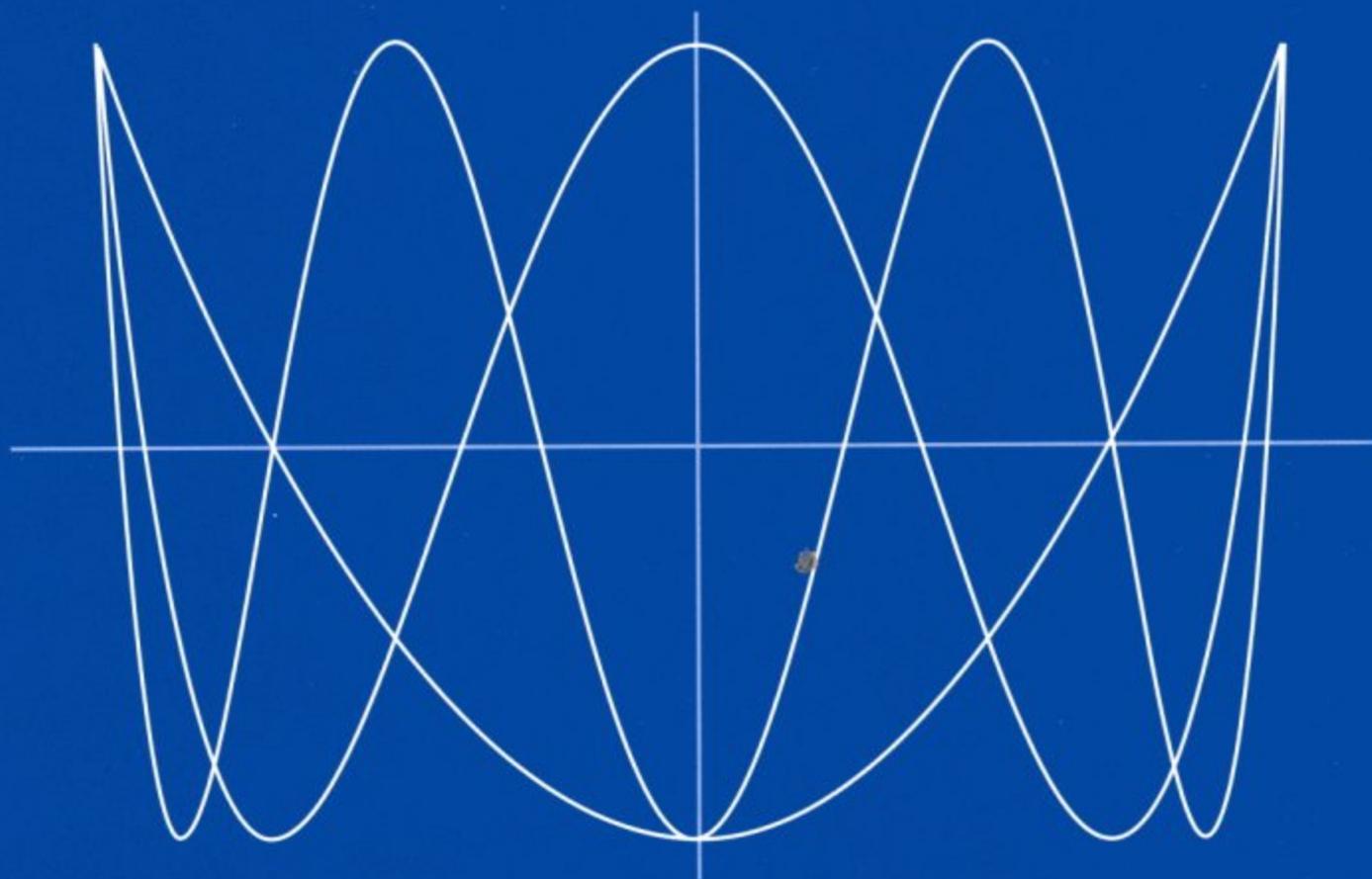


И. С. Градштейн  
И. М. Рыжик

# ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ, РЯДОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

7-е издание



Под редакцией А. Джеффри, Д. Цвиллингера  
Русский перевод под редакцией В. В. Максимова



# ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ, РЯДОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

7-е издание

---

И. С. Градштейн, И. М. Рыжик

Алан Джеффри, научный редактор  
*Университет Ньюкасла-апон-Тайн, Великобритания*

Даниэль Цвиллингер, научный редактор  
*Политехнический институт Ренсселера, США*

Василий Максимов, научный редактор русского перевода  
*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2011

УДК 517.3  
ББК 22.1  
Г75

**Градштейн, И. С.**

Г75 Таблицы интегралов, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — Под ред. А. Джеффри, Д. Цвиллингера. — 7-е изд.: Пер. с англ. под ред. В. В. Максимова. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 1232 с.

ISBN 978-5-9775-0360-0

Книга представляет собой наиболее полный справочник таблиц интегралов, сумм, рядов и произведений, существующий на сегодняшний день. Включает в себя следующие разделы: элементарные функции, неопределенные интегралы от элементарных функций, определенные интегралы от элементарных функций, неопределенные и определенные интегралы от специальных функций, специальные функции, теория векторного поля, алгебраические неравенства, интегральные неравенства, матрицы и некоторые результаты, относящиеся к ним, определители, нормы, обыкновенные дифференциальные уравнения, преобразования Фурье, Лапласа и Меллина, Z-преобразование. Логически таблицы организованы по стандартным формам подынтегральных функций и упорядочены по возрастанию сложности.

*Для математиков, научных работников, инженеров  
и студентов высших учебных заведений*

УДК 517.3  
ББК 22.1

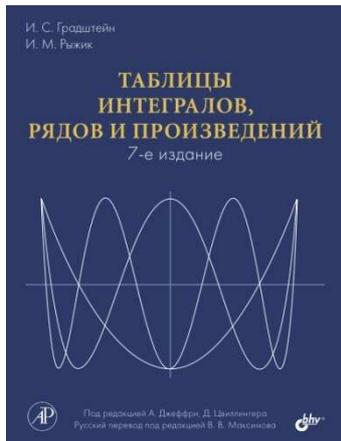
Перевод с английского и научное редактирование  
проф. В. В. Максимова

Copyright © 2007, Elsevier Inc. All rights reserved. This edition of Table of Integrals, Series, and Products by I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik and edited by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger is published by arrangement with ELSEVIER INC of 200 Wheeler Road, 6th floor, Burlington, MA 01803, USA. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher. Russian edition: Copyright © 2011 year by BHV – St.Petersburg. All rights reserved.

Оригинальное издание книги Table of Integrals, Series, and Products, авторы I.S. Gradshteyn и I.M. Ryzhik, под редакцией Alan Jeffrey и Daniel Zwillinger, выпущено по согласованию с Elsevier Inc., Wheeler Road, 6th floor, Burlington, MA 01803, USA в 2007 году. Copyright © 2007, Elsevier Inc. Все права защищены. Русская редакция издания выпущена издательством "БХВ-Петербург" в 2011 году. Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на то нет письменного разрешения издательства.

ISBN 978-0-12-373637-6 (англ.)  
ISBN 978-5-9775-0360-0 (рус.)

© Copyright © 2007, Elsevier Inc.  
© Перевод на русский язык "БХВ-Петербург", 2011



## Градштейн, И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов и произведений

Книга представляет собой наиболее полный справочник таблиц интегралов, сумм, рядов и произведений, существующий на сегодняшний день. Включает в себя следующие разделы: элементарные функции, неопределенные интегралы от элементарных функций, определенные интегралы от элементарных функций, неопределенные и определенные интегралы от специальных функций, специальные функции, теория векторного поля, алгебраические неравенства, интегральные неравенства, матрицы и некоторые результаты, относящиеся к ним, определители, нормы, обыкновенные дифференциальные уравнения, преобразования Фурье, Лапласа и Меллина, Z-преобразование. Логически таблицы организованы по стандартным формам подынтегральных функций и упорядочены по возрастанию сложности.

