

Курсовая работа 1

Цели и задачи курсовой работы

Целью курсовой работы является исследование аппроксимации заданных точек на плоскости различными кривыми: полиномами Лагранжа второй, третьей, четвертой степени, проходящего через все заданные точки и кубическим сплайном с тремя, четырьмя, пятью и всеми заданными узловыми точками.

Задачей курсовой работы является обучение программной реализации полинома Лагранжа и кубического сплайна, а также разработка программного продукта для проведения исследований по приближению кривой, заданной своими точками.

Постановка задачи исследования

Дана последовательность точек на плоскости $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, заданная своими декартовыми координатами. Необходимо построить:

1. интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x, k)$, проходящий через начальную, конечную точку и точку (x_k, y_k) , $1 \leq k \leq n-1$, минимизирующий среднеквадратичное расстояние

$$\rho = \min_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (L_2(x_i, k) - y_i)^2};$$

кубический сплайн по этим точкам и его среднеквадратичное отклонение; кубический сплайн, проходящий через начальную, конечную точку и точку (x_k, y_k) , $1 \leq k \leq n-1$, с минимальным среднеквадратичным отклонением;

2. интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x, k, p)$, проходящий через начальную, конечную точку и точки (x_k, y_k) , (x_p, y_p) , $1 \leq k, p \leq n-1$, минимизирующий среднеквадратичное расстояние

$$\rho = \min_{1 \leq k, p \leq n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (L_2(x_i, k, p) - y_i)^2};$$

кубический сплайн по этим точкам и его среднеквадратичное отклонение; кубический сплайн, проходящий

- через начальную, конечную точку и точки (x_k, y_k) , (x_p, y_p) , $1 \leq k, p \leq n-1$, с минимальным среднеквадратичным отклонением;
3. интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x, k, p, l)$, проходящий через начальную, конечную точку и точки (x_k, y_k) , (x_p, y_p) , (x_l, y_l) , $1 \leq k, p, l \leq n-1$, минимизирующий среднеквадратичное расстояние
- $$\rho = \min_{1 \leq k, p, l \leq n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (L_2(x_i, k, p, l) - y_i)^2};$$
- кубический сплайн по этим точкам и его среднеквадратичное отклонение; кубический сплайн, проходящий через начальную, конечную точку точки (x_k, y_k) , (x_p, y_p) , (x_l, y_l) , $1 \leq k, p, l \leq n-1$, с минимальным среднеквадратичным отклонением;
4. для каждого выполненного пункта построить графики, на каждом из которых отображаются построенные интерполяционный полином Лагранжа и кубические сплайны вместе с их среднеквадратичными отклонениями, а также исходные точки с выделением по каким точкам строились интерполяционный полином Лагранжа и кубический сплайн;
5. интерполяционный полином Лагранжа и кубический сплайн по всем заданным точкам с их отображением на отдельных рисунках.

Провести анализ полученных результатов и сделать выводы об аппроксимации точек полиномами Лагранжа и кубическими сплайнами.

Пример выполнения курсовой работы

Исходные данные

[0.0000, 0.0000], [0.3378, 0.0000], [1.9857, 1.0954], [2.7397, 2.2093], [3.2549, 3.3047], [3.6523, 4.4186], [4.1283, 6.6279], [4.4456, 8.8537], [4.8243, 11.0630], [5.4981, 13.2723], [6.0747, 14.3863], [6.6496, 15.5002], [8.4954, 17.7096], [11.0167, 19.9189], [13.5568, 22.1282], [15.4026, 24.3354], [16.3357, 25.4493], [17.2688, 26.5633], [18.5602, 28.7726], [19.1948, 29.8865], [19.8499, 31.0005];

На нижеследующем рисунке отображены все заданные точки:

