САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Медведева Ирина Васильевна

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

05.13.01 — системный анализ, управление и обработка информации
(по прикладной математике и процессам управления)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:	заслуженный работник высшей школы РФ, заведующий кафедрой теории управления, доктор физико-математических наук, профессор Жабко Алексей Петрович
Официальные оппоненты:	доктор технических наук, профессор Бобцов Алексей Алексеевич, заведующий кафедрой систем управления и информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»
	доктор физико-математических наук, доцент Провоторов Вячеслав Васильевич, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Защита состоится 25 марта 2015 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.50 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35, ауд. 327.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах просим направлять по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.232.50 Г. И. Курбатовой.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9. Автореферат и диссертация размещены на сайте www.spbu.ru.

Автореферат разослан «____» февраля 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Г. И. Курбатова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Системы с запаздыванием естественно возникают при построении математических моделей в технике, биологии, химии, медицине, экономике, экологии и других областях знания: для получения адекватной модели часто необходимо учитывать тот факт, что скорость процесса зависит не только от текущего, но и от прошлых состояний системы. В системах автоматического регулирования запаздывание появляется в канале обратной связи. Иногда оно намеренно вводится в управление с целью стабилизировать систему или создать более простой с точки зрения конструирования регулятор. Так или иначе, анализ устойчивости систем с запаздыванием является одной из важнейших задач современной теории управления.

Диссертационная работа посвящена анализу экспоненциальной устойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа. Два основных подхода к анализу устойчивости — применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений — были разработаны еще А. М. Ляпуновым в конце XIX века и известны как первый и второй (прямой) методы Ляпунова. Обобщения этих подходов применяются к исследованию устойчивости систем с запаздыванием.

Первый метод Ляпунова для линейных систем с запаздыванием развивается в работах В. И. Зубова, R. Bellman. Второй метод Ляпунова допускает два обобщения на системы с запаздыванием. Первое из них было предложено Н. Н. Красовским в 1956 году. В нем в качестве аналога классических функций Ляпунова используются функционалы, называемые функционалами Ляпунова – Красовского. Их аргументом является состояние системы с запаздыванием — сегмент ее решения на отрезке, равном по длине наибольшему запаздыванию. Метод функционалов Ляпунова – Красовского дает критерий экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем — существование положительно-определенного функционала, имеющего отрицательно-определенную производную вдоль решений системы. Второе обобщение прямого метода Ляпунова на системы с запаздыванием, также предложенное в 1956 году, принадлежит Б. С. Разумихину. В нем для анализа устойчивости используются функции Ляпунова, а отрицательная определенность их производных проверяется только на множестве функций, удовлетворяющих специальному ограничению — условию Разумихина.

Структура и явный вид функционалов, пригодных для анализа устойчивости в рамках метода функционалов Ляпунова – Красовского, а также вопросы их существования исследовались в работах Н. Н. Красовского, Ю. М. Репина, R. Datko, E. F. Infante, W. B. Castellan, W. Huang, В. Л. Харитонова и А. П. Жабко. В результате сформировалась теория функционалов с заданной производной: построены положительно-определенные — в случае экспоненциальной устойчивости системы — квадратичные функционалы, имеющие отрицательно-определенную производную вдоль решений системы. Ключевым элементом, определяющим эти функционалы, является специальная функциональная матрица, называемая матрицей Ляпунова. Проблема применения построенных функционалов на практике заключается в отсутствии конструктивных способов проверки их положительной определенности.

Более того, эффективное использование функционалов в приложениях предполагает существование для них квадратичных оценок снизу. При этом для функционала, полученного в работе W. Huang, существует только локальная кубическая оценка снизу. В работе В. Л. Харитонова и А. П. Жабко построен так называемый функционал полного типа, допускающий квадратичную оценку снизу в случае экспоненциальной устойчивости системы. Этот функционал может быть эффективно использован для построения экспоненциальных оценок решений, для анализа робастной устойчивости, т. е. анализа устойчивости систем, матрицы которых содержат неопределенные параметры, а также для нахождения критических параметров систем. Тем не менее, разработка конструктивных способов построения квадратичных оценок снизу остается актуальной задачей даже для функционалов полного типа.