*Для математиков, научных работников, инженеров и студентов высших учебных заведений*

### Как купить книгу

- Посетите наш ассортиментный зал в центральном офисе в Санкт-Петербурге по адресу: Измайловский пр., 29, с 10 до 20 часов (кроме воскресенья)
- Сделайте заказ по телефонам в Санкт-Петербурге: +7(812) 251-4244, 251-1295, 320-0642, факс: +7(812) 320-0179
- Сделайте заказ по телефонам в Москве: +7(495) 933-3274, 777-8096
- Пришлите заказ по электронной почте: [opt@bhv.spb.su](mailto:opt@bhv.spb.su); [bhv@bhvm.ru](mailto:bhv@bhvm.ru)
- Посетите сайт [www.bhv.ru](http://www.bhv.ru)
- Купите книгу в интернет-магазинах:

[www.bolero.ru](http://www.bolero.ru), [www.bookean.ru](http://www.bookean.ru), [www.books.ru](http://www.books.ru), [www.bookzone.com.ua](http://www.bookzone.com.ua), [www.colibri.ru](http://www.colibri.ru), [www.combook.ru](http://www.combook.ru), [www.shop.itbook.ru](http://www.shop.itbook.ru), [www.lit.by](http://www.lit.by), [www.mezon.ru](http://www.mezon.ru), [www.my-shop.ru](http://www.my-shop.ru), [www.ozon.ru](http://www.ozon.ru), [www.regionbook.ru](http://www.regionbook.ru), [www.setbook.ru](http://www.setbook.ru), [www.bgshop.ru](http://www.bgshop.ru), [www.zakazi24.ru](http://www.zakazi24.ru), [www.zone-x.ru](http://www.zone-x.ru), [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru), [www.labirint.ru](http://www.labirint.ru), [www.litera.by](http://www.litera.by), [www.booka.ru](http://www.booka.ru), [www.morkniga.ru](http://www.morkniga.ru), [www.mybook.ru](http://www.mybook.ru), [www.soyuzkniga.ru](http://www.soyuzkniga.ru), [www.texkniga.com.ua](http://www.texkniga.com.ua), [www.chaconne.ru](http://www.chaconne.ru), [www.urait-book.ru](http://www.urait-book.ru)

В связи с введением в действие с 01.10.2007 г. ФЗ-218 от 24.07.2007 "О внесении изменений в Федеральный закон "О размещении заказов на поставки товаров, выполнение работ, оказание услуг для государственных и муниципальных нужд" и отдельные законодательные акты Российской Федерации", ст. 55, ч. 2, п. 19 стало возможным заключение договоров на поставку книжной продукции напрямую с издательством (без объявления открытого конкурса, аукциона или запроса котировок), если издательство является обладателем исключительных прав на использование таких изданий.

В соответствии с действовавшим ранее законодательством об авторском праве, а именно п. 2 ст. 16 пп. 1, 2 ст. 30 Федерального закона от 09 июля 1993 г. № 5351-1 "Об авторском праве и смежных правах" (В редакции Федеральных законов от 19 июля 1995 г. № 220-ФЗ и от 20 июля 2004 г. № 72-ФЗ), и в соответствии с законодательством, действующим на настоящий момент, а именно ст. 1235, 1270, 1285, 1286 Гражданского кодекса РФ, ООО "БХВ-Петербург" в лице Генерального директора Коновалова А. М. подтверждает, что по авторским договорам права на использование произведений на исключительной основе принадлежат ООО "БХВ-Петербург". Ответственность за предоставление недостоверной информации о принадлежности исключительных прав в соответствии с законодательством несет издательство (Поставщик). Издательство самостоятельно занимается реализацией книжной продукции.

Таким образом, ООО "БХВ-Петербург", обладая правами на использование своих изданий на исключительной основе, предлагает рассмотреть возможность заключения договора на поставку книжной продукции, минуя проведение аукциона, конкурса или запроса котировок. ООО "БХВ-Петербург" готово по первому требованию предоставить копии договоров, подтверждающих указанные обстоятельства.

# Содержание

<i>Вместо предисловия</i>	xxi
<i>Предисловие к седьмому изданию</i>	xxiii
<i>Благодарности</i>	xxv
<i>О порядке следования формул</i>	xxix
<i>Использование таблиц</i>	xxxiii
<i>Указатель специальных функций</i>	xli
<i>Список использованных обозначений</i>	xlvi
<i>Замечание о библиографических ссылках</i>	xlix
<b>0 Введение</b>	<b>1</b>
0.1 Конечные суммы . . . . .	1
0.11 Прогрессии . . . . .	1
0.12 Суммы степеней натуральных чисел . . . . .	1
0.13 Суммы величин, обратных натуральным числам . . . . .	3
0.14 Суммы произведений величин, обратных натуральным числам . . . . .	3
0.15 Суммы биномиальных коэффициентов . . . . .	4
0.2 Числовые ряды и бесконечные произведения . . . . .	6
0.21 Сходимость числовых рядов . . . . .	6
0.22 Признаки сходимости . . . . .	6
0.23–0.24 Примеры числовых рядов . . . . .	8
0.25 Бесконечные произведения . . . . .	14
0.26 Примеры бесконечных произведений . . . . .	14
0.3 Функциональные ряды . . . . .	15
0.30 Определения и теоремы . . . . .	15
0.31 Степенные ряды . . . . .	17
0.32 Ряды Фурье . . . . .	19
0.33 Асимптотические ряды . . . . .	21
0.4 Некоторые формулы дифференциального исчисления . . . . .	22
0.41 Дифференцирование определённого интеграла по параметру . . . . .	22
0.42 Производная $n$ -го порядка от произведения (Правило Лейбница) . . . . .	22
0.43 Производная $n$ -го порядка от сложной функции . . . . .	22
0.44 Интегрирование методом подстановки . . . . .	24
<b>1 Элементарные функции</b>	<b>25</b>
1.1 Степени биномов . . . . .	25
1.11 Степенные ряды . . . . .	25
1.12 Ряды рациональных дробей . . . . .	26