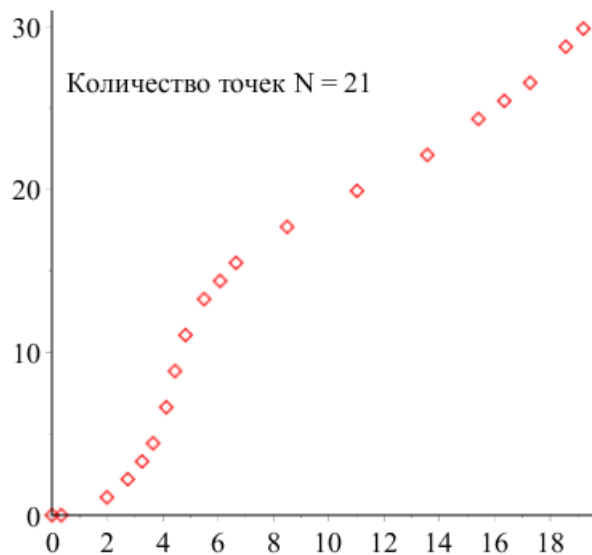


Рис. 1. Заданные точки

Программа построения полинома Лагранжа

Студент должен разработать программу построения полинома Лагранжа для произвольной системы точек на любом языке программирования и привести ее текст.

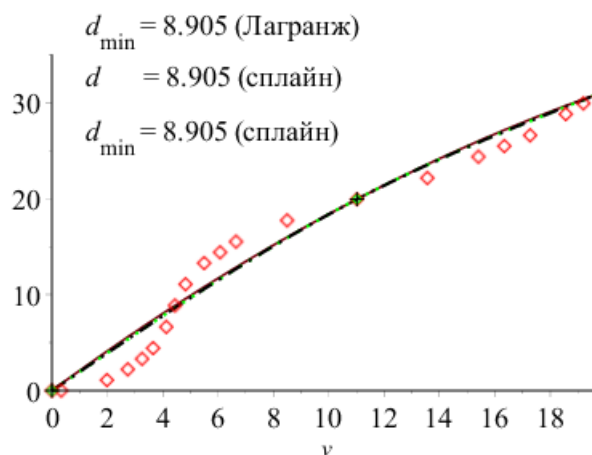
Программа построения кубического сплайна

Студент должен разработать программу построения кубического сплайна по произвольной системе узловых точек на любом языке программирования и привести ее текст.

Полином Лагранжа и сплайн по трем точкам

С использованием разработанных программ выполняются пункты 1 и 4 задания.

Результат представлен на рисунке.



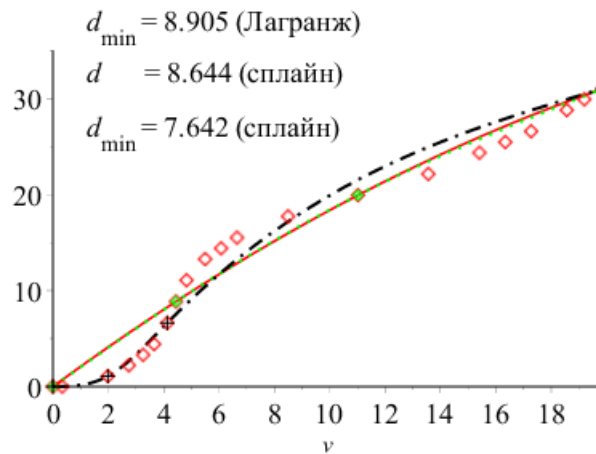
Наилучший полином Лагранжа степени 2 (красная линия) и сплайн (точечная зеленая линия), проходящие через точки номер 14.
 Наилучший сплайн (пунктирно-точечная черная линия), проходящий через точки номер 14;

Студент должен сделать выводы о качестве приближения таблично-заданной функции полиномом Лагранжа второй степени и кубическим сплайном по трем узлам.

Полином Лагранжа и сплайн по четырем точкам

С использованием разработанных программ выполняются пункты 2 и 4 задания.

Результат представлен на рисунке.