Кроме того, по-прежнему актуальна проблема вычисления матрицы Ляпунова, определяющей функционалы с заданной производной. По определению матрица Ляпунова является решением специальной системы уравнений, состоящей из дифференциально-разностного уравнения, некоторого условия симметрии и граничного условия. Однако алгоритм решения этой системы известен только в частном случае — для систем с кратными запаздываниями. А значит, в общем случае любые условия устойчивости, основанные на функционалах с заданной производной, не конструктивны.

Целью диссертации является развитие методов анализа экспоненциальной устойчивости и неустойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа. В работе предлагаются новые конструктивные способы построения квадратичных оценок снизу для функционалов Ляпунова – Красовского. В ходе исследования ставятся и решаются следующие **задачи**:

- разработка системного подхода к анализу динамических систем, описываемых линейными стационарными дифференциально-разностными уравнениями;
- формулировка и доказательство конструктивных критериев экспоненциальной устойчивости и неустойчивости линейных стационарных систем с несколькими, быть может, несоизмеримыми запаздываниями;
- разработка конструктивных методов анализа экспоненциальной устойчивости и неустойчивости систем рассматриваемого класса и их программная реализация;
- построение конструктивных алгоритмов оценки критических параметров (в том числе критических запаздываний, запаса устойчивости) линейных стационарных дифференциально-разностных систем с неопределенными параметрами.

Методы исследования. Для решения поставленных задач в работе используются классические и современные методы теории устойчивости систем с запаздыванием, теории управления, алгебры и математического анализа. Основные результаты работы основаны на комбинации метода функционалов Ляпунова – Красовского и метода Разумихина: квадратичные оценки снизу для функционалов Ляпунова – Красовского строятся на специальном множестве функций вместо множества решений системы.

Научная новизна. Критерии экспоненциальной устойчивости и неустойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием, выраженные в терминах существования для функционалов Ляпунова – Красовского квадратичных оценок на множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина, а также все полученные в ходе решения поставленных в диссертации задач методы и алгоритмы являются новыми.

Теоретическая значимость работы состоит в развитии конструктивных методов анализа положительной определенности квадратичных функционалов Ляпунова – Красовского.

Практическая значимость. Разработанные в диссертации методы могут быть применены в теории автоматического регулирования — к оценке областей экспоненциальной устойчивости и неустойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем в пространстве параметров, к оценке критических параметров таких систем, а также в задачах анализа и синтеза систем управления.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ, а также на девяти научных конференциях: XLI, XLII, XLIII, XLV международные научные конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» факультета ПМ–ПУ СПбГУ (Санкт-Петербург, 2010–2012, 2014), Всероссийская конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 80-летию со дня рождения В. И. Зубова (Санкт-Петербург, 2010), "11th IFAC Workshop on Time-Delay Systems" (Grenoble, France, 2013), «Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014)» (Москва, ИПУ РАН, 2014), "2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA)" (Санкт-Петербург, 2014), VII международная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014)» (Воронеж, 2014).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в одиннадцати печатных работах, три из которых являются статьями в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Перечень публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 81 наименование, и трех приложений. Общий объем составляет 150 страниц машинописного текста, работа содержит 10 рисунков и 3 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, представлен обзор литературы, посвященной приложениям линейных систем с запаздыванием, а также вопросам, связанным с анализом устойчивости таких систем, отражено краткое содержание работы.

Первая глава работы носит вспомогательный характер. В параграфе 1.1 вводится объект исследования — линейная стационарная дифференциальноразностная система уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j), \tag{1}$$

здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, — заданные постоянные матрицы, $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$ — постоянные запаздывания, упорядоченные по возрастанию. Начальный момент времени считается нулевым, начальная функция φ — кусочно-непрерывной вектор-функцией, определенной на отрезке $[-h, 0]$, что обозначается далее через $\varphi \in PC\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$. Состояние системы представляет собой сегмент ее решения $x_t\colon\ \theta \to x(t+\theta),\ \theta \in [-h, 0]$. Ставится задача анализа экспоненциальной устойчивости системы (1).