1.2	Показательная функция . . . . .	26
1.21	Представление в виде ряда . . . . .	26
1.22	Функциональные соотношения . . . . .	27
1.23	Ряды показательной функции . . . . .	27
1.3–1.4	Тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	28
1.30	Введение . . . . .	28
1.31	Основные функциональные соотношения . . . . .	28
1.32	Выражение степеней тригонометрических и гиперболических функций через функции кратных аргументов (дуг) . . . . .	31
1.33	Выражение тригонометрических и гиперболических функций кратных аргументов (дуг) через степени этих функций . . . . .	33
1.34	Некоторые суммы тригонометрических и гиперболических функций . . . . .	36
1.35	Суммы степеней кратных дуг . . . . .	38
1.36	Суммы произведений тригонометрических функций кратных дуг . . . . .	39
1.37	Суммы тангенсов кратных дуг . . . . .	39
1.38	Суммы, приводящие к гиперболическим тангенсам и к гиперболическим котангенсам . . . . .	39
1.39	Представление косинусов и синусов кратных дуг в виде конечных произведений . . . . .	41
1.41	Разложение тригонометрических и гиперболических функций в степенные ряды . . . . .	42
1.42	Разложение на простейшие дроби . . . . .	44
1.43	Представление в виде бесконечного произведения . . . . .	45
1.44–1.45	Тригонометрические ряды . . . . .	46
1.46	Ряды произведений показательных и тригонометрических функций . . . . .	51
1.47	Ряды гиперболических функций . . . . .	51
1.48	«Угол параллельности» Лобачевского $\Pi(x)$ . . . . .	51
1.49	Гиперболическая амплитуда (гудерманиан) $\operatorname{gd} x$ . . . . .	52
1.5	Логарифмическая функция . . . . .	53
1.51	Представление в виде ряда . . . . .	53
1.52	Ряды для логарифмической функции (сравни 1.431) . . . . .	55
1.6	Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции . . . . .	56
1.61	Область определения . . . . .	56
1.62–1.63	Функциональные соотношения . . . . .	56
1.64	Представление в виде ряда . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Неопределённые интегралы от элементарных функций</b> . . . . .	<b>63</b>
2.0	Введение . . . . .	63
2.00	Замечания общего характера . . . . .	63
2.01	Основные интегралы . . . . .	64
2.02	Общие формулы . . . . .	65
2.1	Рациональные функции . . . . .	66
2.10	Общие правила интегрирования . . . . .	66
2.11–2.13	Формы, содержащие биномы $a + bx^k$ . . . . .	68
2.14	Формы, содержащие биномы $1 \pm x^n$ . . . . .	74
2.15	Формы, содержащие пары биномов: $a + bx$ и $\alpha + \beta x$ . . . . .	78
2.16	Формы, содержащие трёхчлены $a + bx^k + cx^{2k}$ . . . . .	79
2.17	Формы, содержащие квадратный трёхчлен $a + bx + cx^2$ и степени $x$ . . . . .	80
2.18	Формы, содержащие квадратный трёхчлен $a + bx + cx^2$ и бином $\alpha + \beta x$ . . . . .	82

2.2	Алгебраические функции . . . . .	83
2.20	Введение . . . . .	83
2.21	Формы, содержащие бином $a + bx^k$ и $\sqrt{x}$ . . . . .	84
2.22–2.23	Формы, содержащие $\sqrt[n]{(a + bx)^k}$ . . . . .	85
2.24	Формы, содержащие $\sqrt{a + bx}$ и бином $\alpha + \beta x$ . . . . .	89
2.25	Формы, содержащие $\sqrt{a + bx + cx^2}$ . . . . .	93
2.26	Формы, содержащие $\sqrt{a + bx + cx^2}$ и целые степени $x$ . . . . .	95
2.27	Формы, содержащие $\sqrt{a + cx^2}$ и целые степени $x$ . . . . .	100
2.28	Формы, содержащие $\sqrt{a + bx + cx^2}$ и многочлены первой и второй степени . . . . .	104
2.29	Интегралы, приводящиеся к эллиптическим и псевдоэллиптическим . . . . .	105
2.3	Показательная функция . . . . .	107
2.31	Формы, содержащие $e^{ax}$ . . . . .	107
2.32	Показательная и рациональные функции от $x$ . . . . .	107
2.4	Гиперболические функции . . . . .	111
2.41–2.43	Степени $\operatorname{sh} x$ , $\operatorname{ch} x$ , $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ . . . . .	111
2.44–2.45	Рациональные функции от гиперболических функций . . . . .	126
2.46	Алгебраические функции от гиперболических функций . . . . .	133
2.47	Гиперболические функции и степенная функция . . . . .	140
2.48	Гиперболические функции, показательная и степенная функция . . . . .	149
2.5–2.6	Тригонометрические функции . . . . .	152
2.50	Введение . . . . .	152
2.51–2.52	Степени тригонометрических функций . . . . .	152
2.53–2.54	Синусы и косинусы кратных дуг, линейных и более сложных функций аргумента . . . . .	162
2.55–2.56	Рациональные функции от синуса и косинуса . . . . .	172
2.57	Интегралы, содержащие $\sqrt{a \pm b \sin x}$ или $\sqrt{a \pm b \cos x}$ . . . . .	180
2.58–2.62	Интегралы, сводящиеся к эллиптическим и псевдоэллиптическим . . . . .	185
2.63–2.65	Произведения тригонометрических функций и степеней . . . . .	216
2.66	Тригонометрические функции и показательная функция . . . . .	229
2.67	Тригонометрические функции и гиперболические функции . . . . .	233
2.7	Логарифмическая функция; функции, обратные гиперболическим . . . . .	239
2.71	Логарифмическая функция . . . . .	239
2.72–2.73	Логарифмическая и алгебраическая функции . . . . .	240
2.74	Обратные гиперболические функции . . . . .	242
2.8	Обратные тригонометрические функции . . . . .	243
2.81	Арксинус и арккосинус . . . . .	243
2.82	Арксеканс и арккосеканс, арктангенс и арккотангенс . . . . .	244
2.83	Арксинус, арккосинус и алгебраические функции . . . . .	244
2.84	Арксеканс, арккосеканс в степени $x$ . . . . .	246
2.85	Арктангенс, арккотангенс и алгебраические функции . . . . .	246
<b>3–4</b>	<b>Определённые интегралы от элементарных функций</b> . . . . .	<b>249</b>
3.0	Введение* . . . . .	249
3.01	Теоремы общего характера . . . . .	249
3.02	Замена переменной в определённом интеграле . . . . .	250
3.03	Формулы общего характера . . . . .	251
3.04	Несобственные интегралы . . . . .	253
3.05	Главные значения несобственных интегралов . . . . .	254

3.1–3.2	Степенная и алгебраические функции . . . . .	255
3.11	Рациональные функции . . . . .	255
3.12	Произведения рациональных функций и выражений, приводящихся к квадратным корням из многочленов первой и второй степени . . . . .	256
3.13–3.17	Выражения, приводящиеся к квадратным корням из многочленов третьей и четвёртой степени, и их произведения с рациональными функциями . . . . .	256
3.18	Выражения, приводящиеся к корням четвёртой степени из многочленов второй степени, и их произведения с рациональными функциями . . . . .	315
3.19–3.23	Комбинации степеней $x$ и степеней биномов вида $(\alpha + \beta x)$ . . . . .	317
3.24–3.27	Степени $x$ , биномов вида $\alpha + \beta x^p$ и многочленов от $x$ . . . . .	324
3.3–3.4	Показательная функция . . . . .	336
3.31	Показательная функция . . . . .	336
3.32–3.34	Показательная функция от более сложных аргументов . . . . .	338
3.35	Показательная функция и рациональные функции . . . . .	342
3.36–3.37	Показательная функция и алгебраические функции . . . . .	347
3.38–3.39	Показательная функция и степенная функция с произвольными показателями степени . . . . .	348
3.41–3.44	Рациональные функции от степенной и показательной функций . . . . .	355
3.45	Алгебраические функции от показательной функции и степенная функция . . . . .	365
3.46–3.48	Показательная функция от более сложных аргументов и степенная функция . . . . .	367
3.5	Гиперболические функции . . . . .	374
3.51	Гиперболические функции . . . . .	374
3.52–3.53	Гиперболические функции и алгебраические функции . . . . .	378
3.54	Гиперболические функции и показательная функция . . . . .	385
3.55–3.56	Гиперболические, показательная и степенная функции . . . . .	389
3.6–4.1	Тригонометрические функции . . . . .	394
3.61	Рациональные функции от синусов и косинусов и тригонометрические функции кратных углов . . . . .	394
3.62	Степени тригонометрических функций . . . . .	398
3.63	Степени тригонометрических функций и тригонометрические функции от линейной функции аргумента . . . . .	400
3.64–3.65	Степени тригонометрических функций и рациональная функция от тригонометрических функций . . . . .	404
3.66	Формы, содержащие степени линейных функций от тригонометрических функций . . . . .	408
3.67	Квадратные корни из выражений, содержащих тригонометрические функции . . . . .	412
3.68	Различные формы от степеней тригонометрических функций . . . . .	414
3.69–3.71	Тригонометрические функции от более сложных аргументов . . . . .	418
3.72–3.74	Тригонометрические и рациональные функции . . . . .	427
3.75	Тригонометрические и алгебраические функции . . . . .	438
3.76–3.77	Тригонометрические и степенная функции . . . . .	440
3.78–3.81	Рациональные функции от $x$ и от тригонометрических функций . . . . .	450
3.82–3.83	Степени тригонометрических функций и степенная функция . . . . .	463
3.84	Интегралы, содержащие выражения $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$ , $\sqrt{1 - k^2 \cos^2 x}$ и сходные с ними . . . . .	476
3.85–3.88	Тригонометрические функции от более сложных аргументов и степенная функция . . . . .	480
3.89–3.91	Тригонометрические и показательная функции . . . . .	490
3.92	Тригонометрические функции от более сложных аргументов и показательная функция . . . . .	498

