результате

$$a_0 + \dot{b}_0(t) = a_0(a + \dot{b}(t))/\rho(\vartheta(t)). \tag{1.48}$$

Последнее совместно с соответствующими начальными данными может служить для вычисления функции $b_0$, но здесь оно используется для оценок. Найдем супремум и инфимум от обеих частей равенства (1.48) по множеству точек, аналогичных $t$:

$$a_0 + S(\eta(\vartheta), b_0) = a_0\frac{a + S(\vartheta, b)}{\rho(\vartheta)} = a_0\sqrt{\frac{a + M_2(\vartheta)}{a - M_1(\vartheta)}}, \tag{1.49}$$

$$a_0 + I(\eta(\vartheta), b_0) = a_0 \frac{a + I(\vartheta, b)}{\rho(\vartheta)} = a_0 \sqrt{\frac{a - M_1(\vartheta)}{a + M_2(\vartheta)}}. \qquad (1.50)$$

Обозначая $S(\eta, b)$ через $M(\eta)$ и перемножая (1.49) с (1.50), имеем $(a_0 + M(\eta))(a_0 + I(\eta, b_0)) = a_0^2$. Отсюда

$$I(\eta, b_0) = \frac{a_0^2}{a_0 + M(\eta)} - a_0 = \frac{-a_0 M(\eta)}{a_0 + M(\eta)}.$$

Меняя представителей, дадим пробежать $\eta$ по интервалу $[0, 1/a_0)$. Получится аксиома (1.35). (Новое $M_2$ есть $M$, новое $M_1$ есть $-I$.)

Из (1.49) и (1.43) найдем $M(\eta(\vartheta)) = a_0\rho(\vartheta)/(a - M_1(\vartheta)) - a_0$. Используя функцию $\Phi$, получаем анонсированное в формулировке теоремы.

И, наконец, единственность. Она есть следствие единственности решения задачи Коши (1.44), $\eta(0) = 0$, и того, что условие (1.43) согласно построению необходимо для $Q(p_0, a_0, M) = Q_4(p, a, M_1, M_2)$.

**Теорема 1.7.** *Для канонических параметров* $M(\eta)$ *и* $a_0$ *их отношение минимально для каждой суперфазы* $\eta$, *т. е.*

$$M(\eta(\vartheta))/a_0 \le \max\bigl(dev(a^*, M_1^*(\eta^*(\vartheta)), dev(a^*, M_2^*(\eta^*(\vartheta))\bigr) \ \forall\, \vartheta \in [0, 1/a)$$

*для всех четверок* $(p^*, a^*, M_1^*, M_2^*)$, *таких, что* $Q_4(p^*, a^*, M_1^*, M_2^*) = Q_4(p, a, M_1, M_2)$ *(в том числе и когда* $M_1^* = aM_2^*/(a_0 + M_2^*)$*). Здесь функция* $\eta$ *выражает суперфазу канонического образца через суперфазу исходного, а функция* $\eta^*$ *— суперфазу для* $p^*$ *тоже через суперфазу исходного образца, причем суперфазы* $\eta(\vartheta)$ *и* $\eta^*(\vartheta)$ *аналогичны.*

Доказательство. Условие (1.43) было получено из равенства $\sup_{b_0} S(\vartheta, b_0)$ правой части (1.42), равенства $\inf_{b_0} I(\vartheta, b_0)$ левой части (1.42) (см. (1.23)) и связи $\hat{\mu} = \dfrac{-a_0\check{\mu}}{a_0 + \check{\mu}}$. Выясним теперь, для каких $\rho^*(\vartheta)$ (а только выбором функции $\rho^*$ мы и можем распоряжаться при переходе от одного описания класса к другому) новые границы девиаций

$$\hat{\mu}^*(\eta^*(\vartheta)) = \frac{a^*(a + M_2(\vartheta))}{\rho^*(\vartheta)} - a^*, \quad \check{\mu}^*(\eta^*(\vartheta)) = \frac{a^*(a - M_1(\vartheta))}{\rho^*(\vartheta)} - a^*$$

наибольшим образом стеснили бы девиации частотного возмущения $\dot{b}(\vartheta)$, т. е.

$$\max\bigl(\mathrm{dev}(a^*, \hat{\mu}^*(\vartheta)), \mathrm{dev}(a^*, \check{\mu}^*(\vartheta))\bigr) \longrightarrow \min_{\rho^*(\vartheta)}.$$

