Тема 4. Сетевые модели. Целочисленное программирование.

Цель: познакомить читателя с основными задачами, которые могут быть сформулированы как задачи целочисленного программирования или как сетевые модели, сформулировать и обосновать методы их решения.

Задачи:

- ввести основные понятия теории графов, дать классификацию графов, сформулировать понятие сети;
- построить математическую модель прямой и двойственной транспортной задачи, дать их экономические интерпретации. Познакомиться с методами нахождения опорного плана транспортной задачи и обосновать алгоритм метода потенциалов на основе теорем § 4.3, § 4.4;
- показать как задача о назначениях, задача о кратчайшем пути, распределительная задача могут быть сформулированы как задачи целочисленного программирования;
- познакомить с алгоритмом нахождения максимального потока в сети с ограниченными пропускными способностями.

Оглавление

§ 4.1. Понятие графа. Ориентированные графы. Дерево

Пусть заданы два множества: $N=\{x\}$ – конечное множество вершин или узлов (здесь $|N|=n$ – количество элементов в множестве N) и множество $G\subset N\times N$, называемое множеством ребер (здесь $N\times N=\{(x,y)\,|\;x\in N, y\in N\}$ – всевозможных пар элементов из множества N). Тогда математический объект $\Gamma = \langle N,G \rangle$, заданный множествами узлов N и ребер G, называется *графом.* Заметим, что запись $x \in N$ обозначает *узел,* а $(x,y) \in G$ – *ребро* графа $\Gamma = \langle N,G \rangle$, соответствующее концевым вершинам x и y. Вершины x и y ребра (x,y) называются также *смежными вершинами*.

Это определение графа должно быть дополнено в одном важном отношении. В определении ребра (x,y) можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения двух его концевых вершин. Если этот порядок несущественен, т. е. если $(x,y) = (y,x)$, то говорят, что (x,y)– *неориентированное* ребро; если же этот порядок существенен, то (x,y) называют *ориентированным* ребром или *дугой*. В последнем случае x называют также *начальной вершиной*, а y – *конечной вершиной* ребра (x,y). Можно также говорить, что (x,y) есть ребро, *исходящее* из вершины x и *входящее* в вершину y. Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что ребро (x,y) *инцидентно* вершинам x и y, а также что вершины x и y *инцидентны* ребру (x,y).

Ребро (x,x), концевые вершины которого совпадают, называется петлей. *Степенью вершины* x называется число ребер, инцидентных ей. Вершина x степени 0, называется *изолированной* (рис. 4.1.1). Вершина x степени 1 называется *висячей* (рис. 4.1.2).

Любой граф может быть представлен графически. Ориентированное ребро графически обозначается отрезком со стрелкой (рис. 4.1.3), неориентированное ребро – отрезком без стрелки (рис. 4.1.4). Вершины (узлы) графа будем изображать кружками.

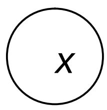


Рис. 4.1.1

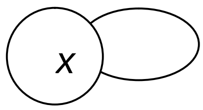


Рис. 4.1.2

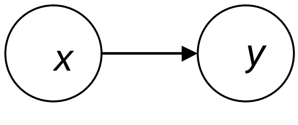


Рис. 4.1.3

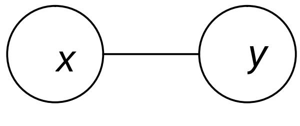


Рис. 4.1.4

Если все дуги графа Γ ориентированы (неориентированы), то граф называется *ориентированным* (*неориентированным*). Если в графе есть и ориентированные и неориентированные ребра, то граф называется *смешанным.*

Пример 4.1.1.

Пусть ориентированный граф $\Gamma = \langle N, G \rangle$ определяется множеством узлов $N = \{1,2,3,4\}$ и множеством дуг (ориентированных ребер) $G = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Тогда графическое представление графа Γ имеет вид (рис. 4.1.5).

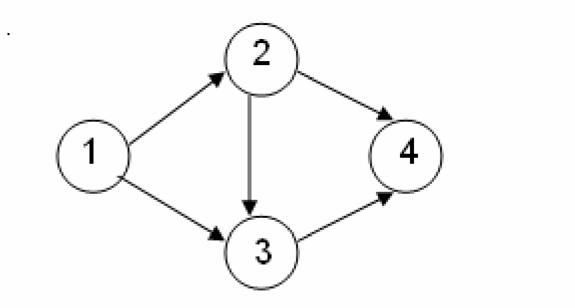


Рис. 4.1.5

Графическое представление неориентированного графа Γ, определяемого множеством узлов $N = \{1,2,3,4\}$ и множеством неориентированных ребер $G = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$, представлено на рис. 4.1.6 .

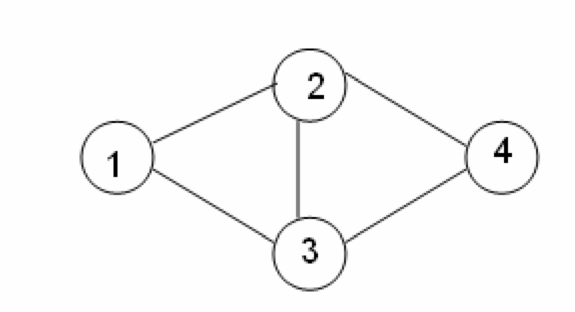


Рис. 4.1.6

Последовательность P ребер графа Γ вида $P(x_1, x_k) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots (x_{k-1}, x_k)\}$ называется *путем* из x_1 в x_k, если никакое ребро не встречается более одного раза. Если $x_1 = x_k$, то путь $P(x_1, x_k)$ называется *циклом.* Если все ребра пути P (цикла) ориентированы (неориентированы), то путь (цикл) называется *ориентированным (неориентированным)*. В общем случае путь P может быть смешанным.

Граф $\Gamma = \langle N, G \rangle$ называется *связным,* если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий. В противном случае граф Γ называется *несвязным*. В дальнейшем будем рассматривать связные графы без петель.

Деревом называется неориентированный связный граф, не содержащий циклов. Заметим, что в этом случае между любыми двумя узлами дерева имеется единственный путь, их соединяющий.

Пример 4.1.2.

Связный граф, изображенный на рис. 4.1.7, является деревом, т. к. он неориентированный и не содержит циклов.

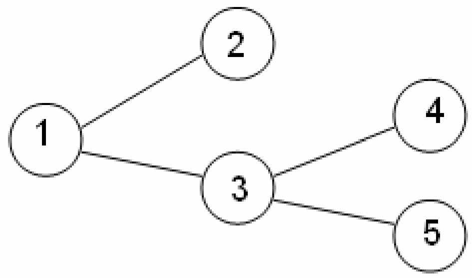


Рис. 4.1.7

Связный граф на рис. 4.1.5 не является деревом, поскольку он ориентированный.

Связный граф на рис. 4.1.6 не является деревом, т. к. содержит циклы $P_1(1,1)=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, $P_2(1,1)=\{(1,2),(4,3),(3,1)\}$, $P_3(2,2)=\{(2,4),(4,3),(3,2)\}$.