3.93	Тригонометрические и показательная функции от тригонометрических функций . . . . .	500
3.94–3.97	Тригонометрические, показательная и степенная функции . . . . .	502
3.98–3.99	Тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	514
4.11–4.12	Тригонометрические, гиперболические и степенная функции . . . . .	521
4.13	Тригонометрические, гиперболические и показательная функции . . . . .	527
4.14	Тригонометрические, гиперболические, показательная и степенная функции . . . . .	530
4.2–4.4	Логарифмическая функция . . . . .	532
4.21	Логарифмическая функция . . . . .	532
4.22	Логарифмическая функция от более сложных аргументов . . . . .	534
4.23	Логарифмическая и рациональная функции . . . . .	540
4.24	Логарифмическая и алгебраические функции . . . . .	543
4.25	Логарифмическая и степенная функции . . . . .	545
4.26–4.27	Степени логарифма и степенная функция . . . . .	547
4.28	Рациональная функция $\ln x$ и степенная функция . . . . .	558
4.29–4.32	Логарифмическая функция от более сложных аргументов и степенная функция . . . . .	561
4.33–4.34	Логарифмическая и показательная функции . . . . .	577
4.35–4.36	Логарифмическая, показательная и степенная функции . . . . .	579
4.37	Логарифмическая и гиперболические функции . . . . .	584
4.38–4.41	Логарифмическая и тригонометрические функции . . . . .	587
4.42–4.43	Логарифмическая, тригонометрические и степенная функции . . . . .	600
4.44	Логарифмическая, тригонометрические и показательная функции . . . . .	605
4.5	Обратные тригонометрические функции . . . . .	606
4.51	Обратные тригонометрические функции . . . . .	606
4.52	Арксинус, арккосинус и степенная функция . . . . .	606
4.53–4.54	Арктангенс, арккотангенс и степенная функция . . . . .	608
4.55	Обратные тригонометрические и показательная функции . . . . .	611
4.56	Арктангенс и гиперболическая функция . . . . .	611
4.57	Обратные и прямые тригонометрические функции . . . . .	612
4.58	Обратная и прямая тригонометрические и степенная функции . . . . .	613
4.59	Обратные тригонометрические и логарифмическая функции . . . . .	613
4.6	Кратные интегралы . . . . .	614
4.60	Замена переменных в кратных интегралах . . . . .	614
4.61	Перемена порядка интегрирования и замена переменных . . . . .	614
4.62	Двойные и тройные интегралы с постоянными пределами . . . . .	617
4.63–4.64	Многократные интегралы . . . . .	619
<b>5</b>	<b>Неопределённые интегралы от специальных функций</b> . . . . .	<b>625</b>
5.1	Эллиптические интегралы и функции . . . . .	625
5.11	Полные эллиптические интегралы . . . . .	625
5.12	Эллиптические интегралы . . . . .	627
5.13	Эллиптические функции Якоби . . . . .	629
5.14	Эллиптические функции Вейерштрасса . . . . .	632
5.2	Интегральная показательная функция . . . . .	633
5.21	Интегральная показательная функция . . . . .	633
5.22	Интегральная показательная и степенная функции . . . . .	633
5.23	Интегральная показательная и показательная функции . . . . .	634
5.3	Интегральный синус и интегральный косинус . . . . .	634
5.4	Интеграл вероятности и интегралы Френеля . . . . .	635

5.5	Цилиндрические функции . . . . .	635
<b>6–7</b>	<b>Определённые интегралы от специальных функций</b>	<b>637</b>
6.1	Эллиптические интегралы и функции . . . . .	637
6.11	Формы, содержащие $F(x, k)$ . . . . .	637
6.12	Формы, содержащие $E(x, k)$ . . . . .	638
6.13	Интегрирование эллиптических интегралов по модулю . . . . .	638
6.14–6.15	Полные эллиптические интегралы . . . . .	638
6.16	Тета-функции . . . . .	639
6.17	Обобщённые эллиптические интегралы . . . . .	641
6.2–6.3	Интегральная показательная функция и родственные ей функции . . . . .	642
6.21	Интегральный логарифм . . . . .	642
6.22–6.23	Интегральная показательная функция . . . . .	644
6.24–6.26	Интегральные синус и косинус . . . . .	645
6.27	Интегральные гиперболические синус и косинус . . . . .	650
6.28–6.31	Интеграл вероятности . . . . .	651
6.32	Интегралы Френеля . . . . .	655
6.4	Гамма-функция и родственные ей функции . . . . .	656
6.41	Гамма-функция . . . . .	656
6.42	Гамма-функция, показательная и степенная функции . . . . .	658
6.43	Гамма-функция и тригонометрические функции . . . . .	661
6.44	Логарифм гамма-функции* . . . . .	662
6.45	Неполная гамма-функция . . . . .	663
6.46–6.47	Функция $\psi(x)$ . . . . .	664
6.5–6.7	Цилиндрические функции . . . . .	665
6.51	Цилиндрические функции . . . . .	665
6.52	Цилиндрические функции, $x$ и $x^2$ . . . . .	670
6.53–6.54	Цилиндрические функции и рациональные функции . . . . .	676
6.55	Цилиндрические функции и алгебраические функции . . . . .	680
6.56–6.58	Цилиндрические функции и степенная функция . . . . .	681
6.59	Цилиндрические функции от более сложных аргументов и степенная функция . . . . .	695
6.61	Цилиндрические функции и показательная функция . . . . .	701
6.62–6.63	Цилиндрические, показательная и степенная функции . . . . .	706
6.64	Цилиндрические функции от более сложных аргументов, показательная и степенная функции . . . . .	715
6.65	Цилиндрические и показательная функции от более сложных аргументов и степенная функция . . . . .	718
6.66	Цилиндрические, гиперболические и показательная функции . . . . .	720
6.67–6.68	Цилиндрические и тригонометрические функции . . . . .	723
6.69–6.74	Цилиндрические, тригонометрические и степенная функции . . . . .	734
6.75	Цилиндрические, тригонометрические, показательная и степенная функции . . . . .	749
6.76	Цилиндрические, тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	753
6.77	Цилиндрические функции, логарифм и арктангенс . . . . .	754
6.78	Цилиндрические и другие специальные функции . . . . .	754
6.79	Интегрирование цилиндрических функций по индексу . . . . .	756
6.8	Функции, родственные цилиндрическим . . . . .	760
6.81	Функции Струве . . . . .	760
6.82	Функции Струве, показательная и степенная функции . . . . .	761