Характеристическим уравнением системы (1) называется уравнение

$$\det\left(\lambda E - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-\lambda h_j}\right) = 0,$$

здесь E — единичная матрица; корни этого уравнения называются собственными числами системы. Известен критерий экспоненциальной устойчивости системы (1) — отрицательность вещественных частей всех ее собственных чисел. Говорят, что система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если она не имеет собственного числа λ такого, что $-\lambda$ также является ее собственным числом.

Параграф 1.2 посвящен изложению метода функционалов Ляпунова – Красовского. В нем вводятся функционалы с заданной производной, которые используются далее в диссертации. Известно[1], что функционал, по построению удовлетворяющий соотношению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^T(t) W x(t), \quad t \geqslant 0,$$

вдоль решений системы (1), имеет вид

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_j}^{0} U(-\theta - h_j)A_j\varphi(\theta)d\theta + \\ + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_k}^{0}\varphi^T(\theta_1)A_k^T\left(\int_{-h_j}^{0} U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j\varphi(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142. P. 83–94.

Здесь $U(\tau)$ — матрица Ляпунова системы (1), ассоциированная с симметрической положительно-определенной матрицей W. По определению матрица Ляпунова является решением системы уравнений

$$U'(\tau) = \sum_{j=0}^{m} U(\tau - h_j)A_j,\ \tau \geqslant 0,$$
$$U(-\tau) = U^T(\tau),\ \tau \geqslant 0,$$
$$\sum_{j=0}^{m} \Big[U(-h_j)A_j + A_j^T U(h_j)\Big] = -W.$$

Условием существования функционала (2) для произвольной симметрической матрицы W является условие Ляпунова. В случае экспоненциальной устойчивости системы (1) функционал (2) положительно определен, однако для него не существует квадратичной оценки снизу вида $v_0(\varphi) \geqslant \mu\|\varphi(0)\|^2$, $\mu > 0$. Такую оценку допускает введенный позже[2] функционал полного типа

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{m} \int_{-h_j}^{0} \varphi^T(\theta)\big[W_j + (h_j + \theta)W_{m+j}\big]\varphi(\theta)d\theta. \qquad (3)$$

Здесь симметрические матрицы $W_0, \ldots, W_{2m}$ положительно определены, а матрица Ляпунова, определяющая функционал v_0, ассоциирована с матрицей

$$W = W_0 + \sum_{j=1}^{m} \big[W_j + h_j W_{m+j}\big].$$

Вдоль решений системы (1) выполняется соотношение $\dfrac{dv(x_t)}{dt} = -w(x_t)$, где

$$w(\varphi) = \varphi^T(0)W_0\varphi(0) + \sum_{j=1}^{m} \varphi^T(-h_j)W_j\varphi(-h_j) + \sum_{j=1}^{m} \int_{-h_j}^{0} \varphi^T(\theta)W_{m+j}\varphi(\theta)d\theta.$$

В параграфе 1.3 описан метод Разумихина, в котором для анализа экспоненциальной устойчивости системы (1) используются положительно-определенные функции Ляпунова, имеющие отрицательно-определенную — на некотором специальном множестве функций — производную вдоль решений системы (1).

Вторая глава содержит основные теоретические результаты диссертации. В ней предложен новый подход к анализу экспоненциальной устойчиво-

[2] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15–20.

сти и неустойчивости системы (1), основанный на синтезе методов Ляпунова – Красовского и Разумихина. В параграфе 2.1 получены вспомогательные утверждения, касающиеся функционалов с заданной производной.

Параграф 2.2 посвящен формулировке и доказательству нового критерия экспоненциальной устойчивости системы (1), выраженного в терминах существования для функционала (2) квадратичной оценки снизу на множестве

$$S = \Big\{\varphi \in PC\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big) \;\Big|\; \|\varphi(\theta)\| \leqslant \|\varphi(0)\|, \; \theta \in [-h, 0]\Big\}:$$

Теорема 1. *Зададим положительно-определенную матрицу W. Система* (1) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существует непрерывный в нуле функционал $v_0(\varphi)$ ($v_0(0_h) = 0$), удовлетворяющий условиям:*

1. $\dfrac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^T(t)Wx(t)$ *вдоль решений системы* (1);
2. *существует $\mu > 0$ такое, что $v_0(\varphi) \geqslant \mu\|\varphi(0)\|^2$ на функциях $\varphi \in S$.*

Замечание. Здесь и далее 0_h — нулевая функция: $0_h(\theta) = \mathbf{0}, \; \theta \in [-h, 0]$.