§4.2. Понятие сети. Представление о сетевых графиках, сетях Петри

Граф Γ, множество ребер которого определяется некоторой вещественной неотрицательной функцией $u: N \times N \to R_+^1$, будем называть *сетью.* Заметим, что каждому ребру (дуге) сети ставится в соответствие некоторое число (или несколько чисел).

На основе сетевых представлений задач разработано множество методов планирования, составления расписаний и управления проектами. Заметим, что если задача допускает сетевое представление, то порядок моделирования такой: вербальная постановка задачи, сеть задачи, математическая постановка задачи, количественная модель, решение количественной модели.

Основными понятиями *модели календарного планирования* являются:

- *программа* – совокупность взаимосвязанных операций, которые необходимо выполнить в определенном порядке;
- *операция (работа)* – действие, для выполнения которого требуются затраты времени и ресурсов;
- *событие* – момент времени, когда заканчиваются одни и начинаются другие операции;
- каждая операция определяется парой событий – начальным и конечным;

- граф, представляющий взаимосвязь отдельных работ проекта, называется *сетевым графиком*.

Правила построения сетевого графика:

- Каждая операция представляется только одним ориентированным ребром (дугой).
- Различные операции определяются различными начальными и конечными событиями.

Если два процесса происходят параллельно (рис 4.2.1), то для их изображения используется фиктивная операция (рис.4.2.2 или рис. 4.2.3).

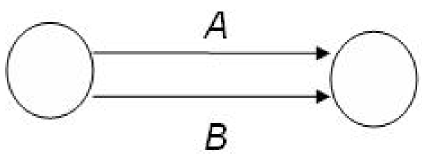
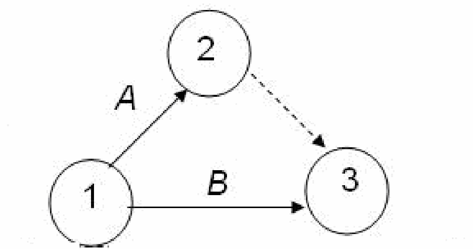


Рис. 4.2.1



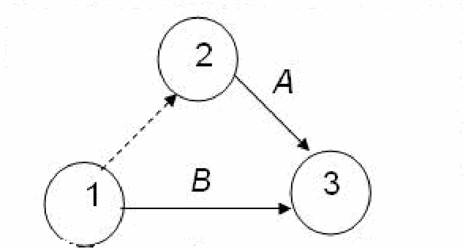


Рис. 4.2.2 Рис. 4.2.3

- Для изображения отношений предшествования необходимо ответить на следующие вопросы:

a) какой процесс непосредственно предшествует текущему;

b) какой процесс должен выполняться после завершения текущего процесса;

c) какой процесс выполняется параллельно с текущим?

Сетевая модель программы:

- $N = \{x\}$ – множество узлов сети проекта (программы);
- x – событие;
- (x, y) – дуга (операция);
- $u(x, y)$ – продолжительность операции (x, y) (значение вещественной неотрицательной функции).

Простой *сетью Петри* называется набор $G = (S, T, F)$, где $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ – множество *мест*;

$T = \{t_1, t_2, \ldots t_k\}$ – множество переходов, таких что $S \cap T = \varnothing$;

$F \subseteq S \times T \times S$ – отношение инцидентности.

Пример 4.2.1. Простейшая сеть Петри.

Пусть сеть $G = (S, T, F)$ задается множествами:

$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$,

$F = \{\langle s_1, t_1, s_2\rangle, \langle s_3, t_2, s_4\rangle, \langle 2s_2 + s_4, t_3, 2s_1 + s_3\rangle\}$

или изображается графически (рис. 4.2.4):

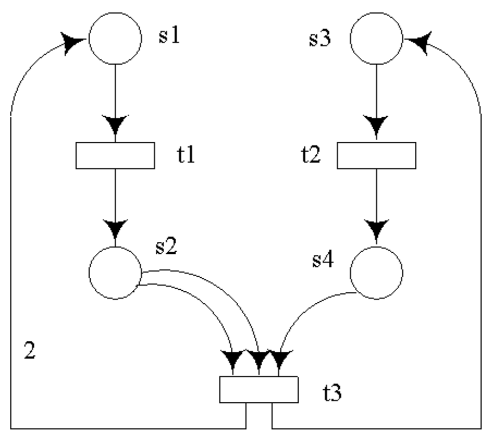


Рис. 4.2.4

Сеть имеет 4 места и 3 перехода. Отношение F задает дуги сети. Так, например, элемент $\langle 2s_2 + s_4, t_3, 2s_1 + s_3\rangle$ задает 4 дуги из s_2 в t_3 и из t_3 в s_1 с кратностями 2, из s_4 в t_3 и из t_3 в s_3 с единичными кратностями.

§4.3. Транспортная задача (ТЗ)

Пусть в пунктах производства $A_1, A_2, \cdots, A_m$ в плановый период производится однородный продукт в объемах $a_1, a_2, \cdots, a_m$ соответственно. Данный продукт потребляется в пунктах потребления $B_1, B_2, \cdots, B_n$, где $b_1, \cdots, b_n$ – соответствующие объемы спроса в плановый период.

Предполагается, что заданы транспортные затраты по перевозке единицы продукции из A_i в B_j, равные c_{ij}, $c_{ij} \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Задача состоит в определении такого плана перевозок, при котором удовлетворен спрос каждого потребителя, вывезен весь объем продукции из каждого пункта производства и при этом суммарные транспортные затраты минимальны. Такая задача называется *(замкнутой) транспортной задачей.*

Математическая модель транспортной задачи (ТЗ).

Обозначим через x_{ij} – объем перевозок продукции из A_i в B_j согласно плану перевозок $X = \{x_{ij}\}$, $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} – целые, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Тогда математическая модель транспортной задачи имеет вид:

$$\min z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m}, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n}, \\ &x_{ij} \geq 0, \; x_{ij} - \text{ целые.} \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

Математическая постановка ТЗ в матричной форме*.

Будем рассматривать матрицы X и C как вектора из R^{mn}, причем

$X = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ – вектор-столбец;

$C = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})$ – вектор-строка;

и введем обозначения

$P = (a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n) \in R^{m+n}$ – вектор-столбец производства-потребления;

$P_{ij} = (0, \cdots, \underset{i}{1}, 0, \cdots, \underset{j}{1}, 0, \cdots, 0) \in R^{m+n}$ – векторы-столбцы коммуникаций;

$A = [P_{11}, \cdots, P_{1n}, \cdots, P_{mn}]$ – матрица системы ограничений задачи, столбцами которой являются векторы коммуникаций;

тогда в матричной форме транспортную задачу можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\min z = \min CX, \\ &AX = P, \\ &X \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 4.3.1. (О разрешимости ТЗ)

Для существования допустимого решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие баланса:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (4.3.3)$$

Теорема 4.3.2. Ранг матрицы A системы ограничений ТЗ (4.3.2) равен

$$r = m + n - 1.$$

---

* При первом прочтении можно опустить.