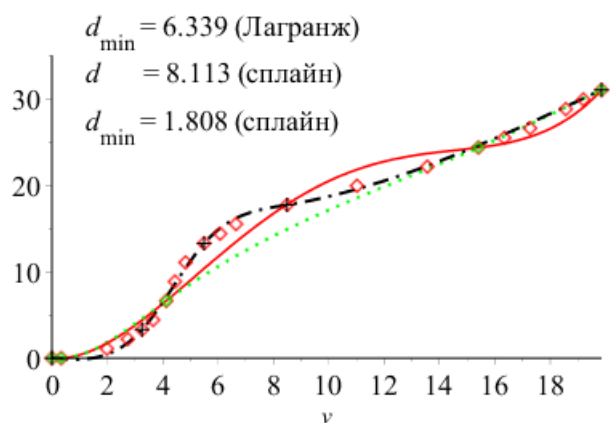
Наилучший полином Лагранжа степени 3 (красная линия) и сплайн (точечная зеленая линия), проходящие через точки номер 8 и 14. Наилучший сплайн (пунктирно-точечная черная линия), проходящий через точки номер 3 и 7.

Студент должен сделать выводы о качестве приближения таблично-заданной функции полиномом Лагранжа второй степени и кубическим сплайном по трем узлам.

Полином Лагранжа и сплайн по пяти точкам

С использованием разработанных программ выполняются пункты 4 и 4 задания.

Результат представлен на рисунке.



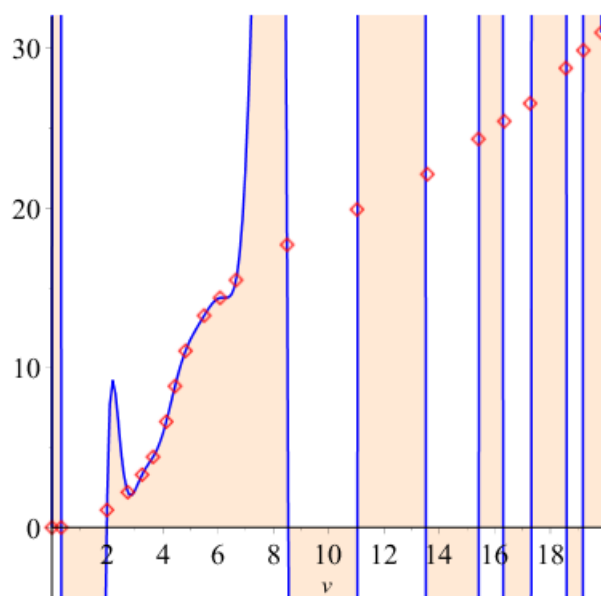
Наилучший полином Лагранжа степени 4 (красная линия) и сплайн (точечная зеленая линия), проходящие через точки номер 2 и 7 и 16. Наилучший сплайн (пунктирно-точечная черная линия), проходящий через точки номер 5 и 10 и 13.

Студент должен сделать выводы о качестве приближения таблично-заданной функции полиномом Лагранжа второй степени и кубическим сплайном по трем узлам.

Полином Лагранжа и сплайн по всем точкам

С использование разработанных программ выполняется пункт 5 задания.

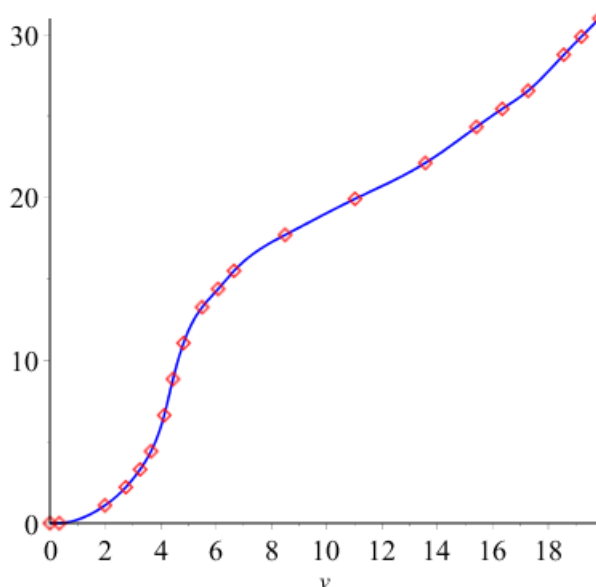
Полином Лагранжа представлен на нижеприводимом рисунке.