6.83	Функции Струве и тригонометрические функции . . . . .	762
6.84–6.85	Функции Струве и цилиндрические функции . . . . .	763
6.86	Функции Ломмеля . . . . .	767
6.87	Функции Томсона . . . . .	768
6.9	Функции Матьё . . . . .	770
6.91	Функции Матьё . . . . .	770
6.92	Функции Матьё, гиперболические и тригонометрические функции . . . . .	770
6.93	Функции Матьё и цилиндрические функции . . . . .	774
6.94	Связь между собственными функциями уравнения Гельмгольца в различных координатных системах . . . . .	774
7.1–7.2	Шаровые функции (присоединённые функции Лежандра) . . . . .	776
7.11	Шаровые функции . . . . .	776
7.12–7.13	Шаровые функции и степенная функция . . . . .	777
7.14	Шаровые, степенная и показательная функции . . . . .	783
7.15	Шаровые и гиперболические функции . . . . .	786
7.16	Шаровые, степенная и тригонометрические функции . . . . .	786
7.17	Шаровые функции и интеграл вероятности . . . . .	789
7.18	Шаровые и цилиндрические функции . . . . .	789
7.19	Шаровые функции и функции, родственные цилиндрическим . . . . .	795
7.21	Интегрирование шаровых функций по индексу . . . . .	796
7.22	Многочлены Лежандра, рациональные и алгебраические функции . . . . .	797
7.23	Многочлены Лежандра и степенная функция . . . . .	799
7.24	Многочлены Лежандра и другие элементарные функции . . . . .	800
7.25	Многочлены Лежандра и цилиндрические функции . . . . .	802
7.3–7.4	Ортогональные многочлены . . . . .	803
7.31	Многочлены Гегенбауэра $C_n^\nu(x)$ и степенная функция . . . . .	803
7.32	Многочлены Гегенбауэра $C_n^\nu(x)$ и элементарные функции . . . . .	805
7.325*	Полная система ортогональных ступенчатых функций . . . . .	806
7.33	Многочлены $C_n^\nu(x)$ и цилиндрические функции. Интегрирование по индексу функ- ций Гегенбауэра . . . . .	806
7.34	Многочлены Чебышёва и степенная функция . . . . .	808
7.35	Многочлены Чебышёва и другие элементарные функции . . . . .	810
7.36	Многочлены Чебышёва и цилиндрические функции . . . . .	811
7.37–7.38	Многочлены Эрмита . . . . .	811
7.39	Многочлены Якоби . . . . .	815
7.41–7.42	Многочлены Лагерра . . . . .	817
7.5	Гипергеометрические функции . . . . .	821
7.51	Гипергеометрические и степенная функции . . . . .	821
7.52	Гипергеометрические и показательная функции . . . . .	823
7.53	Гипергеометрические и тригонометрические функции . . . . .	825
7.54	Гипергеометрические и цилиндрические функции . . . . .	825
7.6	Вырожденные гипергеометрические функции . . . . .	829
7.61	Вырожденные гипергеометрические функции и степенная функция . . . . .	829
7.62–7.63	Вырожденные гипергеометрические функции и показательная функция . . . . .	830
7.64	Вырожденные гипергеометрические функции и тригонометрические функции . . . . .	837

7.65	Вырожденные гипергеометрические функции и цилиндрические функции . . . . .	839
7.66	Вырожденные гипергеометрические, цилиндрические и степенная функции . . . . .	839
7.67	Вырожденные гипергеометрические функции, цилиндрические, показательная и степенная функции . . . . .	843
7.68	Вырожденные гипергеометрические функции и другие специальные функции . . . . .	847
7.69	Интегрирование вырожденных гипергеометрических функций по индексам . . . . .	849
7.7	Функции параболического цилиндра . . . . .	850
7.71	Функции параболического цилиндра . . . . .	850
7.72	Функции параболического цилиндра, степенная и показательная функции . . . . .	850
7.73	Функции параболического цилиндра и гиперболические функции . . . . .	852
7.74	Функции параболического цилиндра и тригонометрические функции . . . . .	852
7.75	Функции параболического цилиндра и цилиндрические функции . . . . .	853
7.76	Функции параболического цилиндра и вырожденные гипергеометрические функции . . . . .	857
7.77	Интегрирование функций параболического цилиндра по индексу . . . . .	857
7.8	Функции Мейера и Мак-Роберта ( $G$ и $E$ ) . . . . .	858
7.81	Функции $G$ , $E$ и элементарные функции . . . . .	858
7.82	Функции $G$ , $E$ и цилиндрические функции . . . . .	862
7.83	Функции $G$ , $E$ и другие специальные функции . . . . .	864
<b>8–9</b>	<b>Специальные функции</b>	<b>867</b>
8.1	Эллиптические интегралы и функции . . . . .	867
8.11	Эллиптические интегралы . . . . .	867
8.12	Функциональные соотношения между эллиптическими интегралами . . . . .	871
8.13	Эллиптические функции . . . . .	873
8.14	Эллиптические функции Якоби . . . . .	874
8.15	Свойства эллиптических функций Якоби и функциональные соотношения между ними . . . . .	878
8.16	Функция Вейерштрасса $\wp(u)$ . . . . .	881
8.17	Функции $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$ . . . . .	884
8.18–8.19	Тета-функции . . . . .	885
8.2	Интегральная показательная функция и родственные ей функции . . . . .	891
8.21	Интегральная показательная функция $Ei(x)$ . . . . .	891
8.22	Интегральный гиперболический синус $\operatorname{shi} x$ и интегральный гиперболический косинус $\operatorname{chi} x$ . . . . .	894
8.23	Интегральный синус и интегральный косинус: $\operatorname{si} x$ и $\operatorname{ci} x$ . . . . .	894
8.24	Интегральный логарифм $\operatorname{li}(x)$ . . . . .	895
8.25	Интеграл вероятности $\Phi(x)$ , интегралы Френеля $S(x)$ и $C(x)$ , функция ошибок $\operatorname{erf}(x)$ и дополнительная функция ошибок $\operatorname{erfc}(x)$ . . . . .	896
8.26	Функция Лобачевского $L(x)$ . . . . .	900
8.3	Эйлеровы интегралы 1 и 2-го рода . . . . .	900
8.31	Гамма-функция (эйлеров интеграл 2-го рода): $\Gamma(z)$ . . . . .	900
8.32	Представление гамма-функции в виде рядов и произведений . . . . .	902
8.33	Функциональные соотношения для гамма-функции . . . . .	904
8.34	Логарифм гамма-функции . . . . .	906
8.35	Неполная гамма-функция . . . . .	907