Возможны лишь три варианта зависимости этого максимума от $\rho$. Если $\hat{\mu}^*(\vartheta) > \check{\mu}^*(\vartheta) > 0$, то, увеличивая $\rho^*(\vartheta)$, можно уменьшить (девиации тогда суть $(a+M_2)/\rho^* - 1$ и $(a-M_1)/\rho^* - 1$) оба аргумента максимума. Если $0 > \hat{\mu}^*(\vartheta) > \check{\mu}^*(\vartheta)$, то уменьшая $\rho^*(\vartheta)$, можно уменьшить (девиации тогда суть $a^*\rho^*/(a+M_2) - a^*$ и $a^*\rho^*/(a-M_1) - a^*$) оба аргумента максимума. Если $\hat{\mu}^*(\vartheta) > 0 > \check{\mu}^*(\vartheta)$, то рост величины $\rho^*(\vartheta)$ уменьшает первый аргумент максимума и увеличивает второй. Следовательно, $\min_{\rho^*}$ достигается при их равенстве: $(a+M_2)/\rho* = \rho*/(a-M_1)$. Отсюда опять возникает условие (1.43), из которого получены канонические параметры.
■

Определение 1.5. Назовем *минимальным Q-покрытием* конкретной фазопериодической функции $f$, принадлежащей одному из классов $K_3$, $K$, $K_4$, $Q_3$, $Q$, $Q_4$ (*KQ-классы*), содержащий ее класс $Q(p,a,M)$, такой, что предельная девиация фазовой частоты $M(\vartheta)/a$ для каждой суперфазы $\vartheta$ в нем не более, чем в других KQ-классах, содержащих $f$. ■

Из конструктивного доказательства теоремы 1.6 легко извлечь аналог алгоритму 1.

**Алгоритм 2** построения минимального Q-разложения фазопериодической функции.

*Вход*: фазопериодическое разложение функции вида

$$f(t) = p(at + b(t)), \quad f \in C, \quad C = \{K, K_4, Q, Q_4\}.$$

(Параметры классов, ограничивающие скорость фазовой функции, и частотные возмущения не используются.)

*Выход*: 1) Минимальное Q-разложение функции $f$, т. е. 1-периодический образец $p_0$, номинальная частота $a_0$ и фазовое возмущение $b_0$, такие, что $f(t) = p_0(a_0 t + b_0(t))$ и $Q(p_0, a_0, S(\cdot, b_0))$ является минимальным Q-покрытием функции $f$ ($S$ — см. (1.23)).
2) Третий параметр минимального Q-покрытия.

§1. Найти пределы изменения скоростей фазы в C-разложении функции $f$ для всех суперфаз:

$$M_1(\vartheta) = -I(\vartheta, b), \quad M_2(\vartheta) = S(\vartheta, b) \ (I, S - \text{см. } (1.23));$$

$$N_1(\vartheta) = a - M_1(\vartheta), \qquad N_2(\vartheta) = a + M_2(\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, 1/a).$$

§2. $\rho(\vartheta) = \sqrt{N_1(\vartheta) N_2(\vartheta)}$.

§3. Найти функцию $\Phi = \eta^{-1}$, где

$$\eta(\vartheta) = a \int\limits_0^{\vartheta} \frac{\mathrm{d}\tau}{\rho(\tau)}, \qquad \vartheta \in [0, 1/a).$$

§4. Вычислить номинальную частоту:

$$a_0 = \left( a \int\limits_0^{1/a} \frac{\mathrm{d}\tau}{\rho(\tau)} \right)^{-1}.$$

§5. Определить фазовое возмущение:

$$b_0(t) = (a - a_0)t + b(t).$$

§6. Задать канонический образец:

$$p_0(\tau) = p(a_0 \Phi(\tau/a_0)), \quad \tau \in [0, 1/a_0).$$

§7. Вычислить недостающий параметр минимального Q-покрытия:

$$M^0(\eta) = \frac{a_0 \rho(\Phi(\eta))}{a - M1(\Phi(\eta))} - a_0. \qquad \blacksquare$$

Каноническое разложение некоторой фазопериодической функции $f$ возможно построить вообще без опоры на какой либо периодический образец, и тогда, разумеется, без соответствующей образцу номинальной частоты. Нужен только сам факт $\Xi$ — принадлежности одному из классов $K$, $K_4$, $Q$, $Q_4$.

