Тема 2. Введение в линейное программирование (ЛП)

Цель: научить распознавать основные проблемные ситуации, которые могут быть формализованы в виде задачи линейного программирования, познакомить с геометрическим методом нахождения оптимального решения и анализом оптимального решения на чувствительность.

Задачи:

- ввести понятие задачи линейного программирования (задачи ЛП);
- научить формализовывать проблемы, приводящие к задачам ЛП;
- ввести понятия допустимого и оптимального решений, значения задачи ЛП;
- научить находить оптимальное решение задачи ЛП геометрическим методом;
- дать представление об анализе оптимального решения ЛП на чувствительность.

Оглавление

§ 2.1. Правила построения математической модели. Примеры задач линейного программирования

Линейное программирование или сокращенно ЛП (Linear Programming, LP) – это раздел более общей теории математического программирования (Mathematical Programming, MP). *Математическое программирование* занимается изучением проблем принятия решений, которые могут быть математически сформулированы как задачи нахождения максимума (минимума) некоторой, вообще говоря, нелинейной функции (целевой функции) многих переменных, при заданной системе ограничений на основные переменные задачи.

Формализация проблемы как задачи ЛП подразумевает следующие этапы:

- понять проблему, составить описательную модель задачи;
- идентифицировать основные переменные задачи;
- выбрать некоторую количественную меру эффективности для целевой функции;

- представить эту меру эффективности как линейную функцию относительно основных переменных;
- идентифицировать и представить все ограничения как линейные уравнения или неравенства относительно основных переменных;
- собрать количественные данные или сделать соответствующие оценки для всех параметров модели.

Основные *математические предположения* для задачи ЛП (основные ограничения на применение):

- *определенность (детерминированность)* – предполагается, что все параметры модели известны точно или могут быть оценены;
- *линейность (эквивалентна пропорциональности и аддитивности)* – предполагается, что все функциональные соотношения модели линейны относительно основных переменных;
    - *пропорциональность* – предполагается, что эффект влияния основной переменной задачи пропорционален значению этой переменной;
    - *аддитивность* – предполагается, что эффект влияния нескольких основных переменных задачи равен сумме эффектов от каждой переменной;
- *делимость* – предполагается, что все основные переменные задачи могут принимать произвольные вещественные значения в определенном диапазоне (бесконечно делимы).

Рассмотрим несколько задач, которые можно сформулировать как задачи линейного программирования.

Пример 2.1.1. (*Построение оптимального плана производства*)

Кондитерская фабрика производит продукцию двух видов: конфеты и шоколад. Для производства продукции каждого вида требуются ресурсы двух типов: сахар и какао-бобы. Для производства одной тонны продукции каждого вида требуется по одной тонне сахара. Для производства одной тонны шоколада требуется 5 тонн какао, а для производства одной тонны конфет – 2 тонны какао. Суточные запасы ресурсов равны 4 и 10 тонн соответственно. Прибыль от реализации одной тонны шоколада и конфет составляет 5 и 3 тысячи рублей соответственно. Написать математическую модель для нахождения оптимального (т. е. максимизирующего прибыль) суточного плана производства.

Основные данные задачи можно представить в виде таблицы:

Исходные ресурсы	Расход ресурсов на 1 тонну готовой продукции		Запас ресурса
	Шоколад	Конфеты	
Сахар	1	1	4
Какао	5	2	10
Прибыль	5	3	

Определим основные составляющие задачи линейного программирования.

Переменные:

x_1 – суточный объем производства шоколада,

x_2 – суточный объем производства конфет.

Целевая функция: общая прибыль от реализации суточного плана $x = (x_1, x_2)$ определяется линейной функцией $z = 5x_1 + 3x_2$.

Ограничения: содержательно ограничения на запас ресурсов можно записать следующим образом

$$\begin{pmatrix}\text{Расход}\\ \text{ресурса}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Запас}\\ \text{ресурса}\end{pmatrix},$$

используя данные таблицы, получаем линейные ограничения

- на расход сахара

$$x_1 + x_2 \le 4;$$

- на расход какао-бобов

$$5x_1 + 2x_2 \le 10;$$

- на знак переменных

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Окончательно задача принимает вид:

$$\max z = \max(5x_1 + 3x_2)$$

при выполнении ограничений

$$x_1 + x_2 \le 4;$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Пример 2.1.2. (*Формирование смеси минимальной стоимости*)

Фармацевтическая фабрика ежедневно производит не менее 800 фунтов пищевой добавки – смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в таблице (в фунтах на фунт муки):

Мука	Кукуруза	Соевая
Белок	0,09	0,6
Клетчатка	0,02	0,06
Стоимость (в долл. за фунт)	0,3	0,9

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30 % белка и не более 5 % клетчатки. Фирма хочет определить рецептуру смеси минимальной стоимости с учетом требований диетологов.