Таким образом, в случае экспоненциальной устойчивости системы (1) функционал v_0 допускает квадратичную оценку снизу на множестве S, хотя для него не существует такой оценки на множестве всех кусочно-непрерывных функций. В параграфе 2.3 доказан критерий неустойчивости:

Теорема 2. *Зададим положительно-определенную матрицу W и предположим, что система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова. Система* (1) *неустойчива тогда и только тогда, когда существует непрерывный в нуле функционал $v_0(\varphi)$ ($v_0(0_h) = 0$) такой, что*

1. $\dfrac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^T(t)Wx(t)$ *вдоль решений системы* (1);
2. *существует $\mu > 0$ и нетривиальная функция $\varphi \in S$ такие, что*

$$v_0(\varphi) \leqslant -\mu\|\varphi(0)\|^2.$$

В параграфе 2.4 показано, что теоремы 1 и 2 останутся верными, если множество S в них заменить множеством

$$S_k = \Big\{\varphi \in C^k([-h, 0], \mathbb{R}^n) \;\Big|\; \|\varphi^{(l)}(\theta)\| \leqslant K^l\|\varphi(0)\|, \; \theta \in [-h, 0], \; l = \overline{0, k}\Big\}$$

при любом натуральном k, здесь $K = \sum\limits_{j=0}^{m} \|A_j\|$, $\varphi^{(l)}$ обозначает l-ю производную функции φ. Такая модификация множества S позволяет далее, в главах 3 и

4, применить теоремы 1 и 2 на практике. В параграфе 2.5 доказаны аналоги теорем 1 и 2, в которых вместо функционала (2) используется функционал полного типа (3).

Третья и **четвертая главы** работы посвящены изложению конструктивных методов анализа экспоненциальной устойчивости и неустойчивости системы (1), основанных на результатах главы 2. Для того чтобы, при меньшей громоздкости формул, идея метода была лучше проиллюстрирована, в третьей главе отдельно исследовано скалярное уравнение с одним запаздыванием, а общий случай — система (1) — рассмотрен в четвертой главе. Остановимся сразу на результатах главы 4.

В параграфе 4.1 приведено описание методов. Рассмотрим равномерное разбиение каждого из отрезков $[-h_j, -h_{j-1}]$ на N_j равных частей длины Δ_j точками

$$\theta_k^{(j)} = -h_{j-1} - k\Delta_j, \quad \Delta_j = \frac{h_j - h_{j-1}}{N_j}, \quad k = \overline{0, N_j}, \quad j = \overline{1, m},$$

пусть $N = N_1 + \ldots + N_m$ — общее количество отрезков в разбиении отрезка $[-h, 0]$. Идея метода, предлагаемого в пункте 4.1.1, заключается в следующем. Рассматривается кусочно-линейное приближение произвольной вектор-функции $\varphi \in S_2$, соответствующее разбиению отрезка $[-h, 0]$. С учетом формулы Тейлора, а также ограничения, накладываемого множеством S_2 на вторую производную функции φ, оценивается погрешность такого приближения. Далее приближение подставляется в функционал (2). Получается представление функционала в виде суммы двух групп слагаемых. Первая из них — функционал, вычисленный на кусочно-линейной вектор-функции, а вторая содержит все слагаемые, зависящие от погрешности приближения. Ко второй группе слагаемых применяется оценка погрешности, в результате чего для нее получается оценка снизу вида $-\delta_l \|\varphi(0)\|^2$, где $\delta_l > 0$ — постоянная величина. В пункте 4.1.2 производятся те же действия, но рассматривается гладкое кусочно-кубическое приближение произвольной функции $\varphi \in S_4$. Результатом в обоих случаях является оценка снизу функционала (2) следующей структуры:

$$v_0(\varphi) \geqslant p^T(\Lambda_1^i - \delta_i E)p + 2p^T \Lambda_2^i \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T \Lambda_3^i \widehat{\varphi}, \quad \varphi \in S_j. \tag{4}$$

Здесь индекс i принимает значение «l» (соответствует кусочно-линейному приближению) или «q» (соответствует кусочно-кубическому приближению); $j = 2$