*Замечание.* Условия $f \in F(p)$ не достаточно для реализации $\Xi$ даже при условиях $f, p \in C^1$: а) производная фазовой функции может иметь разрыв в экстремальных для $f$ моментах; б) для какого-либо момента $t_0$ и аналогичных моментов $t_i$ либо $\sup_i \overline{\lim}_t \theta(t_0 + t)/\theta(t_i + t) = +\infty$, либо $\inf_i \underline{\lim}_t \theta(t_0 + t)/\theta(t_i + t) = 0$. При указанных особенностях не существует параметров для реализации $\Xi$.

**Алгоритм 3** построения минимального Q-разложения функции $f$, про которую известно $\Xi$. (Параметры классов не используются.)

Пусть известен местный период $T_0$ в некоторый момент $t_0$. Вычислим функции:

$$S_f(\theta) \doteq \sup_{\tau \in A(t)} \dot{f}(\tau), \quad I_f(\theta) \doteq \inf_{\tau \in A(t)} \dot{f}(\tau), \quad \theta = t/T_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T).$$

Очевидно, $(\forall\,\theta)\operatorname{sgn} S_f(\theta) = \operatorname{sgn} I_f(\theta)$.

Отметим, что в качестве периодического образца нельзя использовать часть функции $f$ на интервале $[t_0, t_0{+}T_0)$, ибо ее периодическое расширение на всю действительную ось может иметь разрывы производной в моменты $t \equiv t_0 (\operatorname{mod} T_0)$.

Тем не менее, в силу $\Xi$ непрерывно дифференцируемые периодический образец $p$ и фазовое возмущение $b$ для функции $f$ существуют и должны при некотором $a$ удовлетворять уравнению

$$\dot f(t) = p'(at + b(t))(a + \dot b(t)),$$

откуда следует, что верхней границей производной фазового возмущения является при положительном значении $S_f$

$$M_2(\theta) = \frac{S_f(at + b(t)(\operatorname{mod} 1))}{p'(at + b(t))} - a, \tag{1.51}$$

а нижней границей с обратным знаком — величина

$$M_1(\theta) = a - \frac{I_f(at + b(t)(\operatorname{mod} 1))}{p'(at + b(t))}. \tag{1.52}$$

При отрицательных значениях $S_f$ в (1.51) следует заменить $S$ на $I$, а в (1.52) — наоборот.

Для канонического разложения должно выполняться $M_1 = aM_2/(a + M_2)$, что совместно с (1.51) и (1.52) (значение $S_f$ положительно) дает

$$a - \frac{I_f(\theta)}{p'(\theta)} = \frac{aS_f(\theta)/p'(\theta) - a^2}{S_f(\theta)/p'(\theta)} = a - \frac{a^2 p'(\theta)}{S_f(\theta)}.$$

Отсюда

$$(p'(\theta)a)^2 = I_f(\theta)S_f(\theta). \tag{1.53}$$

Когда значение $S_f$ отрицательно, аналогичным путем опять приходим к (1.53). Поскольку частота всегда положительна, из (1.53) получаем

$$p'(\theta) = \frac{1}{a}\sqrt{I_f(\theta)S_f(\theta)}\operatorname{sgn} S_f(\theta).$$

И

$$p(\theta) = p(0) + \frac{1}{a}\int_0^\theta \sqrt{I_f(\tau)S_f(\tau)}\operatorname{sgn} S_f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \theta \in [0, 1).$$

Положим $p(0) = f(0)$, а частоту $a$ определим из уравнения

$$\max_{\eta\in[0,T)} f(\tau) = f(0) + \frac{1}{a}\max_{\eta\in[0,T)} \int_0^\eta \sqrt{I_f(\tau)S_f(\tau)}\,\mathrm{sgn}\, S_f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

если максимум в правой части не ноль, иначе используем уравнение, где вместо максимумов стоят минимумы. (Если $\max = \min$, то $f = \mathrm{const}$.)

Фазовое возмущение $b$ легко найти, когда $f$ не имеет участков постоянства и функция $p$ имеет конечное число $m$ участков монотонности $\{\Theta_i = [\theta_i, \theta_i + \Delta_i]\}_0^{m-1}$, $\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta_i$. конечно. На каждом из них $p$ имеет однозначную обратную $\bar{q}_i$. Положим $q_i = \bar{q}_i - \theta_i$.