Переменные:

x_1– количество кукурузной муки, используемой в дневном производстве пищевой добавки;

x_2 – количество соевой муки, используемой в дневном производстве пищевой добавки.

Целевая функция: требуется минимизировать общую стоимость произведенной пищевой добавки, которая может быть вычислена с помощью линейной функции $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$.

Ограничения:

- на количество производимой смеси

$$x_1 + x_2 \geq 800;$$

- на количество белка в пищевой добавке

$$0,09x_1 + 0,6x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2);$$

- на количество клетчатки в пищевой добавке

$$0,02x_1 + 0,06x_2 \leq 0,05(x_1 + x_2);$$

- на знак переменных

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

После переноса переменных в левую часть ограничений задача примет вид:

$$\min z = \min(0,3x_1 + 0,9x_2)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \geq 800;$$
$$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0;$$
$$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0;$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Пример 2.1.3. (*Поиск оптимального плана производства*)

Автомобильная компания производит легковые автомобили и грузовики. Каждое транспортное средство должно обрабатываться в покрасочном и сборочном цехах. Если бы в покрасочном цехе обрабатывались только грузовые автомобили, то можно было бы покрасить 40 машин в день. Если бы обрабатывались только легковые автомобили, то выпуск составил бы 60 единиц продукции. В сборочном цехе обрабатывается 50 транспортных средств в день. Прибыль от производства одного легкового автомобиля и грузовика составляет 200$ и 300$ соответственно. Определить оптимальный ежедневный выпуск продукции, обеспечивающий максимальную прибыль компании.

Переменные:

x_1 – количество грузовиков, производимых ежедневно;

x_2 – количество автомобилей, производимых ежедневно.

Ограничения:

- на время использования покрасочного цеха

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1,$$

где

$\frac{1}{40}$ – время (в днях), идущее на покраску одного грузовика;

$\frac{1}{60}$ – время (в днях), идущее на покраску одного автомобиля;

- на время использования сборочного цеха

$$x_1 + x_2 \leq 50;$$

- на знак переменных

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Целевая функция:

Суммарный доход компании определяется функцией

$$z = 300x_1 + 200x_2.$$

Окончательно имеем задачу

$$\max z = \max\left(300x_1 + 200x_2\right)$$

при ограничениях

$$3x_1 + 2x_2 \leq 120;$$

$$x_1 + x_2 \leq 50;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Замечание 2.1.1. Поскольку переменные задачи характеризуют план выпуска транспортных средств, они могут принимать только целочисленные значения, т.е. свойство делимости в данной задаче не выполняется. Однако отмеченная проблема легко преодолима. Например, если в процессе решения задачи получим оптимальный план ежедневного выпуска $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}\right)$, то это эквивалентно рекомендации производить 10 грузовиков и 13 легковых автомобилей за 4 дня.

Пример 2.1.4. (*Определение кредитной политики банка*)

Банк, предоставляющий полный набор банковских услуг, находится в процессе формирования портфеля кредитов объемом 12 млн. дол. В таблице представлены возможные типы банковских кредитов.

Тип кредита	Ставка кредита	Вероятность безнадежных долгов
Нецелевые кредиты	0,14	0,1
На покупку автомобилей	0,13	0,07
На покупку жилья	0,12	0,03
Сельскохозяйственные	0,125	0,05
Коммерческие	0,1	0,02

Конкурентная борьба с другими финансовыми институтами вынуждает банк не менее 40 % капитала помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не менее 50 % от общей суммы нецелевых кредитов, кредитов на покупку автомобилей и жилья. Максимально возможная доля безнадежных долгов в кредитном портфеле составляет 4 %.

Переменные:

x_1 – сумма нецелевых кредитов;

x_2 – сумма кредитов на покупку автомобилей;

x_3 – сумма кредитов на покупку жилья;

x_4 – сумма сельскохозяйственных кредитов;

x_5 – сумма коммерческих кредитов.

Целевая функция: банк максимизирует прибыль, т. е. разность между доходом и ожидаемой суммой невозвращенных кредитов, которую можно вычислить так:

$$z = 0{,}14 \times 0{,}9x_1 + 0{,}13 \times 0{,}93x_2 + 0{,}12 \times 0{,}97x_3 + 0{,}125 \times 0{,}95x_4 +$$
$$+ 0{,}1 \times 0{,}98x_5 - 0{,}1x_1 - 0{,}07x_2 - 0{,}03x_3 - 0{,}05x_4 - 0{,}02x_5.$$

Ограничения:

- на общую сумму кредитов
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 12;$$
- на сельскохозяйственные и коммерческие кредиты
$$x_4 + x_5 \le 0{,}4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5);$$
- на покупку жилья
$$x_3 \ge 0{,}5\left(x_1 + x_2 + x_3\right);$$
- на невозвращенные кредиты
$$\frac{0{,}1x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}02x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \le 0{,}04;$$
- условия неотрицательности переменных
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