при $i = l$ и $j = 4$ при $i = q$. Далее, $p = \varphi(0),\ p \in \mathbb{R}^n$. Вектор $\widehat{\varphi}$ образован последовательным соединением векторов $\widehat{\varphi}_k^{(j)} = \varphi\big(\theta_k^{(j)}\big)$ по всем точкам дробления промежутка $[-h, 0]$, кроме нуля, если рассматривается кусочно-линейное приближение. Если же рассматривается кусочно-кубическое приближение, то к вектору, полученному в первом случае, добавляется другой, образованный последовательным соединением векторов $\widehat{\varphi}_{k+N_j+1}^{(j)} = \varphi'\big(\theta_k^{(j)}\big)$ по всем точкам дробления, включая нуль. В первом случае вектор $\widehat{\varphi}$ имеет размерность nN, а во втором — размерность $n(2N+1)$. Наконец, Λ_1^i, Λ_2^i и Λ_3^i — матрицы соответствующих размерностей, элементы которых представляют собой суммы элементов матричных интегралов вида

$$\int\limits_{-\Delta_k}^{0} U(-s - h_j + h_k - r\Delta_k)\, f(s, \Delta_k) ds\, A_j$$

при различных индексах k, j, r и элементов аналогичных двойных интегралов. Здесь $f(s, \Delta_k)$ — полиномы переменной s, коэффициенты которых зависят от Δ_k. Величины δ_l и δ_q получены в результате оценки группы слагаемых функционала, зависящих от погрешности приближения.

Оценка (4) приводит к следующему конструктивному достаточному условию экспоненциальной устойчивости, доказанному в работе.

Теорема 3. *Если существуют такие значения $N_1, \ldots, N_m$, что*

$$\min_{\substack{\widehat{\varphi} \in \widehat{S}^{(i)}_{N_1 \ldots N_m} \\ \|p\|=1}} \Big[p^T \Lambda_1^i p + 2p^T \Lambda_2^i \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T \Lambda_3^i \widehat{\varphi} \Big] - \delta_i > 0, \tag{5}$$

то система (1) *экспоненциально устойчива. Здесь индекс i принимает значения «l» или «q»,*

$$\begin{aligned}
\widehat{S}^{(l)}_{N_1 \ldots N_m} &= \Big\{ \widehat{\varphi} \in \mathbb{R}^{nN} \;\Big|\; \big\|\widehat{\varphi}_k^{(j)}\big\| \leqslant 1,\ k = \overline{1, N_j},\ j = \overline{1, m} \Big\}, \\
\widehat{S}^{(q)}_{N_1 \ldots N_m} &= \Big\{ \widehat{\varphi} \in \mathbb{R}^{n(2N+1)} \;\Big|\; \big\|\widehat{\varphi}_k^{(j)}\big\| \leqslant 1,\ k = \overline{1, N_j},\ j = \overline{1, m}, \\
&\qquad\qquad \big\|\widehat{\varphi}_{k+N_j+1}^{(j)}\big\| \leqslant \sum_{l=0}^{m} \|A_l\|,\ k = \overline{0, N_j},\ j = \overline{1, m} \Big\}.
\end{aligned}$$

Частный случай метода, применимый к системам с кратными запаздываниями ($h_j = j\mathfrak{h},\ j = \overline{1, m}$), описан в приложении А. В нем рассматривается равномерное разбиение промежутка $[-h, 0]$, включающее все запаздывания. В приложении Б для полноты изложения приведен известный алгоритм вычисления матрицы Ляпунова, а также кратко описана программная реализация алгоритма, проверяющего условие теоремы 3, в среде MATLAB.

В пункте 4.1.3 методы пунктов 4.1.1 и 4.1.2 применяются к анализу неустойчивости. Построена аналогичная оценке (4) оценка функционала сверху, в результате доказано конструктивное достаточное условие неустойчивости:

Теорема 4. *Если существуют такие значения* $N_1, \ldots, N_m$, *что*

$$\min_{\substack{\widehat{\varphi}\in\widehat{S}^{(i)}_{N_1\ldots N_m}\\ \|p\|=1}} \left[p^T\Lambda_1^i p + 2p^T\Lambda_2^i\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3^i\widehat{\varphi}\right] + \delta_i < 0,$$

где индекс i *принимает значения «*l*» или «*q*», то система* (1) *неустойчива.*

В пункте 4.1.4 методы пунктов 4.1.1 и 4.1.2 обобщаются на случай использования функционала полного типа.