8.36	Пси-функция $\psi(x)$ . . . . .	911
8.37	Функция $\beta(x)$ . . . . .	915
8.38	Бета-функция (эйлеров интеграл 1-го рода): $B(x, y)$ . . . . .	916
8.39	Неполная бета-функция $B_x(p, q)$ . . . . .	918
8.4–8.5	Цилиндрические функции и функции, связанные с ними . . . . .	919
8.40	Определения . . . . .	919
8.41	Интегральные представления функций $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$ . . . . .	920
8.42	Интегральные представления функций $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ . . . . .	923
8.43	Интегральные представления функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ . . . . .	925
8.44	Представление в виде ряда . . . . .	926
8.45	Асимптотические разложения цилиндрических функций . . . . .	928
8.46	Цилиндрические функции, индекс которых равен целому числу плюс одна вторая . . . . .	932
8.47–8.48	Функциональные соотношения . . . . .	935
8.49	Дифференциальные уравнения, приводящие к цилиндрическим функциям . . . . .	940
8.51–8.52	Ряды бесселевых функций . . . . .	942
8.53	Разложение по произведениям цилиндрических функций . . . . .	949
8.54	Корни цилиндрических функций . . . . .	950
8.55	Функции Струве . . . . .	951
8.56	Функции Томсона и их обобщения . . . . .	953
8.57	Функции Ломмеля . . . . .	954
8.58	Функции Ангера и Вебера $J_\nu(z)$ и $E_\nu(z)$ . . . . .	957
8.59	Многочлены Неймана $O_n(z)$ и Шлефли $S_n(z)$ . . . . .	958
8.6	Функции Матьё . . . . .	960
8.60	Уравнение Матьё . . . . .	960
8.61	Периодические функции Матьё . . . . .	960
8.62	Рекуррентные соотношения для коэффициентов $A_{2r}^{(2n)}$ , $A_{2r+1}^{(2n+1)}$ , $B_{2r+1}^{(2n+1)}$ , $B_{2r+2}^{(2n+2)}$ . . . . .	961
8.63	Функции Матьё с чисто мнимым аргументом . . . . .	962
8.64	Непериодические решения уравнения Матьё . . . . .	962
8.65	Функции Матьё для отрицательного $q$ . . . . .	962
8.66	Представление функций Матьё по рядам функций Бесселя . . . . .	963
8.67	Общая теория . . . . .	966
8.7–8.8	Шаровые (сферические) функции . . . . .	967
8.70	Введение . . . . .	967
8.71	Интегральные представления . . . . .	969
8.72	Асимптотические ряды для больших $ \nu $ . . . . .	971
8.73–8.74	Функциональные соотношения . . . . .	973
8.75	Частные случаи и частные значения . . . . .	976
8.76	Производные по индексу . . . . .	978
8.77	Представление в виде ряда . . . . .	978
8.78	Нули шаровых функций . . . . .	980
8.79	Ряды шаровых функций . . . . .	981
8.81	Шаровые функции (присоединённые функции Лежандра) с целочисленными индексами . . . . .	983
8.82–8.83	Функции Лежандра . . . . .	984
8.84	Функции конуса . . . . .	989
8.85	Функции тора (или кольца) . . . . .	990
8.9	Ортогональные многочлены . . . . .	991

8.90	Введение . . . . .	991
8.91	Многочлены Лежандра . . . . .	992
8.919	Ряды произведений многочленов Лежандра и Чебышёва . . . . .	997
8.92	Ряды многочленов Лежандра . . . . .	997
8.93	Многочлены Гегенбауэра $C_n^\lambda(t)$ . . . . .	999
8.94	Многочлены Чебышёва $T_n(x)$ и $U_n(x)$ . . . . .	1003
8.95	Многочлены Эрмита $H_n(x)$ . . . . .	1005
8.96	Многочлены Якоби . . . . .	1008
8.97	Многочлены Лагерра . . . . .	1009
9.1	Гипергеометрические функции . . . . .	1014
9.10	Определение . . . . .	1014
9.11	Интегральные представления . . . . .	1014
9.12	Представление элементарных функций с помощью гипергеометрических функций . . . . .	1015
9.13	Формулы преобразования и аналитическое продолжение для функций, определяемых гипергеометрическими рядами . . . . .	1017
9.14	Обобщённый гипергеометрический ряд . . . . .	1019
9.15	Гипергеометрическое дифференциальное уравнение . . . . .	1019
9.16	Дифференциальное уравнение Римана . . . . .	1023
9.17	Запись некоторых дифференциальных уравнений второго порядка с помощью схемы Римана . . . . .	1026
9.18	Гипергеометрические функции двух переменных . . . . .	1027
9.19	Гипергеометрическая функция нескольких переменных . . . . .	1031
9.2	Вырожденная гипергеометрическая функция . . . . .	1031
9.20	Введение . . . . .	1031
9.21	Функции $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ и $\Psi(\alpha, \gamma; z)$ . . . . .	1032
9.22–9.23	Функции Уиттекера $M_{\lambda, \mu}(z)$ и $W_{\lambda, \mu}(z)$ . . . . .	1033
9.24–9.25	Функции параболического цилиндра $D_p(z)$ . . . . .	1037
9.26	Вырожденные гипергеометрические ряды двух переменных . . . . .	1040
9.3	$G$ -функция Мейера . . . . .	1041
9.30	Определение . . . . .	1041
9.31	Функциональные соотношения . . . . .	1042
9.32	Дифференциальное уравнение для $G$ -функции . . . . .	1043
9.33	Ряды $G$ -функций . . . . .	1043
9.34	Связь с другими специальными функциями . . . . .	1044
9.4	$E$ -функция Мак-Роберта . . . . .	1044
9.41	Представление с помощью кратных интегралов . . . . .	1044
9.42	Функциональные соотношения . . . . .	1045
9.5	Дзета-функции Римана $\zeta(z, q)$ , $\zeta(z)$ , функции $\Phi(z, s, v)$ и $\xi(s)$ . . . . .	1045
9.51	Определение и интегральные представления . . . . .	1045
9.52	Представление в виде ряда или бесконечного произведения . . . . .	1046
9.53	Функциональные соотношения . . . . .	1047
9.54	Особые точки и нули . . . . .	1047
9.55	Функция Лерха $\Phi(z, s, v)$ . . . . .	1048
9.56	Функция $\xi(s)$ . . . . .	1049
9.6	Числа и многочлены Бернулли, числа Эйлера . . . . .	1049
9.61	Числа Бернулли . . . . .	1049
9.62	Многочлены Бернулли . . . . .	1050

9.63	Числа Эйлера . . . . .	1052
9.64	Функции $\nu(x)$ , $\nu(x, \alpha)$ , $\mu(x, \beta)$ , $\mu(x, \beta, \alpha)$ , $\lambda(x, y)$ . . . . .	1053
9.65	Многочлены Эйлера . . . . .	1053
9.7	Постоянные . . . . .	1054
9.71	Числа Бернулли . . . . .	1054
9.72	Числа Эйлера . . . . .	1055
9.73	Постоянные Эйлера и Каталана . . . . .	1055
9.74	Числа Стирлинга . . . . .	1055
<b>10</b>	<b>Теория векторного поля</b>	<b>1059</b>
10.1–10.8	Векторы, векторные операции и интегральные теоремы . . . . .	1059
10.11	Произведения векторов . . . . .	1059
10.12	Свойства скалярного произведения . . . . .	1059
10.13	Свойства векторного произведения . . . . .	1059
10.14	Дифференцирование векторов . . . . .	1060
10.21	Операторы grad, div и rot . . . . .	1060
10.31	Свойства оператора $\nabla$ . . . . .	1061
10.41	Соленоидальные поля . . . . .	1062
10.51–10.61	Криволинейные ортогональные координаты . . . . .	1062
10.71–10.72	Интегральные теоремы . . . . .	1065
10.81	Интегральные теоремы о скорости изменения . . . . .	1067
<b>11</b>	<b>Алгебраические неравенства</b>	<b>1069</b>
11.1–11.3	Общие алгебраические неравенства . . . . .	1069
11.11	Алгебраические неравенства для действительных чисел . . . . .	1069
11.21	Алгебраические неравенства для комплексных чисел . . . . .	1070
11.31	Неравенства для наборов комплексных чисел . . . . .	1071
<b>12</b>	<b>Интегральные неравенства</b>	<b>1073</b>
12.11	Теоремы о среднем значении . . . . .	1073
12.111	Первая теорема о среднем значении . . . . .	1073
12.112	Вторая теорема о среднем значении . . . . .	1073
12.113	Первая теорема о среднем для интегралов с бесконечными пределами . . . . .	1073
12.114	Вторая теорема о среднем для интегралов с бесконечными пределами . . . . .	1074
12.21	Дифференцирование определённого интеграла с параметром . . . . .	1074
12.211	Дифференцирование в случае конечных пределов . . . . .	1074
12.212	Дифференцирование в случае бесконечного предела . . . . .	1074
12.31	Интегральные неравенства . . . . .	1074
12.311	Неравенство Коши—Буняковского для интегралов . . . . .	1074
12.312	Неравенство Гёльдера для интегралов . . . . .	1075
12.313	Неравенство Минковского для интегралов . . . . .	1075
12.314	Неравенство Чебышёва для интегралов . . . . .	1075
12.315	Неравенство Юнга для интегралов . . . . .	1075
12.316	Неравенство Стеффенсена для интегралов . . . . .	1075
12.317	Неравенство Грама для интегралов . . . . .	1075
12.318	Неравенство Островского для интегралов . . . . .	1076
12.41	Выпуклость и неравенство Йенсена . . . . .	1076
12.411	Неравенство Йенсена . . . . .	1076