После приведения подобных членов в целевой функции и преобразования ограничений, получаем задачу:

$$\max z = 0{,}026x_1 + 0{,}0509x_2 + 0{,}0864x_3 + 0{,}06875x_4 + 0{,}078x_5$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 12;$$
$$0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4x_3 - 0{,}6x_4 - 0{,}6x_5 \ge 0;$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 \le 0;$$
$$0{,}06x_1 + 0{,}03x_2 - 0{,}01x_3 + 0{,}01x_4 - 0{,}02x_5 \le 0;$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

§ 2.2. Задача линейного программирования (задача ЛП)

Математически задача ЛП – задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения линейной функции многих переменных при линейных ограничениях типа равенств (неравенств), когда на переменные задачи есть (нет) ограничений на знак.

В общем случае задача линейного программирования может быть записана следующим образом:

- задача максимизации

$$\max z = \max(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) \tag{2.2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

- задача минимизации

$$\min z = \min(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) \tag{2.2.3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i,\ i = \overline{1,m}, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Здесь

$x_j, j = \overline{1,n}$ – переменные модели,

$z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ – целевая функция,

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$ – ограничение с номером i, $i = \overline{1,m}$,

$x_j \ge 0$ – условие неотрицательности переменной j, $j = \overline{1,n}$,

c_j, a_{ij}, b_i – заданные параметры, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Вектор $X = (x_1, \cdots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи, называется *допустимым решением* задачи ЛП.

Допустимым множеством решений задачи ЛП называется множество векторов $X = (x_1, \cdots, x_n)$, удовлетворяющих всем ограничениям задачи.

Вектор $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, доставляющий максимум (минимум) функции z при заданных ограничениях, называется *оптимальным решением* задачи ЛП. Соответственно, наибольшее $z^* = z\left(X^*\right)$(наименьшее $z_* = z\left(X^*\right)$) значение целевой функции называется *значением задачи ЛП.*

Решить задачу ЛП означает найти оптимальное решение $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ и соответствующее значение целевой функции $z\left(x^*\right)$, т. е. значение задачи ЛП.

§ 2.3. Геометрическая структура множества допустимых решений в задаче линейного программирования

Приведем некоторые понятия из теории выпуклых множеств и сформулируем теорему о геометрической структуре множества допустимых решений в задаче ЛП.

Напомним, что элементы пространства R^n называются как точками, так и векторами.

Множество $M \subset R^n$ называется *выпуклым*, если для двух любых точек $X^1, X^2 \in M$ и любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется условие:

$$\lambda X^1 + (1-\lambda) X^2 \in M.$$

Другими словами, множество называется *выпуклым*, если с любыми двумя точками из этого множества ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Пусть $M \subset R^n$ – выпуклое множество. Точка $X^0 \in M$ называется *крайней (экстремальной) точкой* множества M, если из условия

$$X^0 = \lambda X^1 + (1-\lambda) X^2,\ X^1, X^2 \in M,\ \lambda \in (0,1)$$

следует, что

$$X^0 = X^1 = X^2.$$

Выпуклой линейной комбинацией точек $X^1, \ldots, X^r \in R^n$ называется точка, которую можно представить в виде:

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^i;\ \lambda_i \geq 0;\ i = \overline{1,r};\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Выпуклым многогранником M, порожденным точками $X^1, \ldots, X^r \in R^n$, называется множество всевозможных выпуклых линейных комбинаций точек $X^1, \ldots, X^r$:

$$M = \left\{ X \in R^n \,\middle|\, X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^i;\ \lambda_i \geq 0;\ i = \overline{1,r};\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Конечным конусом K, порожденным векторами $A^1, \ldots, A^r \in R^n$, называется множество всех векторов $X \in R^n$, удовлетворяющих условию:

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A^i;\ \lambda_i \geq 0;\ i = \overline{1,r};\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Рассмотрим систему нестрогих линейных неравенств (2.2.2) или (2.2.4).

Каждое линейное ограничение типа неравенства задает в R^n отрицательное (положительное) полупространство

$$\pi_i^- = \left\{ X \middle| a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \right\}$$

$$(\pi_i^+ = \left\{ X \middle| a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \right\}),$$

ограниченное гиперплоскостью $\pi_i = \left\{ X \middle| a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \right\}$.

Множество векторов, удовлетворяющих системе (2.2.2) или (2.2.4), можно представить как пересечение $m+n$ полупространств: $M=\bigcap_{i=1}^{m+n}\pi_i^-$ ($M=\bigcap_{i=1}^{m+n}\pi_i^+$). Такое множество M называется *многогранным множеством.*

Теорема 2.3.1 (*о геометрической структуре множества допустимых решений в задаче ЛП*).