Замечание 4.3.1.*
В явном виде матрица ограничений имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

Пример 4.3.1. Рассмотрим транспортную задачу:

$$a = (11, 11, 8), \quad b = (5, 9, 9, 7) \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Напишем математическую модель задачи.
План перевозок (переменные) имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

или

$$X = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}).$$

Тогда имеем целевую функцию

$$\min z = \min(7x_{11} + 8x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + 2x_{21} +$$
$$+4x_{22} + 6x_{23} + 6x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + x_{33} + 2x_{34})$$

и ограничения

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 11, \quad && x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5, \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 11, && x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9, \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 8, && x_{13} + x_{23} + x_{33} = 9, \\
& && x_{14} + x_{24} + x_{34} = 7, \\
&x_{ij} \ge 0,\ x_{ij} - \text{целые},\ i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

---

*При первом прочтении можно опустить.

Способы задания ТЗ.

- аналитический способ:

  Транспортная задача может быть определена аналитически заданием матрицы и двух векторов, где

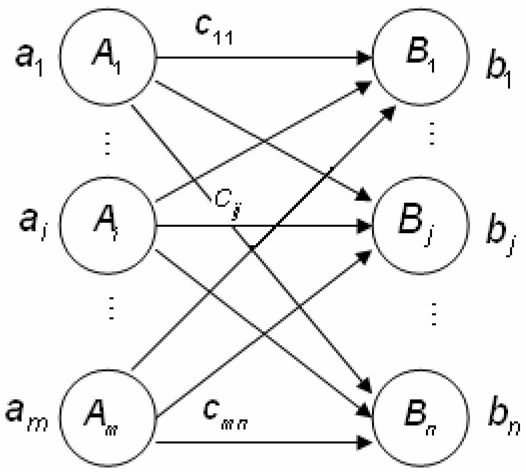
  $C = \{ c_{ij} \}, c_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$ – матрица удельных транспортных затрат;

  $a = (a_1, a_2, \cdots, a_m), \; a_i > 0, \; i = \overline{1,m}$ – вектор производства;

  $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n), \; b_j > 0, \; j = \overline{1,n}$ – вектор потребления.

- сетевой способ:

  Транспортную задачу можно представить в виде ориентированной сети (*транспортной сети*) следующего вида



- табличный способ:

  Часто транспортную задачу задают в форме таблицы *(транспортная таблица)*:

c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
b_1	b_2	$\cdots$	b_m	

Заметим, что все приведенные способы задания эквивалентны.

Если условие баланса $(4.3.3)$ выполнено, то ТЗ называется *закрытой или сбалансированной.* В противном случае задача называется *открытой или несбалансированной.*

Если условие баланса $(4.3.3)$ не выполнено, возможны два случая:

- $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ — *перепроизводство*. В этом случае можно ввести фиктивный пункт потребления B_{n+1} со спросом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$ и издержками $c_{i,n+1} = r_i$, где r_i – «штраф» за невывоз единицы продукции из A_i, $i = \overline{1,m}$.
- $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ — *дефицит*. В этом случае можно ввести фиктивный пункт производства A_{m+1} со спросом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и издержками $c_{m+1,\,j} = r_j$, где r_j – «штраф» за неудовлетворенный единичный спрос.

Опорным планом X транспортной задачи будем называть допустимое базисное решение транспортной задачи (см. § 3.4).

Проверка допустимого плана *на* опорность (*метод вычеркиваний*):

- вычеркнуть все строки в матрице *X*, содержащие не более одного положительного элемента;
- в получившейся матрице вычеркнуть все столбцы, содержащие не более одного положительного элемента;
- далее процесс вычеркивания строк и столбцов повторятся в оставшейся подматрице.

Процесс заканчивается одним из двух исходов:

1. Все строки (столбцы) вычеркнуты. Тогда план X задачи является опорным.
2. Получена подматрица, в каждой строке (столбце) которой содержится не менее двух положительных элементов. В этом случае план X задачи не является опорным, при этом из положительных элементов получившейся подматрицы можно составить цикл. Под циклом подразумевается замкнутый путь, состоящий из вертикальных и горизонтальных отрезков, меняющих свое направление в положительных элементах оставшейся подматрицы.

Пример 4.3.2.

Матрицы X^1 и X^2 являются допустимыми решениями одной транспортной задачи, проверим их на опорность.

Метод вычеркиваний в плане X^1 привел к следующему результату:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

План X^1 не является опорным, т. к. из невычеркнутых положительных элементов можно составить цикл:

$$\{(x_{11},x_{15}),(x_{15},x_{45}),(x_{45},x_{43}),(x_{43},x_{23}),(x_{23},x_{21}),(x_{21},x_{11})\}$$

Метод вычеркиваний в плане X^2 привел к следующему результату:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

План X^2 является опорным, т. к. вычеркнуты все строки и столбцы матрицы.

Метод нахождения оптимального решения ТЗ основан на теореме двойственности (см. § 3.6.).

Обозначим через $(-u_1,\cdots,-u_m,v_1,\cdots,v_n)$ – двойственные переменные задачи. Тогда двойственная задача для транспортной задачи в координатной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} &\max w = \max(\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i), \\ &v_j - u_i \le c_{ij}, \\ &i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Двойственные переменные u_i, v_j можно интерпретировать как цены единицы продукции в пунктах производства A_i и пунктах потребления B_j соответственно.

Двойственная задача для транспортной задачи в матричной форме*.

Поскольку математическая модель ТЗ, которую теперь будем называть прямой ТЗ, в матричной форме имеет вид:

---

* При первом прочтении можно опустить.

$$\min z = \min CX,$$
$$AX = P,$$
$$X \geq 0,$$

двойственная ТЗ запишется так

$$\max w = \max PY,$$
$$YA \leq C.$$

Пример 4.3.3. Напишем двойственную задачу к прямой ТЗ из примера 4.3.1. Двойственная задача примет вид:

$$\max w = \max\left(5v_1 + 9v_2 + 9v_3 + 7v_4 - 11u_1 - 11u_2 - 8u_3\right)$$

при ограничениях

$$\begin{array}{lll} v_1 - u_1 \leq 7, & v_1 - u_2 \leq 2, & v_1 - u_3 \leq 6, \\ v_2 - u_1 \leq 8, & v_2 - u_2 \leq 4, & v_2 - u_3 \leq 3, \\ v_3 - u_1 \leq 5, & v_3 - u_2 \leq 5, & v_3 - u_3 \leq 1, \\ v_4 - u_1 \leq 3, & v_4 - u_2 \leq 6, & v_4 - u_3 \leq 2. \end{array}$$

Теорема 4.3.3. (Теорема *двойственности для транспортной задачи*)

Для того чтобы прямая и двойственная транспортные задачи имели оптимальные решения $X^* = \left\{x_{ij}^*\right\}$ и $Y^* = \left(-u_1^*, \ldots, -u_m^*, v_1^*, \ldots, v_n^*\right)$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие баланса, при этом значения прямой и двойственной задач равны, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* \quad \text{или} \quad z_* = \min z = \max w = w^*.$$

Экономическая интерпретация теоремы: суммарные транспортные затраты при оптимальном плане перевозок равны оптимальному изменению суммарной стоимости продукции при полном удовлетворении спроса.