Параграф 4.2 посвящен вопросу сходимости методов, описанных в параграфе 4.1. В нестрогом смысле под сходимостью понимается стремление границ областей в пространстве параметров, в которых выполнено условие (5), к границам точных областей экспоненциальной устойчивости при стремлении к бесконечности параметров $N_1, \ldots, N_m$. Сходимость строго сформулирована и доказана в терминах критических значений запаздывания, т. е. таких значений, при которых система теряет или приобретает свойство экспоненциальной устойчивости или неустойчивости. Сходимость методов основана на том, что величины δ_l и δ_q стремятся к нулю при $N_1 \to +\infty, \ldots, N_m \to +\infty$.

В параграфе 4.3 изложенные в параграфе 4.1 методы применяются к оценке областей экспоненциальной устойчивости конкретных систем в пространстве параметров. Примеры подтверждают эффективность предложенных алгоритмов и иллюстрируют сходимость методов. Рассмотрен пример применения методов в задаче управления — в задаче стабилизации перевернутого маятника в вертикальном положении.

В параграфе 4.4 исследована проблема оценки запаса устойчивости системы с одним запаздыванием. Запасом устойчивости экспоненциально устойчивой системы (1) называется величина $\bar{\sigma} = -\max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j > 0$, где λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ — собственные числа системы. Рассмотрим систему (1) при $m = 1$ и наряду с ней систему

$$\dot{y}(t) = (A_0 + \sigma E)y(t) + e^{\sigma h}A_1 y(t-h), \tag{6}$$

полученную из системы (1) заменой $y(t) = e^{\sigma t}x(t)$ при некотором $\sigma > 0$. Любое значение σ, при котором система (6) экспоненциально устойчива, является оценкой снизу запаса устойчивости системы (1).

Идеология решения задачи об оценке запаса устойчивости заимствована из упомянутой на с. 8 работы В. Л. Харитонова и А. П. Жабко — функционал (2) дифференцируется вдоль решений системы (6):

$$\frac{dv_0(y_t)}{dt} = -y^T(t)Wy(t) + l(y_t), \quad \text{где}$$

$$l(y_t) = 2\Big[\sigma y(t) + (e^{\sigma h} - 1)A_1 y(t-h)\Big]^T \Big[U(0)y(t) + \int\limits_{-h}^{0} U(-\theta - h)A_1 y(t+\theta)d\theta\Big],$$

здесь $U(\tau)$ — матрица Ляпунова системы (1). Ключевую роль в решении задачи играет интегральная оценка функционала $l(y_t)$:

$$\int\limits_0^t l(y_s)ds \leqslant \big(l_0 + l_1 + hl_2\big)\int\limits_0^t \|y(s)\|^2 ds \ + \ \big(l_1 + hl_2\big)\int\limits_{-h}^{0} \|\varphi(s)\|^2 ds, \quad \text{где}$$

$$l_0 = M\big(\sigma + (e^{\sigma h} - 1)\|A_1\| + \sigma\big(1 + \|A_1\|h\big)\big), \ \ l_1 = M\|A_1\|\big(1 + \|A_1\|h\big)(e^{\sigma h} - 1),$$

$$l_2 = M\|A_1\|\big(\sigma + (e^{\sigma h} - 1)\|A_1\|\big), \quad M = \max_{\tau\in[0,h]}\|U(\tau)\|.$$

Эта оценка позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть система* (1) *экспоненциально устойчива. Если*

$$l_0 + l_1 + hl_2 < \lambda_{\min}(W), \tag{7}$$

то система (6) *экспоненциально устойчива, а система* (1) *имеет запас устойчивости* $\bar\sigma \geqslant \sigma$.

Замечание. Здесь и далее $\lambda_{\min}(W)$ — минимальное собственное число симметрической матрицы W.