Пронумеруем участки монотонности $f$ по порядку: $\{E_k = [e_k, e_k + \delta_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $e_{k+1} = e_k + \delta_k$. Пусть $E_0$ аналогичен $A^{\Theta_0}$, т. е. $(\forall\, t \in E_0)(\exists\, \theta \in \Theta_0)$, $t \in A^\theta$. Тогда, если $i(k) \equiv k (\mathrm{mod}\, m)$, то $E_k$ аналогичен $A^{\Theta_{i(k)}}$.

Определим вначале значения фазового возмущения в экстремальные моменты функции $f$. В выборе $b(e_0)$ есть свобода. Назначим его нулем. По построению концам сегмента $E_k$ соответствуют концы сегмента $\Theta_{i(k)}$. Отсюда

$$\Delta_{i(k)} = ae_{k+1} + b(e_{k+1}) - ae_k - b(e_k).$$

Следовательно,

$$b(e_{k+1}) = b(e_k) + a(e_k - e_{k+1}) + \Delta_{i(k)}, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$b(e_k) = b(e_{k+1}) - a(e_k - e_{k+1}) - \Delta_{i(k)}, \quad k = -1, -2, ...$$

И

$$(\forall\, t \in E_k) \quad b(t) = q_i(f(t)) + b(e_k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Построенные по алгоритму параметры удовлетворяют тем же условиям, что и каноническое разложение. Поэтому если последнее существует, т. е. имеет место $\Xi$, то в силу единственности разложения оно и получено. Если нет $\Xi$, то $p'$ может оказаться неограниченной, а $\dot{b}$ — разрывной. ∎

И, наконец, вернемся к задаче 1 (программа (1.19)). Алгоритм 2 предназначен для получения минимального Q-разложения фазопериодической функции $f$. Оно же является и одним из минимальных K-разложений. Так как K-минимальное покрытие $K(p, a, \bar{M})$ содержит Q-минимальное $Q(p, a, M(\cdot))$, должно быть $\bar{M} = \sup M(\vartheta)$. Там, где $M(\vartheta) \neq \bar{M}$, возможно другое задание образца для класса $K$.

# Указатель литературы


[1]

[2] *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.;Л.: ОГИЗ, 1941. 320 с.

[3] *Булгаков Б.В.* Колебания. М.: ГТТИ, 1949. 892 с.

[4] *Вавилов А.А.* Частотные методы расчета нелинейных систем. Л.: Энергия, 1970. 324 с.

[5]

[6] *Воронов А.А.* Основы теории автоматического регулирования. М.: Энергия, 1980. 309 с.

[7] *Гелиг А.Х., Якубович В.А., Леонов Г.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

[8]

[9] *Евстафьева В.В., Камачкин А.М.* Динамика системы управления с неоднозначными нелинейностями при наличии внешнего воздействия // Анализ и управление нелинейными колебательными системами. СПб.: ИПМ РАН, Наука, 1998. С. 37—54.

[10]

[11] *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 631 с.

[12] *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 319 с.

[13]

[14] *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.

[15] *Зубов В.И.* Колебания и волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. 416 с.

[16]

[17] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.

[18]

[19] *Левитан Б.М., Жиков И.И.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 204 с.

[20] *Леонов Г.А.* Частотный критерий стабилизации нелинейных систем гармоническим внешним воздействием // Автоматика и телемеханика. 1986. № 1. С. 169—174.

[21] *Леонов Г.А.* Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1992. 366 с.

[22] *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Изд-во технико-теорет. лит, 1955. 312 с.

[23] *Лурье А.И.* Об автоколебаниях в некоторых регулируемых системах // Автоматика и телемеханика. 1947. № 5. С. 335—348.

[24] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. 216 с.

[25] Математическая теория систем / Под ред. М. А. Красносельского. М.: Наука, 1986. 165 с.

[26] *Михеев С.Е.* Нелинейные методы в оптимизации. СПб.: Изд-во Ленингр. ун-та, 2001. 276 с.

[27] *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Политехника, 1990. 320 с.

[28] *Сибирский К.С., Шубэ А.С.* Полудинамические системы. Кишинев: Штиинца, 1987. 270 с.

[29] *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.

[30] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

[31]

[32] *Шилов Г.Е.* Математический анализ (специальный курс). М.: ГИ ФМЛ, 1961. 436 с.

### §1.3. Introduction