Множество M допустимых решений задачи линейного программирования можно представить в виде:

$$M=M^0+K,$$

где M^0 – выпуклый многогранник, порожденный крайними точками множества M; K – конечный конус.

§ 2.4. Геометрический метод решения задачи ЛП

Геометрический (графический) метод применим только для задач малой размерности (количество переменных в задаче равно 2 или 3), поскольку он основан на геометрическом построении множества допустимых решений в задаче ЛП.

Рассмотрим геометрический метод решения задачи ЛП на нескольких примерах.

Пример 2.4.1. Решим графически задачу из примера 2.1.1:

$$\max z=\max 5x_1+3x_2,$$

$$x_1+x_2\le 4; \qquad (1)$$

$$5x_1+2x_2\le 10; \qquad (2)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0. \qquad (3)$$

Геометрический метод реализуется в два этапа:

- построение допустимого множества решений задачи ЛП;
- нахождение оптимального решения среди всех допустимых.

Первому ограничению задачи соответствует прямая $x_1+x_2=4$, обозначенная на рис. 2.4.1 значком (1). Точки пересечения этой прямой с осями координат: $(4,0),(0,4)$. Прямая $5x_1+2x_2=10$, соответствующая второму ограничению, пересекается с осями координат в точках $(2,0),(0,5)$. Аналогичным образом учитываем ограничения (3) на знак переменных. Множество допустимых решений данной задачи изображено на рис. 2.4.1 в виде заштрихованного четырехугольника.

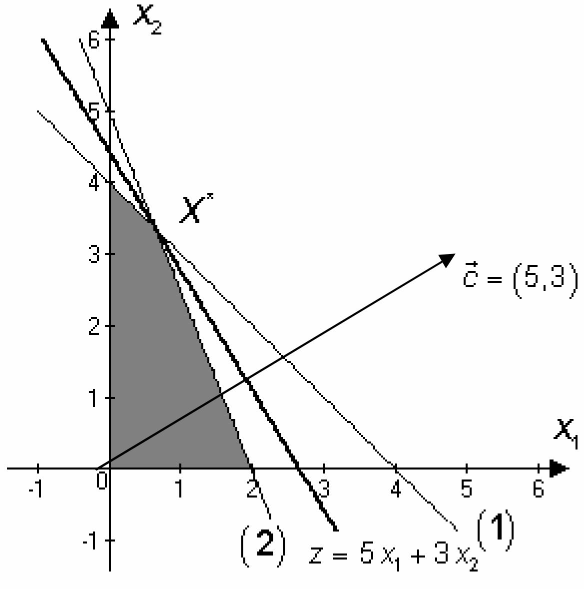

Рис. 2.4.1

Нахождение оптимального решения требует определения направления наискорейшего роста целевой функции z. Такое направление задается градиентом целевой функции:

$$\text{grad}\, z(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right).$$

Так как $z = 5x_1 + 3x_2$, то направление наискорейшего роста функции z определяется вектором $\vec{c} = (5,3)$. Вектор $\vec{c} = (5,3)$ также является вектором нормали к линии уровня целевой функции $z = 5x_1 + 3x_2 = \text{const}$.

Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимальному значению целевой функции, и будет решением задачи ЛП.

На рис. 2.4.1 видно, что это точка является точкой пересечения прямых (1) и (2). Ее координаты можно найти как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} x_1^* + x_2^* = 4 \\ 5x_1^* + 2x_2^* = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 2/3 \\ x_2^* = 10/3 \end{cases}.$$

Таким образом,

$X^* = (2/3, 10/3)$ – оптимальное решение;

$z(X^*) = 5 \cdot 2/3 + 3 \cdot 10/3 = 40/3$ – максимальное значение целевой функции.

Пример 2.4.2. Решим геометрически задачу из примера 2.1.2:

$$\min z = \min(0{,}3x_1 + 0{,}9x_2)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \geq 800; \qquad (1)$$
$$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0; \qquad (2)$$
$$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0; \qquad (3)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Постоим множество допустимых решений как пересечение полуплоскостей, соответствующих трем ограничениям задачи. Заметим, что получившееся множество неограничено (рис.2.4.2) .