12.412	Неравенство Карлемана для интегралов . . . . .	1076
12.51	Ряды Фурье и неравенства, связанные с ними . . . . .	1076
12.511	Лемма Римана—Лебега . . . . .	1077
12.512	Лемма Дирихле . . . . .	1077
12.513	Теорема Парсевала для тригонометрического ряда Фурье . . . . .	1077
12.514	Интегральное представление $n$ -й частичной суммы . . . . .	1077
12.515	Обобщённые ряды Фурье . . . . .	1077
12.516	Неравенство Бесселя для обобщённого ряда Фурье . . . . .	1078
12.517	Теорема Парсевала для обобщённого ряда Фурье . . . . .	1078
<b>13</b>	<b>Матрицы и некоторые результаты, относящиеся к ним</b>	<b>1079</b>
13.11–13.12	Специальные матрицы . . . . .	1079
13.111	Диагональная матрица . . . . .	1079
13.112	Единичная и нулевая матрицы . . . . .	1079
13.113	Приводимая и неприводимая матрицы . . . . .	1079
13.114	Эквивалентные матрицы . . . . .	1079
13.115	Транспонирование матрицы . . . . .	1080
13.116	Присоединённая матрица . . . . .	1080
13.117	Обратная матрица . . . . .	1080
13.118	След матрицы . . . . .	1080
13.119	Симметрическая матрица . . . . .	1080
13.120	Кососимметрическая матрица . . . . .	1080
13.121	Треугольные матрицы . . . . .	1080
13.122	Ортогональные матрицы . . . . .	1080
13.123	Сопряжённая матрица . . . . .	1081
13.124	Эрмитова матрица . . . . .	1081
13.125	Унитарная матрица . . . . .	1081
13.126	Собственные значения и собственные векторы . . . . .	1081
13.127	Нильпотентная матрица . . . . .	1081
13.128	Идемпотентная матрица . . . . .	1081
13.129	Положительно определённая матрица . . . . .	1081
13.130	Неотрицательно определённая матрица . . . . .	1081
13.131	Матрица с доминирующей диагональю . . . . .	1081
13.21	Квадратичные формы . . . . .	1082
13.211	Закон инерции квадратичных форм . . . . .	1082
13.212	Ранг . . . . .	1082
13.213	Сигнатура . . . . .	1082
13.214	Положительно определённая и положительно полуопределённая квадратичная форма . . . . .	1083
13.215	Основные теоремы о квадратичных формах . . . . .	1083
13.31	Дифференцирование матриц . . . . .	1084
13.41	Матричная экспонента . . . . .	1084
3.411	Основные свойства . . . . .	1084

<b>14</b>	<b>Определители</b>	<b>1085</b>
14.11	Разложение определителей второго и третьего порядков	1085
14.12	Основные свойства	1085
14.13	Миноры и алгебраические дополнения определителя	1085
14.14	Главные миноры	1086
14.15*	Разложение Лапласа	1086
14.16	Теорема Якоби	1086
14.17	Теорема Адамара	1087
14.18	Неравенство Адамара	1087
14.21	Правило Крамера	1087
14.31	Определители специального вида	1088
14.311	Определитель Вандермонда (альтернант)	1088
14.312	Циркулянты	1088
14.313	Определитель Якоби (якобиан)	1088
14.314	Определитель Гессе (гессиан)	1089
14.315	Определитель Вронского (вронскиан)	1089
14.316	Свойства вронскиана	1089
14.317	Теорема Грама—Ковалевского о линейной зависимости	1090
<b>15</b>	<b>Нормы</b>	<b>1091</b>
15.1–15.9	Векторные нормы	1091
15.11	Общие свойства	1091
15.21	Основные векторные нормы	1091
15.211	Октаэдрическая норма $\ x\ _1$	1091
15.212	Норма $\ x\ _2$ (Эрмитова (евклидова) норма, или $L_2$ )	1091
15.213	Норма $\ x\ _\infty$	1091
15.31	Матричные нормы	1092
15.311	Общие свойства	1092
15.312	Индукцированные нормы	1092
15.313	Естественная норма единичной матрицы	1092
15.41	Основные естественные нормы	1092
15.411	Норма максимума сумм абсолютных значений матричных элементов по столбцам	1092
15.412	Спектральная норма	1092
15.413	Норма максимума сумм абсолютных значений матричных элементов по строкам	1093
15.51	Спектральный радиус квадратной матрицы	1093
15.511	Неравенства для матричных норм и спектрального радиуса	1093
15.512	Выводы из теоремы Гершгорина (см. <b>15.814</b> )	1094
15.61	Неравенства для собственных значений матриц	1094
15.611	Теорема Гамильтона—Кэли	1094
15.612	Следствия	1094
15.71	Неравенства для характеристического многочлена	1095
15.711	Поименованные и неименованные неравенства	1095
15.712	Теорема Пароди	1096
15.713	Следствие из теоремы Брауэра	1096
15.714	Теорема Бальё	1096
15.715	Теорема (критерий) Рауса—Гурвица	1096
15.81–15.82	Поименованные теоремы о собственных значениях	1097
15.811	Неравенства Шура	1097

15.812	Теорема отделения Штурма . . . . .	1097
15.813	Теорема отделения Пуанкаре . . . . .	1097
15.814	Теорема Гершгорина . . . . .	1098
15.815	Теорема Брауэра . . . . .	1098
15.816	Теорема Перрона . . . . .	1098
15.817	Теорема Фробениуса . . . . .	1098
15.818	Теорема Перрона—Фробениуса . . . . .	1099
15.819	Теорема Виландта . . . . .	1099
15.820	Теорема Островского . . . . .	1099
15.821	Первая теорема Ляпунова . . . . .	1099
15.822	Вторая теорема Ляпунова . . . . .	1099
15.823	Эрмитовы матрицы и диофантовы соотношения, содержащие тригонометрические функции рационального аргумента (Калоджеро, Переломов) . . . . .	1100
15.91	Вариационные принципы . . . . .	1101
15.911	Отношение Релея . . . . .	1101
15.912	Основные теоремы . . . . .	1101
<b>16</b>	<b>Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>	<b>1103</b>
16.1–16.9	Результаты, относящиеся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений	1103
16.11	Уравнения первого порядка . . . . .	1103
16.111	Решение уравнения первого порядка . . . . .	1103
16.112	Задача Коши . . . . .	1103
16.113	Приближённое решение уравнения . . . . .	1104
16.114	Липшицевость функции . . . . .	1104
16.21	Основные неравенства и связанные с ними результаты . . . . .	1104
16.211	Лемма Гронуолла . . . . .	1104
16.212	Сравнение приближённых решений дифференциального уравнения . . . . .	1104
16.31	Системы уравнений первого порядка . . . . .	1105
16.311	Решение системы уравнений . . . . .	1105
16.312	Задача Коши для системы уравнений . . . . .	1105
16.313	Приближённое решение системы уравнений . . . . .	1105
16.314	Условие Липшица для вектора . . . . .	1106
16.315	Сравнение приближённых решений системы уравнений . . . . .	1106
16.316	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	1106
16.317	Системы линейных дифференциальных уравнений . . . . .	1106
16.41	Частные типы элементарных дифференциальных уравнений . . . . .	1107
16.411	Уравнение с разделяющимися переменными . . . . .	1107
16.412	Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах . . . . .	1107
16.413	Условие для уравнения в полных дифференциалах . . . . .	1107
16.414	Однородные дифференциальные уравнения . . . . .	1108
16.51	Дифференциальные уравнения второго порядка . . . . .	1108
16.511	Сопряжённые и самосопряжённые дифференциальные уравнения . . . . .	1108
16.512	Тождество Абеля . . . . .	1108
16.513	Тождество Лагранжа . . . . .	1109
16.514	Уравнение Риккати . . . . .	1109
16.515	Решения уравнения Риккати . . . . .	1110
16.516	Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	1110