Теорема 4.3.4. (*Каноническая теорема равновесия*)

Для того чтобы пара допустимых решений $X^* = \left\{x_{ij}^*\right\}$ и $Y^* = \left(-u_1^*, \ldots, -u_m^*, v_1^*, \ldots, v_n^*\right)$ прямой и двойственной транспортных задач были оптимальными решениями соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

1. Если $x_{ij}^* > 0$, то $v_j^* - u_i^* = c_{ij}$,
2. Если $v_j^* - u_i^* < c_{ij}$, то $x_{ij}^* = 0$.

Экономическая интерпретация теоремы

Разность $v_j - u_i$ можно рассматривать как приращение ценности единицы продукции при перевозке из A_i в B_j. Поэтому если $v_j^* - u_i^* < c_{ij}$, то перевозка из A_i в B_j нерентабельна и $x_{ij}^* = 0$. Если же $x_{ij}^* > 0$ (перевозка, осуществляемая в оптимальном плане), то $v_j^* - u_i^* = c_{ij}$, т. е. перевозка из A_i в B_j рентабельна.

§ 4.4. Методы решения транспортной задачи

4.4.1. Методы нахождения начального опорного плана ТЗ.

Существуют три основных метода нахождения допустимого опорного плана транспортной задачи, все эти методы предполагают табличный способ задания ТЗ и являются эвристическими методами.

- *Метод северо-западного элемента*

Формальное описание алгоритма:

1. Определяют верхний левый (северо-западный) элемент матрицы X: $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Возможны три случая

a) $a_1 < b_1$, тогда $x_{11} = a_1, x_{12} = 0, \ldots x_{1n} = 0, b_1^1 = b_1 - a_1$;

b) $a_1 > b_1$, тогда $x_{11} = b_1, x_{21} = 0, \ldots x_{m1} = 0, a_1^1 = a_1 - b_1$;

c) $a_1 = b_1$, $x_{11} = b_1 = a_1, x_{21} = 0, \ldots x_{m1} = 0,\ x_{12} = 0, \ldots x_{1n} = 0$.

2. По тому же принципу заполняют левый верхний элемент незаполненной части матрицы.

- *Метод минимального элемента*

Элементы матрицы *C* нумеруют в порядке возрастания. Затем в том же порядке заполняют соответствующие элементы матрицы *X.* При этом правила заполнения те же, что и в методе северо-западного элемента.

- *Приближенный метод Фогеля*

1. Вычислить *штраф* для каждой строки и столбца матрицы C. Для этого вычитаем наименьший элемент этой строки (столбца) из следующего за ним по величине элемента той же строки (столбца).

2. Отметить строку (столбец) с самым большим штрафом. В отмеченной строке или столбце выбрать клетку с самыми низкими затратами и придать соответствующей переменной наибольшее возможное значение, т. е. $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.

3. Скорректировать текущие объемы производства и спроса. Вычислить новые штрафы для строк и столбцов.

4. Перейти к рассмотрению строки или столбца с максимальным штрафом. Если осталась одна строка (столбец), то заполнить ее так же, как в методе минимального элемента.

Пример 4.4.1. Пусть транспортная задача задана аналитически:

$$a = (11, 11, 8), \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
$$b = (5, 9, 9, 7)$$

Найдем начальный опорный план по методу северо-западного угла, минимального элемента и методу Фогеля.

Проверим, является ли данная задача сбалансированной (в противном случае ТЗ не разрешима):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 11 + 11 + 8 = 30,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 5 + 9 + 9 + 7 = 30.$$

Решение, найденное методом северо-западного угла, имеет следующий табличный вид:

7 5	8 6	5 0	3 0	11
2 0	4 3	5 8	9 0	11
6 0	3 0	1 1	2 7	8
5	9	9	7	

Опорный план можно представить в виде матрицы:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции на найденном плане X^0:

$$z\left(X^0\right) = 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 150.$$

При нахождении решения методом минимальной стоимости порядок заполнения клеток таблицы таков: $x_{33}, x_{21}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{21}$.

7 0	8 3	5 1	3 7	11
2 5	4 6	5 0	9 0	11
6 0	3 0	1 8	2 0	8
5	9	9	7	

Опорный план, построенный по методу минимального элемента, имеет вид:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции на найденном плане X^0:

$$z\left(X^0\right) = 3\cdot 8 + 1\cdot 5 + 3\cdot 7 + 2\cdot 5 + 6\cdot 4 + 8\cdot 1 = 92.$$

При использовании метода Фогеля вычисляем штрафы строк и столбцов матрицы издержек:

					штрафы строк
7	8	5	3	11	$5-3=2$
2	4	5	6	11	$4-2=2$
6	3	1	2	8	$2-1=1$
5	9	9	7		

штрафы столбцов

$6-2=4$	$4-3=1$	$5-1=4$	$3-2=1$

Поскольку первый столбец имеет наибольший штраф $(=4)$, заполняем в этом столбце клетку с минимальной стоимостью $x_{21}=5$, т. к. спрос в первом пункте потребления удовлетворен, остальные элементы этого столбца равны нулю. Вычисляем новый набор штрафов (заполненный столбец при этом не учитывается, штраф для него не вычисляется):

					штрафы строк
7 0	8	5	3	11	$5-3=2$
2 5	4	5	6	11	$5-4=1$
6 0	3	1	2	8	$2-1=1$
5	9	9	7		

штрафы столбцов

	$4-3=1$	$5-1=4$	$3-2=1$

Максимальный штраф в третьем столбце $(=4)$, заполняем клетку этого столбца, имеющую минимальную стоимость $x_{33}=8$. Поскольку из первого пункта производства вывезена вся произведенная продукция, остальные клетки таблицы заполняются нулями. Вычисляем новый набор штрафов:

					штрафы строк
7 0	8 	5 	3 	11	$5-3=2$
2 5	4 	5 	6 	11	$5-4=1$
6 0	3 0	1 8	2 0	8	
5	9	9	7		

штрафы столбцов

	$8-4=4$	$5-5=0$	$6-3=3$

Заполняем элемент $x_{22}=6$, т.к. он находится в столбце с максимальным штрафом и имеет минимальную стоимость. Оставшиеся клетки второй строки заполняем нулями. Поскольку в таблице осталась одна (первая) незаполненная строка, штрафы больше не вычисляем, заполняем в ней клетки в порядке возрастания их стоимости: $x_{14}=7$, $x_{13}=1$, $x_{12}=3$.