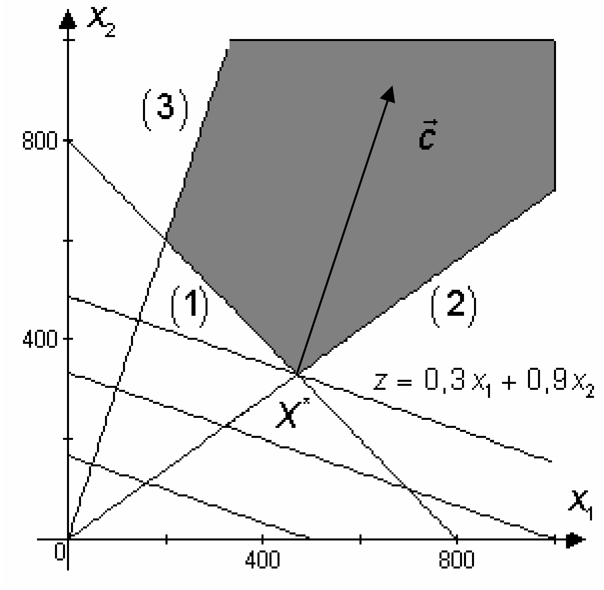

Рис. 2.4.2

Поскольку в данной задаче требуется найти минимум целевой функции $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$, нас будет интересовать точка пересечения множества допустимых решений с линией уровня целевой функции, соответствующей минимально возможному значению z. Такой точкой является точка пересечения прямых (1) и (2). Чтобы найти координаты оптимальной точки X^*, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^* + x_2^* = 800, \\ 0,21x_1^* - 0,3x_2^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 470,6 \\ x_2^* = 329,4 \end{cases}.$$

При данных значениях переменных минимальная стоимость пищевой добавки составляет $z\left(X^*\right) = 0,3x_1^* + 0,9x_2^* = 437,64$.

Пример 2.4.3. Решим геометрически задачу из примера 2.1.3.

$$\max z = \max\left(300x_1 + 200x_2\right)$$

при ограничениях

$$3x_1 + 2x_2 \le 120; \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \le 50; \quad (2)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \quad (3)$$

Множество допустимых решений задачи приведено на рис. 2.4.3 и представляет собой заштрихованный четырехугольник. Поскольку вектор коэффициентов целевой функции $\vec{c} = (300, 200)$ задает то же направление, что и вектор коэффициентов первого ограничения $(3,2)$, любая точка отрезка AB является оптимальной. В качестве оптимального решения можно взять либо точку $A(20,30)$, либо точку $B(40,0)$, либо любую точку на отрезке AB.

Максимальную прибыль компании можно найти так:

$$z(X^*) = z(B) = 300 * 40 = 1200.$$

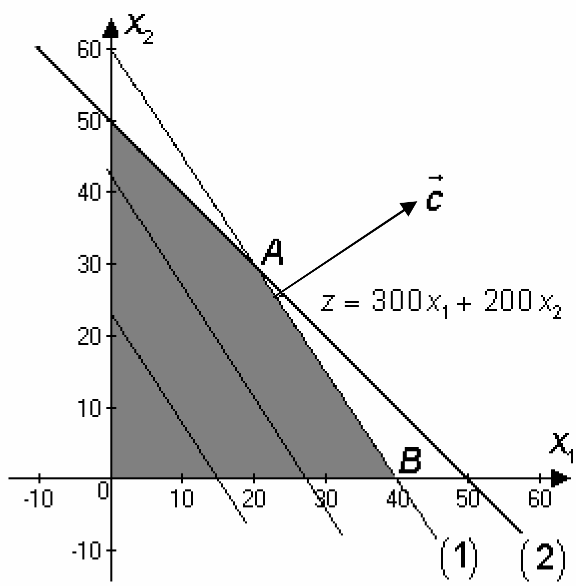

Рис. 2.4.3

Пример 2.4.4. Добавим в предыдущую задачу еще два ограничения $x_1 \ge 30, x_2 \ge 20$, тогда задача будет иметь вид

$$\max z = \max(300x_1 + 200x_2)$$

при ограничениях

$$3x_1 + 2x_2 \le 120; \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \le 50; \quad (2)$$
$$x_1 \ge 30; \quad (3)$$
$$x_2 \ge 20; \quad (4)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \quad (5)$$

Как видно из рис. 2.4.4 множество допустимых решений пусто, поэтому задача не имеет и оптимального решения.

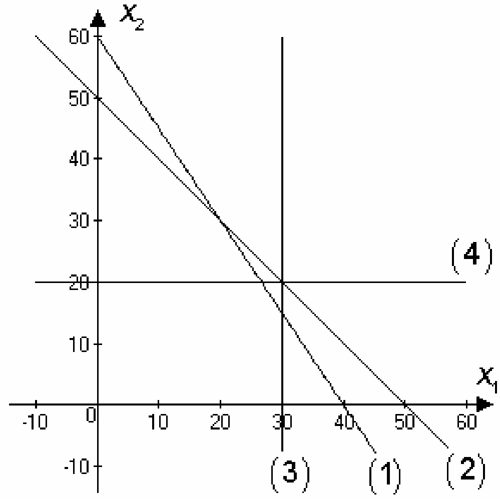

Рис. 2.4.4

Пример 2.4.5. Решить задачу

$$\max z = \max(2x_1 - x_2)$$

при ограничениях

$$x_1 - x_2 \le 1; \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \ge 6; \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (3)$$

Множество допустимых решений этой задачи неограничено (рис. 2.4.5). Градиент целевой функции: $\vec{c} = (2,-1)$. При «движении» линии уровня в направлении градиента целевая функция неограниченно возрастает, как следствие, задача не имеет оптимального решения. Отметим, что ограничение $x_1 \ge 0$ в данной задаче ЛП является избыточным.