Полином Лагранжа, проходящий через все точки

Отметим осцилляции с большими амплитудами полинома Лагранжа (его степень 20). На рисунке ордината ограничена интервалом $[-5, 35]$. Максимальная амплитуда $1.2213 \cdot 10^5$ достигается на интервале изменения независимой переменной $[x_{20}, x_{21}]$.

Слайн представлен на нижеприводимом рисунке.



Слайн, проходящий через все точки

Студент должен сделать выводы о качестве приближения таблично-заданной функции полиномом Лагранжа большой степени и кубическим сплайном с узлами по всем точкам.

Выводы

Следует сделать общие выводы о приближении таблично-заданной функции полиномами Лагранжа разных степеней и сплайнами с различным числом узловых точек, отметив тенденцию в характере приближающих функций с увеличением степени полинома и количества используемых узлов для сплайна.

Задания для выполнения

Вариант 1.

[0.0000,14.1548],[2.6800,14.5248],[4.6639,15.2688],[6.7485,16.3827],[9.3296,18.2386],[11.4142,19.9085],[13.5568,22.1282],[15.4026,24.3354],[16.3357,25.4493],[17.2688,26.5633],[18.5602,28.7726],[19.1948,29.8865],[19.8499,31.0005]

Вариант 2.

[0.0000, 19.5262],[0.5288, 19.5592],[0.9792, 19.6957],[1.3903, 19.9189],[3.0774,21.0142],[3.9304, 21.5701],[4.7833, 22.1282],[5.9144, 23.2235],[6.4705, 23.7795],[7.0471, 24.3354],[7.6032, 24.8934],[8.1781, 25.4493],[8.7342, 26.0074],[9.3091, 26.5633],[10.0443, 27.6586],[10.4213, 28.2167],[10.7983, 28.7726],[11.1754, 29.3306],[11.5524, 29.8865],[12.3064, 31.0005]

Вариант 3.

[0.0000, 16.2897],[2.5810, 17.2177],[4.5650, 18.3316],[7.1460, 20.1875],[9.5479, 22.1282],[11.6325, 24.3354],[12.6646, 25.4493],[13.7154, 26.5633],[15.1057, 28.7726],[15.8000, 29.8865],[16.5148, 31.0005]

Вариант 4.

[0.0000, 14.1548],[2.6800, 14.5248],[4.6639, 15.2688],[6.7485, 16.3827],[9.3296, 18.2386],[11.4142, 19.9085],[13.5568, 22.1282],[15.4026, 24.3354],[16.3357, 25.4493],[17.2688, 26.5633],[18.5602, 28.7726],[19.1948, 29.8865],[19.8499, 31.0005]

Вариант 5.

[0.0000, 0.0000],[1.8663, 0.0000],[4.3876, 1.0954],[5.5971, 2.2093],[6.3323, 3.3047],[6.9481, 4.4186],[7.8011, 6.6279],[8.4561, 8.8537],[9.2102, 11.0630],[10.1433, 13.2723],[10.7983, 14.3863],[11.4739, 15.5002],[13.1201, 17.7096],[15.0665, 19.9189],[17.0112, 22.1282],[18.5397, 24.3354],[19.3142, 25.4493],[20.0870, 26.5633],[21.2589, 28.7726],[21.8338, 29.8865],[22.4309, 31.0005]

Вариант 6.