7 0	8 	5 	3 	11
2 5	4 6	5 0	6 0	11
6 0	3 0	1 8	2 0	8
5	9	9	7	

Опорный план, построенный по методу Фогеля, имеет вид:

$$X^0=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции на найденном решении X^0:

$$z\left(X^0\right)=3\cdot 8+1\cdot 5+3\cdot 7+2\cdot 5+6\cdot 4+8\cdot 1=92.$$

4.4.2. Алгоритм метода потенциалов

Метод потенциалов позволяет, начиная с некоторого опорного плана, за конечное число итераций построить оптимальное решение ТЗ.

Шаг 0. Построение начального опорного плана ТЗ.

Для нахождения начального опорного плана $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$ используется метод северо-западного угла, минимального элемента или метод Фогеля.

ИТЕРАЦИЯ

Шаг 1. Нахождение переменных двойственной задачи.

Строим множество $S_0 = \left\{(i,j) \middle| x_{ij}^0 > 0\right\}$ и *систему потенциалов* для начального опорного плана:

$$v_j - u_i = c_{ij}, (i,j) \in S_0.$$

Пусть $v_j^0, j = \overline{1,n}, u_i^0, i = \overline{1,m}$ – решение данной системы линейных уравнений. Эти числа называются *потенциалами плана* $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$.

Шаг 2. Проверка оптимальности или нахождение переменной, вводимой в базис.

- Строим матрицу $C_0 \equiv \left\{c_{ij}^0\right\} = \left\{c_{ij} - (v_j^0 - u_i^0)\right\}$. Данная матрица называется *матрицей невязок плана* $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$, а ее элементы – *невязками*.
- Если $c_{ij}^0 \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, то $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$ – оптимальный план ТЗ, а потенциалы $Y^0 = \left(-u_1^0, \ldots, -u_m^0, v_1^0, \ldots, v_n^0\right)$ – оптимальное решение двойственной ТЗ.
- В противном случае находим $\Delta \equiv \min\limits_{c_{ij}^0 < 0} c_{ij}^0 = c_{rs}^0$, соответствующую переменную x_{rs} вводим в базис.

Шаг 3. Нахождение переменной, исключаемой из базиса.

- Рассматриваем элемент x_{rs} и все базисные перевозки плана X^0, строим цикл из этих элементов, например, используя метод вычеркивания.
- Помечаем элементы цикла знаками «+» и «–» через один, начиная с элемента x_{rs}.
- Выбираем минимальный объем перевозки из элементов, помеченных знаком «–»: $\theta \equiv \min\left(x_{ij}\right)^- = x_{kl}$, переменную x_{kl} исключаем из базиса.

Шаг 4. Нахождение нового опорного плана.

- Получаем новый план $X^1 = \{x_{ij}^1\}$ по следующему правилу: прибавляем величину θ к объемам перевозок в клетках, помеченных знаком «+» и вычитаем из объемов перевозок, отмеченных знаком «–»:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} \left(x_{ij}^0\right)^- - \theta, \\ \left(x_{ij}^0\right)^+ + \theta, \\ x_{ij}^0. \end{cases}$$

- Значение целевой функции на плане $X^1 = \{x_{ij}^1\}$, используя $z\left(X^0\right)$ можно найти так:

$$z\left(X^1\right) = z\left(X^0\right) + \Delta \cdot \theta .$$

- Переходим к шагу 1.

Замечание 4.4.1. (О вырожденном опорном плане ТЗ)

Опорный план называется *вырожденным*, если число его ненулевых перевозок меньше ранга матрицы ограничений. Напомним, что $rank\left(A\right) = m + n - 1$ (§ 4.1.). В процессе построения начального плана или при его улучшении очередной план может оказаться вырожденным. Тогда выбирают нулевые элементы матрицы X в качестве базисных, так чтобы при этом не нарушилось условие опорности. Далее данные элементы заменяют на $\varepsilon > 0$. Задачу решают как невырожденную, в оптимальном плане вместо ε пишут нули.

Пример 4.4.2. Найти оптимальное решение ТЗ из примера 4.4.1, используя метод потенциалов.

Шаг 0. В качестве начального опорного плана X^0, возьмем решение, полученное по методу минимального элемента (см. пример 4.4.1):

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad z(X^0) = 92.$$

ИТЕРАЦИЯ 1.

Шаг 1.

- Строим множество

$$S_0 = \left\{(i,j) \middle| x_{ij}^0 > 0\right\} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3)\}.$$

- Строим *систему потенциалов* $v_j - u_i = c_{ij}, (i,j) \in S_0$ для начального опорного плана X^0:

$$v_2^0 - u_1^0 = 8, \quad v_1^0 - u_2^0 = 2,$$
$$v_3^0 - u_1^0 = 5, \quad v_2^0 - u_2^0 = 4,$$
$$v_4^0 - u_1^0 = 3, \quad v_3^0 - u_3^0 = 1.$$

Полагая $u_1^0 = 0$, находим решение данной системы потенциалов. Потенциалы плана $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$ равны:

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 4, \quad u_3^0 = 4,$$
$$v_1^0 = 6, \quad v_2^0 = 8, \quad v_3^0 = 5, \quad v_4^0 = 7.$$

Шаг 2.

- Строим матрицу невязок для плана $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$:

$$C_0 \equiv \left\{c_{ij}^0\right\} = \left\{c_{ij} - (v_j^0 - u_i^0)\right\},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- В матрице C_0 есть отрицательный элемент, следовательно, план $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$ не является оптимальным.

- Выделяем минимальный отрицательный элемент в матрице невязок C_0 $\left(\Delta_0 \equiv c_{32}^0 = -1\right)$. Переменная x_{32}, соответствующая этому элементу, вводится в число базисных переменных.

Шаг 3.

- Рассматриваем элемент x_{32} и все базисные перевозки плана X^0, строим цикл из этих элементов:

$$x_{32}, x_{12}, x_{13}, x_{33}$$

- Помечаем элементы цикла знаками «+» и «–» через один, начиная с элемента x_{32}:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 3^- & 1^+ & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0^+ & 8^- & 0 \end{bmatrix}$$

- Выбираем минимальный элемент из помеченных знаком «–»:

$$\theta_0 = \min\left(x_{ij}^0\right)^- = x_{12}^0 = 3,$$

соответствующую переменную x_{12} исключаем из базиса.

Шаг 4.

- Получаем новый план X^1:

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Значение целевой функции на плане X^1:

$$z(X^1) = z(X^0) + \Delta_0\theta_0 = 92 - 1\cdot 3 = 89.$$

- Переходим к рассмотрению следующей итерации.

ИТЕРАЦИЯ 2.

Шаг 1.

- Строим множество

$$S_1 = \left\{(i,j)\middle| x_{ij}^1 > 0\right\} = \left\{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\right\}.$$

- Строим систему потенциалов $v_j - u_i = c_{ij},(i,j) \in S_1$ для опорного плана X^1:

$$v_3^1 - u_1^1 = 5, \quad v_2^1 - u_2^1 = 4,$$
$$v_4^1 - u_1^1 = 3, \quad v_2^1 - u_3^1 = 3,$$
$$v_1^1 - u_2^1 = 2, \quad v_3^1 - u_3^1 = 1.$$

Находим решение этой системы:

$$u_1^1 = 0, \quad u_2^1 = 3, \quad u_3^1 = 4,$$
$$v_1^1 = 5, \quad v_2^1 = 7, \quad v_3^1 = 5, \quad v_4^1 = 3.$$

Шаг 2.