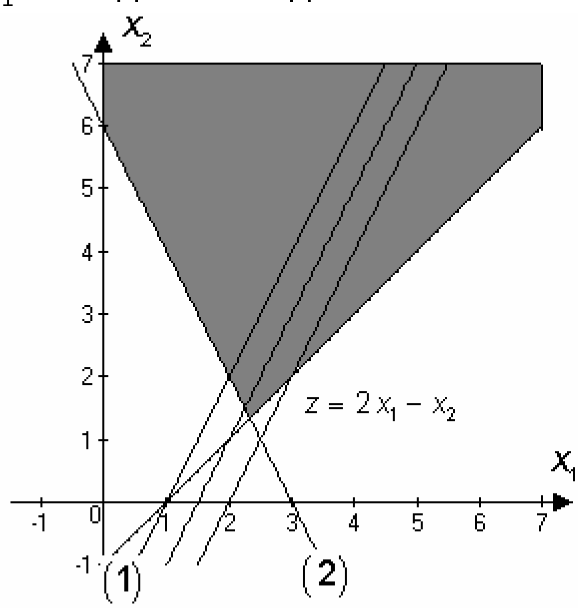

Рис. 2.4.5

Далее сформулируем общий алгоритм геометрического (графического) метода нахождения оптимального решения задачи ЛП.

Экстремальной точкой в задаче ЛП будем называть крайнюю (угловую) точку множества допустимых решений.

Теорема 2.4.1. *(об оптимальных экстремальных точках).*

Если в задаче ЛП существует оптимальное решение, то существует и оптимальная экстремальная точка.

Алгоритм графического метода решения задач ЛП с двумя переменными:

- записать каждое ограничение задачи ЛП как равенство (уравнение) и нарисовать соответствующую прямую в координатной плоскости;
- для каждого ограничения (неравенства) определить (нарисовать) допустимую область, а затем допустимую область для всех ограничений (она представляет собой пересечение таких областей для всех ограничений). Полученная область представляет собой множество допустимых решений задачи ЛП;
- записать уравнение линии уровня целевой функции:

$$z(x_1, x_2) = \text{const};$$

- найти градиент целевой функции $\operatorname{grad} z(x_1, x_2) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \right)$, который показывает направление наискорейшего роста функции z. «Сдвигать» линию уровня целевой функции в направлении градиента (в случае нахождения максимума) или в направлении, противоположном градиенту (в случае нахождения минимума);
- экстремальная (угловая) точка, которая лежит на пересечении «последней» линии уровня целевой функции и множества допустимых решений, и будет оптимальным решением задачи ЛП;
- чтобы аналитически найти координаты оптимальной точки, составляем систему уравнений из ограничений, соответствующих прямым, проходящим через эту точку. Вычислить значение целевой функции в оптимальной точке (значение задачи ЛП).

При решении задачи ЛП возможны следующие случаи:

1. Задача ЛП имеет единственное решение (см. примеры 2.4.1 и 2.4.2).
2. Задача ЛП имеет бесконечное множество решений (пример 2.4.3), это возможно, если линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей одному из ограничений задачи.
3. Задача ЛП не имеет оптимального решения, это является либо следствием неограниченности множества допустимых решений (пример 2.4.5), либо следствием его пустоты (пример 2.4.4).

§2.5. Анализ оптимального решения на чувствительность

Модель линейного программирования является как бы «моментальным снимком» реальной ситуации, когда параметры модели предполагаются неизменными. Естественно изучить влияние изменения параметров модели на полученное оптимальное решение задачи ЛП. Такое исследование оптимального решения называется *анализом на чувствительность.*

Пример 2.5.1. Проведем анализ на чувствительность оптимального решения, найденного в примере 2.4.1.

Напомним, что оптимальное решение рассматриваемой задачи вектор $X^* = (2/3, 10/3)$ и $z^* = 40/3$.

Первая задача анализа на чувствительность – чувствительность к правой части ограничений. В рамках этой задачи ограничения классифицируются как:

- *связывающие (активные),* если соответствующие им прямые проходят через оптимальную точку;
- *несвязывающие (неактивные),* если соответствующие им прямые не проходят через оптимальную точку.