Теорема 5 дает возможность построить последовательность оценок запаса устойчивости, сходящуюся к точному значению запаса устойчивости системы (1). Для этого на каждом шаге нужно находить максимальное значение σ, удовлетворяющее неравенству (7), а затем выбирать систему (6) с этим значением σ в качестве исходной и повторять процедуру.

Пятая глава диссертации посвящена анализу экспоненциальной устойчивости систем с двумя несоизмеримыми запаздываниями

$$\dot x(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + A_2 x(t-h), \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Запаздывание h считается иррациональным; для определенности предполагается, что $h > 1$. В этом случае попытка непосредственно применить результаты главы 4 сталкивается с проблемой вычисления матрицы Ляпунова. Чтобы обойти возникающую проблему, наряду с системой (8) рассматривается вспомогательная система

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + A_1 y(t-1) + A_2 y(t-\hat{h}), \tag{9}$$

где $\hat{h}$ — рациональное запаздывание. Пусть $U(\tau)$ и $U_{\hat{h}}(\tau)$ — матрицы Ляпунова систем (8) и (9) соответственно, ассоциированные с $W = W_0 + W_1 + hW_2$, где W_0, W_1, W_2 — симметрические положительно-определенные матрицы. Функционал v_0, определяемый формулой (2) (при $m = 2,\ h_1 = 1,\ h_2 = h$), для удобства обозначим через $v_0(\varphi, U)$.

В параграфе 5.1 введена модификация функционала, которая основана на замене в нем матрицы Ляпунова $U(\tau)$ матрицей $U_{\hat{h}}(\tau)$: для анализа экспоненциальной устойчивости системы (8) используется функционал

$$v(\varphi, U_{\hat{h}}) = v_0(\varphi, U_{\hat{h}}) + \int\limits_{-1}^{0} (\theta+1)\,\varphi^T(\theta) W_1 \varphi(\theta) d\theta + \int\limits_{-h}^{0} (\theta+h)\,\varphi^T(\theta) W_2 \varphi(\theta) d\theta.$$

Производная функционала $v(\varphi, U_{\hat{h}})$ вдоль решений системы (8) имеет вид

$$\frac{d}{dt} v(x_t, U_{\hat{h}}) = -x^T(t) W_0 x(t) - \int\limits_{-1}^{0} x^T(t+\theta) W_1 x(t+\theta) d\theta -$$

$$- \int\limits_{-h}^{0} x^T(t+\theta) W_2 x(t+\theta) d\theta + x^T(t) \left[A_2^T \Delta U_{\hat{h}}(0) + \left(\Delta U_{\hat{h}}(0) \right)^T A_2 \right] x(t) +$$

$$+ 2x^T(t) A_2^T \int\limits_{-1}^{0} \Delta U_{\hat{h}}(\theta+1) A_1 x(t+\theta) d\theta + 2x^T(t) A_2^T \int\limits_{-h}^{0} \Delta U_{\hat{h}}(\theta+h) A_2 x(t+\theta) d\theta,$$

здесь $\Delta U_{\hat{h}}(\tau) = U_{\hat{h}}(h-\tau) - U_{\hat{h}}(\hat{h}-\tau)$, $\tau \in [0, h]$; доказательство этого утверждения вынесено в приложение В. Считаются выполненными следующие основные предположения:

Предположение 1. Система (9) удовлетворяет условию Ляпунова.

Предположение 2. Справедливы неравенства:

$$\xi_0 M < \lambda_{\min}(W_0), \quad \xi_1 M \leqslant \lambda_{\min}(W_1), \quad \xi_2 M \leqslant \lambda_{\min}(W_2), \quad \text{где}$$

$M = \max\limits_{\tau\in[0,h]} \|\Delta U_{\hat{h}}(\tau)\|,\ \xi_0 = \|A_2\|\bigl(2+\|A_1\|+h\|A_2\|\bigr),\ \xi_1 = \|A_1\|\|A_2\|,\ \xi_2 = \|A_2\|^2.$

Предположение 1 необходимо для существования функционала $v(\varphi, U_{\hat{h}})$, а предположение 2 гарантирует отрицательную определенность его производной вдоль решений системы (8); оно накладывает ограничение на близость между значениями $\hat{h}$ и h.