[0.0000, 0.0000],[3.7513, 0.0000],[6.8475, 1.0954],[8.3367, 2.2093],[9.3688, 3.3047],[10.1825, 4.4186],[11.3545, 6.6279],[12.3064, 8.8537],[13.2600, 11.0630],[14.3517, 13.2723],[14.9659, 14.3863],[15.6022, 15.5002],[17.0112, 17.7096],[18.4595, 19.9189],[19.8499, 22.1282],[21.0798, 24.3354],[21.6956, 25.4493],[22.3302, 26.5633],[23.3435, 28.7726],[23.8587, 29.8865],[24.3756, 31.0005]

Вариант 7.

[0.0000, 0.0000],[7.6817, 0.0000],[11.9106, 1.0954],[13.8161, 2.2093],[15.1655, 3.3047],[16.2180, 4.4186],[17.8454, 6.6279],[19.0754, 8.8537],[20.0682, 11.0630],[20.9809, 13.2723],[21.4176, 14.3863],[21.8543, 15.5002],[22.6680, 17.7096],[23.4425, 19.9189],[24.2170, 22.1282],[24.9317,

24.3354],[25.2883, 25.4493],[25.6465, 26.5633],[26.2606, 28.7726],[26.5779, 29.8865],[26.8969, 31.0005]

Вариант 8.

[0.0000, 0.0000],[11.8099, 0.0000],[16.6342, 1.0954],[18.7188, 2.2093],[20.1279, 3.3047],[21.1992, 4.4186],[22.7874, 6.6279],[23.8587, 8.8537],[24.6332, 11.0630],[25.2490, 13.2723],[25.5066, 14.3863],[25.7642, 15.5002],[26.1822, 17.7096],[26.5779, 19.9189],[26.9754, 22.1282],[27.3132, 24.3354],[27.4923, 25.4493],[27.6697, 26.5633],[27.9478, 28.7726],[28.0876, 29.8865],[28.2463, 31.0005]

Вариант 9

[0.0000, 0.0000],[15.9195, 0.0000],[20.6840, 1.0954],[22.6083, 2.2093],[23.9184, 3.3047],[24.8720, 4.4186],[26.1224, 6.6279],[26.8372, 8.8537],[27.2535, 11.0630],[27.6100, 13.2723],[27.7499, 14.3863],[27.8881, 15.5002],[28.1064, 17.7096],[28.2651, 19.9189],[28.4049, 22.1282],[28.5244, 24.3354],[28.5841, 25.4493],[28.6438, 26.5633],[28.7222, 28.7726],[28.7615, 29.8865],[28.8212, 31.0005]

Вариант 10

[0.0000, 0.0000],[9.9045, 0.0000],[15.5817, 1.0954],[17.6868, 2.2093],[19.0361, 3.3047],[20.0477, 4.4186],[21.4176, 6.6279],[22.2518, 8.8537],[22.8079, 11.0630],[23.2037, 13.2723],[23.3623, 14.3863],[23.5414, 15.5002],[23.8400, 17.7096],[24.1572, 19.9189],[24.4541, 22.1282],[24.7526, 24.3354],[24.9113, 25.4493],[25.0699, 26.5633],[25.3872, 28.7726],[25.5459, 29.8865],[25.7045, 31.0005]

Вариант 11

[0.0000, 0.0000],[5.9144, 0.0000],[11.3732, 1.0954],[13.4186, 2.2093],[14.8072, 3.3047],[15.8000, 4.4186],[17.2501, 6.6279],[18.1815, 8.8537],[18.8178, 11.0630],[19.3142, 13.2723],[19.5121, 14.3863],[19.7100, 15.5002],[20.1074, 17.7096],[20.5049, 19.9189],[20.9212, 22.1282],[21.3579, 24.3354],[21.5762, 25.4493],[21.8150, 26.5633],[22.2910, 28.7726],[22.5298, 29.8865],[22.7669, 31.0005]