Связывающим (активным) ограничениям отвечают *дефицитные* ресурсы, т. е. ресурсы, используемые полностью. Несвязывающим (неактивным) ограничениям отвечают *недефицитные* ресурсы.

Цели первой задачи на чувствительность:

- определить предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное значение целевой функции;
- определить предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного оптимального решения.

Ресурс 1 – дефицитный, ограничение (1) – связывающее (активное);

Ресурс 2 – дефицитный, ограничение (2) – связывающее (активное).

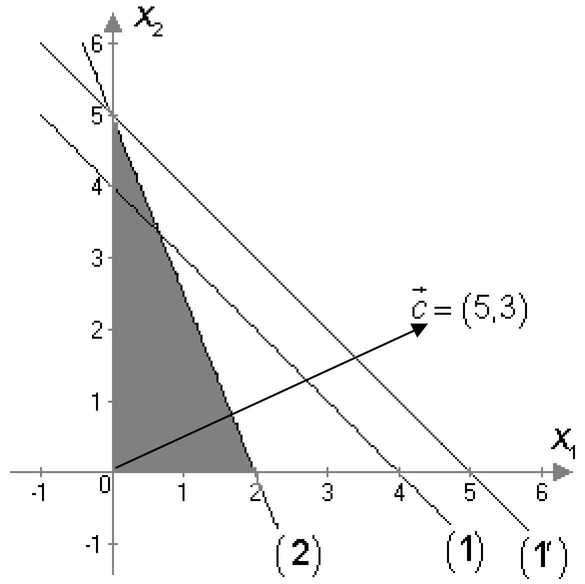

Рис. 2.5.1

Для ресурса 1 предельно допустимое увеличение запаса составляет 1 единицу (с 4 до 5 единиц), т. к. прямую (1) имеет смысл двигать параллельно себе до точки (0,5), ей будет отвечать уравнение $(1')$: $x_1 + x_2 = 5$. Максимальная прибыль будет в точке с координатами (5,0), z(0,5)=15 и увеличится на $15 - 40/3 = 5/3$ (рис. 2.5.1).

При увеличении запаса второго дефицитного ресурса, прямую (2) следует двигать до точки (4,0), такому положению прямой соответствует уравнение $5x_1 + 2x_2 = 20$, и изменение запаса второго ресурса равно 10. Максимальная прибыль z(4,0)=20, изменение прибыли при изменении запаса второго ресурса равно $20 - 40/3 = 20/3$ (рис. 2.5.2).

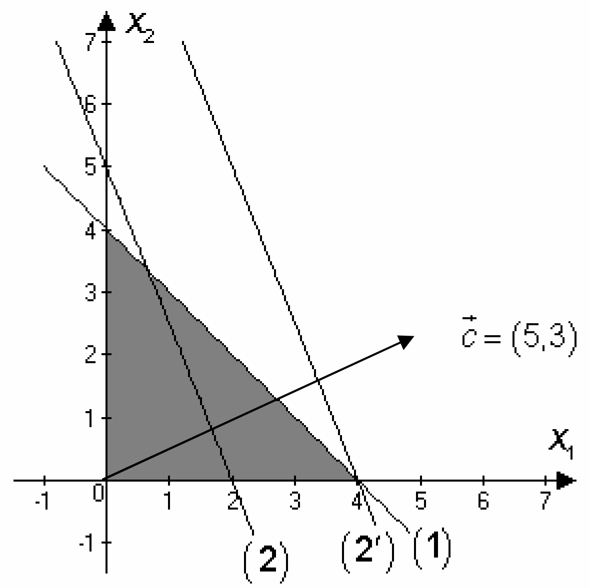

Рис. 2.5.2

Результаты решения первой задачи анализа на чувствительность оформляются в виде таблицы:

Ресурс	Тип (статус) ресурса	Максимальное изменение запаса	Максимальное изменение дохода
Ресурс(1)	дефицитный	$5 - 4 = 1$	$15 - 40/3 = 5/3$
Ресурс(2)	дефицитный	$20 - 10 = 10$	$20 - 40/3 = 20/3$

Вторая задача анализа на чувствительность позволяет определить меру зависимости оптимального решения от изменения ограничений, накладываемых на ресурсы. Эта мера называется *теневой (двойственной) ценой ресурса* и показывает, на сколько изменится оптимальное значение целевой функции при изменении количества ресурса на единицу.

Теневая (двойственная) цена ресурса i обозначается y_i и вычисляется по формуле:

$$y_i = \frac{\text{Максимальное увеличение дохода}}{\text{Максимальное увеличение запаса } i\text{-го ресурса}}.$$

Для рассматриваемой задачи $y_1 = \frac{15\text{-}40/3}{1} = \frac{5}{3}$, $y_2 = \frac{20\text{-}40/3}{20} = \frac{2}{3}$. Заметим, что для недефицитных ресурсов теневая цена всегда равна нулю. Можно сделать вывод, что наиболее выгодно увеличение первого ресурса, т. к. прибыль на единицу этого ресурса больше.