16.61–16.62	Теоремы об осциллирующих и неосциллирующих дифференциальных уравнениях второго порядка . . . . .	1110
16.611	Первая основная теорема сравнения . . . . .	1110
16.622	Вторая основная теорема сравнения . . . . .	1111
16.623	Чередование нулей . . . . .	1111
16.624	Теорема о разделении Штурма . . . . .	1111
16.625	Теорема сравнения Штурма . . . . .	1111
16.626	Теорема сравнения Сегё . . . . .	1112
16.627	Тождество Пиконе . . . . .	1112
16.628	Теорема Штурма—Пиконе . . . . .	1112
16.629	Осцилляция на полупрямой . . . . .	1112
16.71	Две теоремы сравнения . . . . .	1113
16.711	Теорема 1 . . . . .	1113
16.712	Теорема 2 . . . . .	1113
16.81–16.82	Неосцилляционные решения . . . . .	1113
16.811	Теорема Кнезера о неосцилляционных решениях . . . . .	1114
16.822	Теорема сравнения для неосцилляционных решений . . . . .	1114
16.823	Необходимые и достаточные условия для существования неосцилляционных решений . . . . .	1114
16.91	Оценки роста решений дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	1115
16.911	Строго возрастающие и строго убывающие решения . . . . .	1115
16.912	Общий результат о главных и неглавных решениях . . . . .	1115
16.913	Оценка главного решения . . . . .	1115
16.914	Теорема Ляпунова . . . . .	1116
16.92	Теоремы об ограниченности решений . . . . .	1116
16.921	Все решения уравнения . . . . .	1116
16.922	Если все решения уравнения . . . . .	1116
16.923	Если $a(x) \rightarrow \infty$ монотонно при $x \rightarrow \infty$ , то все решения уравнения . . . . .	1117
16.924	Рассмотрим уравнение . . . . .	1117
16.93	Рост максимумов $ y $ . . . . .	1117
<b>17</b>	<b>Преобразования Фурье, Лапласа и Меллина</b> . . . . .	<b>1119</b>
17.1–17.4	Интегральные преобразования . . . . .	1119
17.11	Преобразование Лапласа . . . . .	1119
17.12	Основные свойства преобразования Лапласа . . . . .	1119
17.13	Таблица преобразований Лапласа . . . . .	1120
17.21	Преобразование Фурье . . . . .	1129
17.22	Основные свойства преобразования Фурье . . . . .	1130
17.23	Таблица преобразований Фурье . . . . .	1130
17.24	Таблица преобразований Фурье для сферически симметрических функций . . . . .	1133
17.31	Синус- и косинус-преобразования Фурье . . . . .	1133
17.32	Основные свойства синус- и косинус-преобразований Фурье . . . . .	1134
17.33	Таблица синус-преобразований Фурье . . . . .	1135
17.34	Таблица косинус-преобразований Фурье . . . . .	1139
17.35	Соотношения, связывающие преобразования . . . . .	1142
17.41	Преобразование Меллина . . . . .	1142
17.42	Основные свойства преобразования Меллина . . . . .	1143
17.43	Таблица преобразований Меллина . . . . .	1144

---

---

<b>18 Z-преобразование</b>	<b>1147</b>
18.1–18.3 Определение, двустороннее и одностороннее $Z$ -преобразования . . . . .	1147
18.1 Определения . . . . .	1147
18.2 Двустороннее $Z$ -преобразование . . . . .	1148
18.3 Одностороннее $Z$ -преобразование . . . . .	1150
<i>Библиографический список</i>	1155
<i>Дополнительные систематизированные ссылки</i>	1159
<i>Предметный указатель</i>	1165

# Вместо предисловия

## От издательства

Первое издание книги, которую вы держите в руках, вышло в свет в 1943 году. Её единственным автором был Иосиф Моисеевич Рыжик. Книга, по заявлению автора, предназначалась для ликвидации недостатка количества формул интегралов, сумм, рядов и произведений как в советских, так и зарубежных справочниках, которыми активно пользовались инженеры и научные сотрудники. Первое издание содержало свыше 5 тысяч формул, оно вышло тиражом 3 тыс. экз.

Второе издание (1948 г.), по-видимому, стереотипное, появилось уже после гибели И. М. Рыжика в годы войны. Спустя три года, в 1951 г., выходит 3-е, переработанное Израилем Соломоновичем Градштейном издание книги с указанием уже двух авторов. Основные изменения — введение более удобной системы десятичной нумерации формул и механизма ссылок для формул с указанием источника. При подготовке четвертого издания И. С. Градштейн задумал значительное расширение справочника, но не успел его закончить. Оно увидело свет в 1962 г., дополненное и переработанное при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейтлина. Последнее советское, 5-е стереотипное, издание появилось в 1971 г.

В 1965 г. издательством Academic Press был издан английский перевод четвертого издания. Издатели сохранили за ним номер 4. В последующие годы выходили, соответственно 5-е (1994 г.), 6-е (2000 г.) издания, исправленные и дополненные, под редакцией Алана Джеффри (Alan Jeffrey) и Даниэля Цвиллингера (Daniel Zwillinger). Последнее англоязычное 7-е издание (оно содержит уже свыше 20 тысяч формул) вышло в 2007 г.

Издательство «БХВ-Петербург» решило взять на себя ответственную задачу — вернуть отечественному читателю русский вариант замечательного справочника и представляет перевод 7-го англоязычного издания. Следуя примеру американских коллег, сохранивших за первым переводом на английский 4-й номер издания, издательство присваивает данному изданию номер 7. При переводе математическая нотация была приведена в соответствие с принятой в российской научной литературе, исправлены замеченные опечатки и неточности. Библиографический аппарат не перестраивался, переведены только метки и при наличии доступных русскоязычных изданий на них добавлены ссылки.

Очевидно, данное издание также содержит определенное количество опечаток и неточностей. Просим обо всех ваших замечаниях сообщить по адресу: Издательство «БХВ-Петербург», 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 29, [mail@bhv.ru](mailto:mail@bhv.ru)

## От научного редактора перевода

Успешная работа над книгой такого объема невозможна без добровольных помощников. Переводчик искренне благодарит д-ра физ.-мат. наук О. В. Мотыгина за принципиальную позицию

по ряду вопросов, д-ра техн. наук, проф. И. С. Нуднера — за товарищескую критику и обсуждение многочисленных вопросов, д-ра техн. наук, проф. А. Г. Макарова — за всестороннюю поддержку, д-ра физ.-мат. наук, проф. Д. А. Овсянникова — за постоянное внимание, д-ра физ.-мат. наук, проф. А. Г. Басуева — за неоценимую интеллектуальную «подпитку», д-ра техн. наук, проф. Г. П. Мещерякову — за проявленное внимание и постоянный интерес к работе. Особую благодарность заслуживает доброжелательное отношение к изданию д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Бабича, а также моральная и организационная поддержка гл. ред. издательства «БХВ-Петербург» канд. техн. наук Е. В. Кондуковой. Я благодарен также своей супруге и дочери, без терпения, понимания и доброжелательного отношения которых работа не была бы выполнена.

Д-р техн. наук, проф. В.В. Максимов  
vmaximov@mail.ru  
Санкт-Петербург