- Строим матрицу невязок для плана $X^1 = \left\{x_{ij}^1\right\}$:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Поскольку все элементы матрицы C_1 неотрицательны, план X^1 оптимальный.

Пример 4.4.3. (Вырожденный начальный опорный план). Транспортная задача задана аналитически:

$$a = (6, 8, 10), \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$b = (4, 6, 8, 6)$$

Начальный план, найденный методом минимального элемента, является вырожденным и имеет вид:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

т. к. $rank(A) = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 5$, два нулевых элемента матрицы X нужно сделать базисными, не нарушая опорности плана, например x_{11} и x_{22}:

$$X^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

ИТЕРАЦИЯ 1.

Матрица невязок:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ \Delta = -3,\ x_{24} \text{ вводим в базис.}$$

Цикл в плане X^0 имеет вид:

$$X^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon^- & 6^+ & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^- & 8 & 0^+ \\ 4^+ & 0 & 0 & 6^- \end{pmatrix}$$

$\theta = \min\{\varepsilon, \varepsilon, 6\} = \varepsilon$, x_{22} исключается из базиса.

Находим новый опорный план

$$X^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \varepsilon \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

ИТЕРАЦИЯ 2.

Матрица невязок:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \Delta = -1,\ x_{33} \text{ вводим в базис.},$$

Цикл в плане X^1:

$$X^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^- & \varepsilon^+ \\ 4 & 0 & 0^+ & 6^- \end{pmatrix}$$

$\theta = \min\{8,6\} = 6$, x_{34} исключается из базиса.
Находим новый опорный план

$$X^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \varepsilon \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

ИТЕРАЦИЯ 3.

Матрица невязок:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

в матрице C_2 нет отрицательных элементов, план X^2 является оптимальным.

§ 4.5. Распределительная задача и задача о назначениях

Распределительная задача

Это наиболее общая формулировка сетевой задачи с промежуточными пунктами и ограничениями на пропускную способность ребер.

Для общей постановки определим следующие величины:

- N – множество узлов сети, $|N| = n$;
- G – множество всех дуг сети, $G \subset N \times N$;
- $(i, j) \in G$ – дуга сети;
- x_{ij} – количество продукции, перевозимой по дуге $(i, j) \in G$, или *поток* на дуге (i, j);
- c_{ij} – затраты на единицу потока на дуге (i, j);
- $l_{ij} \geq 0$ – нижняя граница потока на дуге (i, j);
- $u_{ij} \geq 0, u_{ij} \geq l_{ij}$ – верхняя граница потока на дуге (i, j);
- $N = N_1 \bigcup N_2 \bigcup N_3$, $N_i \bigcap N_j = \varnothing, i, j = 1,2,3$, где

  N_1 – множество узлов предложения,

  N_2 – множество промежуточных узлов,

  N_3 – множество узлов спроса;
- b_j – спрос (предложение) в узле $j \in N$:

  $b_j > 0$, $j \in N_1$,

  $b_j = 0$, $j \in N_2$,

  $b_j < 0$, $j \in N_3$.

Задача: найти целочисленный поток минимальной стоимости в сети, обеспечивающий спрос и предложение, и удовлетворяющий ограничениям на пропускную способность.

Тогда математическая формулировка распределительной задачи при выполнении условия сбалансированности $\left(\sum\limits_{j\in N} b_j = 0\right)$ имеет вид:

$$\min \sum_{(i,j)\in G} c_{ij}x_{ij},$$

при условиях

$$\sum_{(j,i)\in G} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in G} x_{ij} = b_j, \quad j\in N,$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j)\in G,\ x_{ij} - \text{целые}.$$

Задача о назначениях

Пусть имеется множество из m работников $\{I_1, I_2, \ldots I_m\}$. Предполагается, что каждый работник I_i способен выполнять любую работу из комплекса работ $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$. Пусть $C = \{c_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – затраты при назначении работника I_i на работу J_j. Каждого работника нужно назначить на одну работу, и на каждую работу нужно назначить одного работника.

Задача: найти распределение работников по работам, минимизирующее общие затраты по выполнению комплекса работ.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи.

Обозначим через $X = \{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, где

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если работник } I_i \text{ назначается на работу } J_j \text{ по плану } X; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда математическая модель задачи о назначениях при выполнении условия сбалансированности $(m = n)$ имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,...m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1,...,n,$$

$$x_{ij} \ge 0,\ x_{ij} - \text{целые}.$$

§ 4.6. Построение максимального потока в сети с заданными пропускными способностями

4.6.1. Основные понятия и теоремы

Пусть $N = \{x\}$ – конечное (заданное) множество узлов ($|N| = n$) и пусть функция $u : N \times N \to R_+^1$ из определения сети (см. § 4.2.) интерпретируется как *функция пропускной способности*.

Заметим, что сеть $\Gamma = \langle N,u \rangle$ является графом $\overline{\Gamma} = \langle N,G \rangle$, где $G = \{(x,y) | u(x,y) > 0\}$ – множество ребер графа.

Функция $f : N \times N \to R^1$ называется *потоком в сети*, если выполняются свойства:

- $f(x,y) = -f(y,x)$, для всех $(x,y) \in N \times N$ – *кососимметричность потока*;
- $f(x,y) \le u(x,y)$, для всех $(x,y) \in N \times N$ – *допустимость потока*.

Замечание 4.7.1. В задаче мы предполагаем, что пропускная способность и поток принимают только целочисленные значения.

Введем обозначения для функций от множеств:

- $g(A) \equiv \sum_{x \in A} g(x)$,
- $h(A,B) \equiv \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} h(x.y)$, где $A, B \subset N$.

Свойства функций от множеств:

- $g(A \cup B) = g(A) + g(B)$, если $A \cap B = \varnothing$;
- $h(A \cup B,C) = h(A,C) + h(B,C)$, если $A \cap B = \varnothing$;
- $h(A,B \cup C) = h(A,B) + h(A,C)$, если $B \cap C = \varnothing$.

Свойства потока на множествах узлов:

- $f(A,A) = 0, \forall A \subset N$,
- $f(A,B) \le u(A,B), \forall A,B \subset N$.

Узел $s \in N$ называется *истоком (источником)* сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$, если для любого потока f выполнено: $f(s,N) > 0$.

Узел $s' \in N$ называется *стоком* сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$, если для любого потока f выполнено: $f(s',N) < 0$.

Будем предполагать, что в сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$ имеется единственный исток и единственный сток (т. е. любой поток в сети течет от истока $s \in N$ в сток $s' \in N$).

Понятно, что для всех $x \neq s, x \neq s'$ выполнено: $f(x,N) = 0$. Поэтому такие узлы $x \neq s, x \neq s'$ называются *промежуточными узлами*.