Вариант 12

[0.0000, 0.0000],[2.9580, 0.0000],[7.1460, 1.0954],[8.8724, 2.2093],[10.0631, 3.3047],[10.8973, 4.4186],[12.1085, 6.6279],[12.8830, 8.8537],[13.4186, 11.0630],[13.8741, 13.2723],[14.0737, 14.3863],[14.2920, 15.5002],[14.7287, 17.7096],[15.2047, 19.9189],[15.7216, 22.1282],[16.2965, 24.3354],[16.5745, 25.4493],[16.8714, 26.5633],[17.5077, 28.7726],[17.8249, 29.8865],[18.1422, 31.0005]

Вариант 13

[0.0000, 0.0000],[0.5357, 0.0000],[3.2156, 1.0954],[4.4063, 2.2093],[5.1808, 3.3047],[5.7369, 4.4186],[6.4705, 6.6279],[6.8884, 8.8537],[7.1460, 11.0630],[7.3644, 13.2723],[7.4838, 14.3863],[7.6220, 15.5002],[7.9205, 17.7096],[8.3163, 19.9189],[8.7939, 22.1282],[9.4080, 24.3354],[9.7066, 25.4493],[10.0239, 26.5633],[10.7983, 28.7726],[11.1754, 29.8865],[11.5728, 31.0005]

Вариант 14

[0.0000, 19.9189],[0.0392, 20.4562],[0.0989, 21.0142],[0.1382, 21.5701],[0.1979, 22.1282],[0.3173, 22.6655],[0.4367, 23.2235],[0.5561, 23.7795],[0.6755, 24.3354],[0.7932, 24.8934],[0.9127, 25.4493],[1.0321, 26.0074],[1.1720, 26.5633],[1.6087, 27.6586],[1.8253, 28.2167],[2.0641, 28.7726],[2.2825, 29.3306],[2.5008, 29.8865],[2.7192, 30.4446],[2.9580, 31.0005]

Вариант 15 (усложненный)

[0.0000, 0.0000],[19.6912, 0.0000],[23.7802, 1.0954],[25.3480, 2.2093],[26.4005, 3.3047],[27.0948, 4.4186],[27.9887, 6.6279],[28.4254, 8.8537],[28.6438, 11.0630],[28.7427, 13.2723],[28.7615, 14.3863],[28.8024, 15.5002],[28.8621, 17.7096],[28.9014, 19.9189],[28.9201, 22.1282],[28.9611, 24.3354],[28.9711, 25.4493],[28.9811, 26.5633],[28.9911, 28.7726],[28.9991, 29.8865],[29.0003, 31.0005]

Вариант 16 (усложненный)

[0.0000, 0.0000],[23.3231, 0.0000],[26.7963, 1.0954],[27.9290, 2.2093],[28.5841, 3.3047],[28.9201, 4.4186],[28.9503, 6.6279],[29.0003, 31.0005]

Вариант 17 (усложненный)

[0.0000, 0.0000],[22.1119, 0.0000],[25.6056, 1.0954],[26.8765, 2.2093],[27.6902, 3.3047],[28.2258, 4.4186],[28.7222, 6.6279],[28.8212, 8.8537],[28.8024, 11.0630],[28.8417, 13.2723],[28.8621, 14.3863],[28.8809, 15.5002],[28.9014, 17.7096],[28.9406, 19.9189],[28.9611, 22.1282],[28.9798, 24.3354],[28.988, 25.4493],[28.9813, 26.5633],[29.0003, 31.0005]

Вариант 18 (усложненный)

[0.0000, 0.0000],[17.5861, 0.0000],[22.0726, 1.0954],[23.7598, 2.2093],[24.8720, 3.3047],[25.6653, 4.4186],[26.6376, 6.6279],[27.1340, 8.8537],[27.3336, 11.0630],[27.4923, 13.2723],[27.5315, 14.3863],[27.5912, 15.5002],[27.7294, 17.7096],[27.8693, 19.9189],[27.9887, 22.1282],[28.1064, 24.3354],[28.1661, 25.4493],[28.2463, 26.5633],[28.3657, 28.7726],[28.4254, 29.8865],[28.5039, 31.0005]