Наконец, в параграфе 5.2 сформулированы основные результаты пятой главы — критерии экспоненциальной устойчивости и неустойчивости системы (8) с несоизмеримыми запаздываниями. Эти критерии представляют собой аналоги теорем 1 и 2, в которых используется новый функционал.

Теорема 6. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 2. *Система* (8) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существует* $\mu > 0$ *такое, что*

$$v(\varphi, U_{\hat{h}}) \geqslant \mu\|\varphi(0)\|^2, \quad \varphi \in S.$$

Теорема 7. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 2. *Система* (8) *неустойчива тогда и только тогда, когда существуют* $\mu > 0$ *и функция* $\varphi \in S$ *такие, что*

$$v(\varphi, U_{\hat{h}}) \leqslant -\mu\|\varphi(0)\|^2.$$

Теоремы 6 и 7 дают возможность применить методы главы 4 к анализу устойчивости системы (8). Для этого нужно вычислить только матрицу Ляпунова $U_{\hat{h}}(\tau),\ \tau \in [-h, h]$, а также проверить предположения 1 и 2; матрицу Ляпунова системы с несоизмеримыми запаздываниями вычислять не требуется. Сходимость методов имеет тот же смысл, что и в главе 4, и означает стремление границ областей экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров, получаемых каждым из методов, к границам точных областей экспоненциальной устойчивости системы (8) при $\hat{h} \to h,\ N_1, N_2 \to +\infty$.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Работа посвящена анализу экспоненциальной устойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа. В ней предлагается новый подход к анализу устойчивости, объединяющий метод функционалов Ляпунова – Красовского и метод Разумихина. На защиту выносятся следующие **основные результаты**:

- системный подход к анализу динамических систем, описываемых линейными стационарными дифференциально-разностными уравнениями;
- конструктивные критерии экспоненциальной устойчивости и неустойчивости линейных стационарных систем с несколькими, быть может, несоизмеримыми запаздываниями, выраженные в терминах существования для функционалов Ляпунова – Красовского квадратичных оценок на множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина;
- конструктивные методы анализа экспоненциальной устойчивости и неустойчивости систем рассматриваемого класса;
- конструктивные алгоритмы оценки критических параметров линейных стационарных дифференциально-разностных систем с неопределенными параметрами.

Тематика диссертации соответствует пунктам 4 и 5 паспорта специальности 05.13.01 — системный анализ, управление и обработка информации (по прикладной математике и процессам управления).

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Жабко А. П., Медведева И. В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 9–20.
2. Medvedeva I. V., Zhabko A. P. Constructive method of linear systems with delay stability analysis // 11th IFAC Workshop on Time-Delay Systems. Grenoble, France. 2013. P. 1–6.
3. Medvedeva I. V., Zhabko A. P. Synthesis of Razumikhin and Lyapunov–Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2015. Vol. 51. P. 372–377.

Другие публикации

4. Медведева И. В. Обращение прямого метода Ляпунова при анализе устойчивости систем с запаздыванием // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2010. С. 33–38.

5. Медведева И. В. Модификация алгебраического метода исследования устойчивости дифференциально-разностных уравнений // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 35–40.
6. Медведева И. В. О сходимости одного метода анализа устойчивости систем с запаздыванием // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 26–31.
7. Жабко А. П., Медведева И. В. Конструктивный подход к анализу положительной определенности квадратичных функционалов Ляпунова – Красовского // Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры: Материалы VII международной конференции. Актобе, 2012. С. 52–56.
8. Медведева И. В. Анализ устойчивости линейного дифференциального уравнения с двумя несоизмеримыми запаздываниями // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). С. 21–25.
9. Медведева И. В. Интегральный метод анализа устойчивости линейных систем с запаздыванием // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления «ВСПУ-2014» / М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 1317–1325.
10. Medvedeva I. V. Robust stability analysis of time-delay systems in MATLAB // Proceedings of 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA) / Ed. by E. I. Veremey. Saint-Petersburg, 2014. P. 114–115.
11. Жабко А. П., Медведева И. В. Модификация функционала Ляпунова – Красовского для линейных систем с несоизмеримыми запаздываниями // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов VII международной конференции «ПМТУКТ-2014» / под ред. И. Л. Батаронова, А. П. Жабко, В. В. Провоторова. Воронеж: Изд. «Научная книга», 2014. С. 141–143.