Число $f(s,N) = f(N,s') > 0$ называется *мощностью потока* f. Поток $\bar{f}$ максимальной мощности называется *максимальным потоком в сети.*

Пара множеств $(S,S'), S \subset N, S' \subset N$ называется *сечением сети*, если выполнено: $s \in S, s' \in S', S \bigcup S' = N, S \bigcap S' = \varnothing$.

Пусть (S,S') – сечение сети. Тогда число $u(S,S')$ называется *пропускной способностью сечения*.

Сечение $(\bar{S},\bar{S}')$ с минимальной пропускной способностью называется *минимальным сечением в сети*.

Важную роль во многих приложениях играют следующие задачи.

Задача 4.6.1. (*О максимальном потоке,* прямая задача)

В сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$ построить максимальный поток (поток максимальной мощности) и найти мощность этого потока.

Задача 4.6.2. (*О минимальном сечении*, двойственная задача)

В сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$ найти минимальное сечение (сечение с минимальной пропускной способностью) и вычислить пропускную способность этого сечения.

Лемма 4.6.1.

Мощность произвольного потока не превосходит пропускной способности произвольного сечения в сети

$$f(s,N) \leq u(S,S').$$

Теорема 4.6.1. (*Достаточное условие оптимальности*)

Если мощность некоторого потока совпадает с пропускной способностью некоторого сечения, то этот поток является максимальным, а данное сечение – минимальным.

Теорема 4.6.2. (*О максимальном потоке и минимальном сечении*)

В произвольной сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$ существует максимальный поток $\bar{f} : N \times N \to R^1$ и минимальное сечение $(\bar{S},\bar{S}'), \bar{S} \subset N, \bar{S}' \subset N$, при этом мощность максимального потока совпадает с пропускной способностью минимального сечения, т. е.

$$\bar{f}(s,N) = u(\bar{S},\bar{S}').$$

Замечание 4.6.2. Теорема 4.6.2 является аналогом теоремы двойственности. Алгоритм решения задачи основан на доказательстве теоремы 4.6.2.

Для формулировки алгоритма нам потребуется понятие пути, *ненасыщенного потоком*.

Пусть $f : N \times N \to R^1$ поток в сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$. Будем говорить, что ребро $(x,y) \in G$ *ненасыщено* потоком, если $u(x,y) > f(x,y)$.

Путем $P(s,s')$ из истока $s \in S$ в сток $s' \in S'$ будем называть последовательность ребер вида: $P(s,s') = \{(s,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,s')\}$.

Будем говорить, что путь $P(s,s')$ *ненасыщен* относительно потока $f : N \times N \to R^1$, если каждое ребро пути $P(s,s')$ ненасыщено относительно потока, т. е. $u(x,y) > f(x,y)$, для всех $(x,y) \in P$.

4.6.2. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке

Шаг 0. Строим произвольный поток f_0 в сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$.

ИТЕРАЦИЯ

Шаг 1.

- Строим множество узлов S_0, которые можно достичь из истока s по ненасыщенному потоком f_0 пути.
- Если $s' \notin S_0$, то f_0 – максимальный поток, а (S_0,S_0') – минимальное сечение в сети $\Gamma = \langle N,u \rangle$, где $S_0' \equiv N / S_0$.
- В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2.

- Находим ненасыщенный путь $P_1(s,s')$ относительно потока f_0.
- Вычисляем величину $\delta_0 = \min\limits_{(x,y)\in P_0} [u(x,y) - f_0(x,y)] > 0$.

Шаг 3.

- Строим новый поток f_1 по правилу:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f_0(x,y) + \delta_0, & (x,y) \in P, \\ f_0(x,y) - \delta_0, & (y,x) \in P, \\ f_0(x,y), & (x,y) \notin P, (y,x) \notin P. \end{cases}$$

- Переходим к шагу 1 алгоритма с потоком f_1.

Пример 4.6.1.

Неориентированная сеть $\Gamma = \langle N,u \rangle$ задана узлами и пропускными способностями ребер (рис. 4.7.1), которые графически могут быть нанесены на ребра сети.

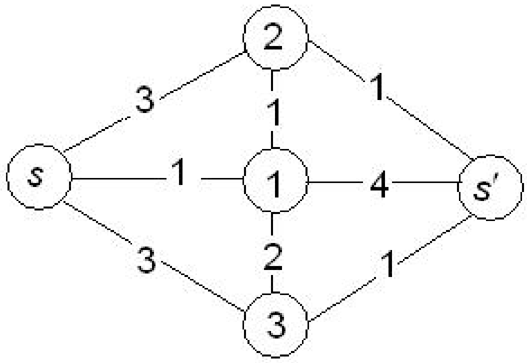


Рис. 4.7.1.

Найти максимальный поток из s в s' и минимальное сечение сети.

Решение:

Шаг 0.

- Зададим функцию начальной пропускной способности $u(x,y)$ сети аналитически в виде таблицы:

$u(x,y)$	s	1	2	3	s'
s	0	1	3	3	0
1	1	0	1	2	4
2	3	1	0	0	1
3	3	2	0	0	1
s'	0	4	1	1	0

- Построим произвольный начальный поток f_0 в сети, направляя его по трем путям:

$$P_0^1 = \{(s,2),(2,s')\},\ P_0^2 = \{(s,1),(1,s')\},\ P_0^3 = \{(s,3),(3,s')\}.$$

Величины потоков соответственно равны $\delta_0^1 = 1, \delta_0^2 = 1, \delta_0^3 = 1$. Суммарная величина потока f_0 равна $\delta_0 = \delta_0^1 + \delta_0^2 + \delta_0^3 = 3$. Представим поток f_0 в виде матрицы, используя свойство кососимметричности $f_0(x,y) = -f_0(y,x)$:

$f_0(x,y)$	s	1	2	3	s'
s	0	1	1	1	0
1	-1	0	0	0	1
2	-1	0	0	0	1
3	-1	0	0	0	1
s'	0	-1	-1	-1	0

ИТЕРАЦИЯ 1.

Шаг 1.

- Для удобства расчетов вычислим матрицу $u^0 = u - f_0$:

u	s	1	2	3	s'
s	0	0	2^-	2	0
1	2	0	1^+	2	3^-
2	4^+	1^-	0	0	0
3	4	2	0	0	0
s'	0	5^+	2	2	0

- Строим множество S_0. В нашем случае $S_0 = \{s,1,2,3,s'\}$. Понятно, что $s' \in S_0$. Следовательно, поток f_0 не является максимальным.

Шаг 2.

- Строим путь $P_1(s,s')$, ненасыщенный относительно потока f_0. В нашем случае $P_1(s,s') = \{(s,2),(2,1),(1,s')\}$. Чтобы не выписывать матрицу потока f_1, можно отметить ячейки $(s,2),(2,1),(1,s')$ в матрице u^0 знаком «–», а ячейки $(2,s),(1,2),(s',1)$ знаком «+».
- Мощность потока f_1 равна $\delta_1 = 1$.

Шаг 3.