Третья задача анализа на чувствительность состоит в определении пределов изменения коэффициентов целевой функции, позволяющих сохранить оптимальное решение задачи.

Пусть $z = c_1x_1 + c_2x_2$ – целевая функция, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ и $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ – два активных ограничения в оптимальной точке X^*. (рис. 2.5.3). При изменении коэффициентов целевой функции решение остается оптимальным, если соотношение коэффициентов $\frac{c_1}{c_2}$ удовлетворяет неравенству $\frac{a_{11}}{a_{12}} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{a_{21}}{a_{22}}$ (диапазон оптимальности).

В рассматриваемом примере решение $X^* = (2/3, 10/3)$, остается оптимальным, если $\frac{1}{1} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{5}{2}$.

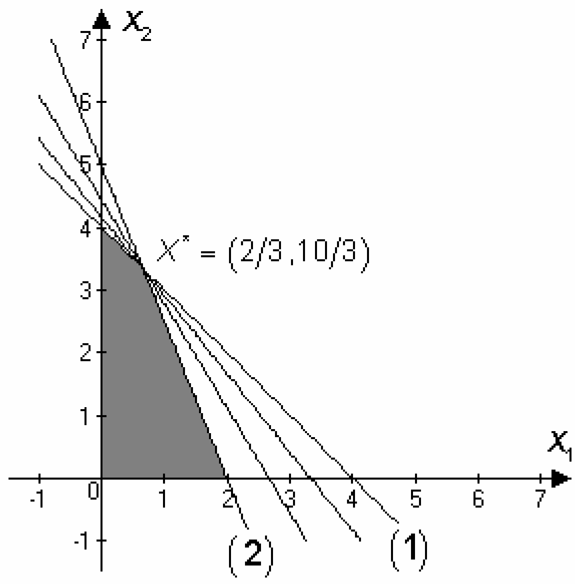

Рис. 2.5.3

В частности,

если $c_1 = \text{const} = 5$, $\frac{1}{1} \le \frac{5}{c_2} \le \frac{5}{2}$, $2 \le c_2 \le 5$;

если $c_2 = \text{const} = 3$, $\frac{1}{1} \le \frac{c_1}{3} \le \frac{5}{2}$, $3 \le c_1 \le \frac{15}{2}$.

Выводы

- Многие проблемные ситуации могут быть сформулированы как задачи ЛП, если они удовлетворяют следующим математическим предположениям: определенности, линейности, делимости.
- Структурными составляющими задачи ЛП являются: переменные, целевая функция, ограничения и ограничения на знак переменных.
- Оптимальное решение для задач малой размерности может быть получено с помощью геометрического метода.
- Геометрически оптимальное решение задачи ЛП находится на границе множества допустимых решений.
- Задача ЛП может иметь одно оптимальное решение, бесконечное множество оптимальных решений или не иметь оптимальных решений.
- Анализ на чувствительность выявляет зависимость оптимального решения от возможных изменений параметров исходной модели.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные предположения, которым должна удовлетворять модель ЛП.
2. Назовите основные этапы формализации задачи ЛП.
3. Сформулируйте проблему, которую можно формализовать как задачу ЛП.
4. Дайте определение задачи ЛП.
5. Дайте определение допустимого решения задачи ЛП и допустимого множества решений задачи ЛП.
6. Что понимают под оптимальным решением задачи ЛП?
7. Дайте определение выпуклого множества.
8. Что такое крайняя (экстремальная) точка множества?
9. Какую структуру имеет множество допустимых решений задачи ЛП?
10. Сформулируйте алгоритм геометрического метода решения задачи ЛП.
11. В чем отличие решения задачи ЛП максимизации от задачи ЛП минимизации при геометрическом методе?
12. Сколько решений может иметь задача ЛП?
13. В чем сущность анализа оптимального решения на чувствительность?
14. Дайте определение активного (связывающего) ограничения.
15. Что такое дефицитный ресурс?
16. Что понимают под теневой (двойственной) ценой ресурса?
17. Чему равна теневая цена недефицитного ресурса?

18. Можно ли улучшить значение целевой функции, изменяя запас недефицитного ресурса?
19. Всегда ли изменение коэффициентов целевой функции приводит к изменению оптимального решения задачи ЛП?

Библиография

1. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.
2. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях.М.: Мир, 1972.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.
4. *Красс М.С., Чупрынов Б.П*. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2003.
5. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В*. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.
6. *Хазанова Л.Э.* Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.
7. *Cook T. & Russel R.A.* Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.
8. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.
9. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.