- Пересчитываем матрицу пропускных способностей в соответствии с алгоритмом. К элементам, помеченным знаком «+», прибавляем $\delta_1 = 1$, от элементов, помеченных знаком «–», отнимаем $\delta_1 = 1$. Получим новую матрицу $u^1 = u^0 - f_1$:

u^1	s	1	2	3	s'
s	0	0	1	2^-	0
1	2	0	2	2^+	2^-
2	5	0	0	0	0
3	4^+	2^-	0	0	0
s'	0	6^+	2	2	0

ИТЕРАЦИЯ 2.

Шаг 1.

- Строим множество S_1 относительно потока f_1. Оно имеет вид $S_1 = \{s,1,2,3,s'\}$. Понятно, что $s' \in S_1$.

Шаг 2.

- Строим путь $P_2(s,s')$, ненасыщенный относительно потока f_1. В нашем случае $P_2(s,s') = \{(s,3),(3,1),(1,s')\}$.
- Величина $\delta_2 = 2$.

Шаг 3.

Получаем новую матрицу $u^2 = u^1 - f_2$:

u^2	s	1	2	3	s'
s	0	0	1	0	0
1	2	0	2	4	0
2	5	0	0	0	0
3	6	0	0	0	0
s'	0	8	2	2	0

ИТЕРАЦИЯ 3.

Шаг 1.

- Строим множество S_2 относительно потока f_2. Оно имеет вид $S_2 = \{s,2\}$.
- Теперь $s' \notin S_2$. Поэтому суммарный поток $f = f_0 + f_1 + f_2$ – максимальный. Находим этот поток по формуле: $f = u - u^2$

f	s	1	2	3	s'
s	0	1	2	3	0
1	-1	0	-1	-2	4
2	-2	1	0	0	1
3	-3	2	0	0	1
s'	0	-4	-1	-1	0

- Строим минимальное сечение – $(S_2, S_2^{'})$. Для этого находим $S_2 = \{s,2\}$ и $S_2^{'} = \{s',1,3\}$.
- Делаем проверку полученного решения: мощность максимального потока должна быть равна пропускной способности минимального сечения. Действительно, $f_{\max}(s,N) = u_{\min}(S_2, S_2^{'}) = 6$.
- Изображаем максимальный поток и минимальное сечение графически (рис. 4.7.2) (в овале содержатся узлы, принадлежащие множеству S, остальные узлы принадлежат множеству S'):

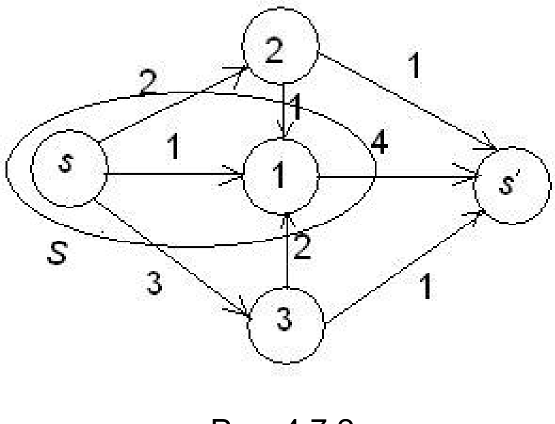


Рис. 4.7.2

§ 4.7. Задача о кратчайшем пути

Пусть $N = \{x\}$ – конечное (заданное) множество узлов ($|N| = n$) и пусть функция $u: N \times N \to R_+^1$ из определения сети (см. §4.2.) интерпретируется как *длина ребра*. Если длина ребра не указана, то считается, что $u_{ij} = \infty$ (ребра нет). В сеть введены два выделенных узла: s – источник (начало пути), s' – сток (конец пути). Тогда сеть можно представить графом $\Gamma = \langle N, G \rangle$.

Обозначим через $P(s,s')$ путь из s в s' в графе $\Gamma = \langle N, G \rangle$, т. е.

$$P(s,s') = \{(s,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_n,s')\}.$$

Под длиной пути $P(s,s')$ будем понимать величину

$$u(s,s') = \sum_{(i,j)\in P(s,s')} u_{ij}.$$

Задача о кратчайшем пути: требуется найти в сети $\Gamma = \langle N, G \rangle$ путь P из s в s', имеющий минимальную длину.

Заметим, что данную задачу можно интерпретировать как задачу нахождения потока единичной мощности и минимальной стоимости.

Тогда математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\min \sum_{(i,j)\in G} c_{ij} x_{ij},$$

при условиях

$$\sum_{(s,j)\in G} x_{sj} = 1,$$

$$\sum_{(i,j)\in G} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in G} x_{ji} = 0, \quad j \ne s, j \ne s',$$

$$\sum_{(i,s')\in G} x_{is'} = 1,$$

$$x_{ij} \ge 0,\ x_{ij} - \text{целые},\ (i,j) \in G.$$

Замечание 4.7.1.

Сформулированная модель является моделью линейного целочисленного программирования и может быть решена методами линейного программирования или сетевыми методами. Наиболее эффективным методом решения задачи о кратчайшем пути является метод *динамического программирования* (см. тему 7).

Выводы

- Существуют классы задач линейного программирования, которые могут быть сформулированы как сетевые модели.
- Допустимые решения транспортной задачи могут быть найдены эвристическими методами.
- Любая транспортная задача может быть сбалансирована, следовательно, любая ТЗ разрешима.
- Методом нахождения оптимального решения ТЗ является метод потенциалов, который основывается на теореме двойственности.
- Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи.
- Транспортная задача, задача о максимальном потоке, задача о кратчайшем пути, распределительная задача могут быть рассмотрены как задачи линейного целочисленного программирования и как сетевые модели.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение графа, назовите его элементы.
2. Дайте математическую формулировку транспортной задачи.
3. Сформулируйте теорему о разрешимости ТЗ.
4. Что называется опорным планом транспортной задачи?
5. Как проверить произвольный план транспортной задачи на опорность?
6. Какие существуют методы нахождения начального опорного плана?
7. Сформулируйте условие оптимальности плана транспортной задачи и дайте его экономическую интерпретацию.
8. Как свести открытую транспортную модель к закрытой?
9. Какие величины называются потенциалами в транспортной задаче?
10. Как выглядит математическая модель двойственной задачи к транспортной задаче?
11. Сформулируйте основные свойства потока в сети.
12. Дайте определение сечения сети.
13. Какие величины называются мощностью потока в сети, пропускной способностью сечения сети?
14. Сформулируйте критерий оптимальности потока в сети.
15. В чем различие между транспортной и распределительной задачей?
16. Является ли задача о назначениях частным случаем транспортной задачи?
17. Как найти допустимое решение задачи о назначениях?

18. Дайте математическую формулировку задачи о кратчайшем пути.

Библиография.

1. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.
2. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1972.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.
4. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.:ИЛ, 1963.
5. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.
6. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В*. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.
7. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М. Дело, 2003.
8. *Хазанова Л.Э.* Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.
9. *Cook T. & Russel R.A.* Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.
10. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.
11. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.