Тема 9. Элементы теории принятия решений.

Цель: познакомить читателя с основными элементами задачи принятия решения и их классификацией. Рассмотреть постановку задачи принятия решения в условиях риска, познакомиться с основными критериями оптимальности, научиться представлять такие задачи в виде дерева принятия решения. Познакомиться с формулировкой и методами решения задачи принятия решения в условиях неопределенности.

Задачи:

- научиться формулировать задачу принятия решения в условиях риска (*игра с природой*) и решать ее, руководствуясь критерием максимизации ожидаемой полезности решения;
- научиться строить дерево принятия решения и оценивать ожидаемую полезность принятого решения;
- научиться формулировать задачу принятия решения в условиях неопределенности и решать ее, применяя различные субъективные критерии оптимальности: максиминный и максимаксный критерий, критерий Лапласа, критерии Гурвица и Сэвиджа.

Оглавление

§ 9.1. Основные элементы задачи принятия решений. Классификация задач принятия решений

Любой процесс принятия решения включает следующие элементы.

- *Цель.* Необходимость принятия решения определяется целью или несколькими целями, которые должны быть достигнуты.
- *Лицо, принимающее решение,* должно иметь возможность влиять на исход решения, нести ответственность за последствия принятого решения.
- *Альтернативные решения* – различные варианты достижения целей.
- *Внешнюю среду* – совокупность внешних факторов, влияющих на исход решения.

- *Исходы решений* – возможные варианты результатов принятия решений.

В зависимости от *условий влияния внешней среды* и информированности лица, принимающего решение, имеется следующая классификация *задач принятия решений* (ЗПР)*:*

- *в условиях определенности:* все параметры модели известны точно или могут быть оценены с необходимой точностью, внешняя среда не учитывается;
- *в условиях риска:* учитывается внешняя среда, параметры модели считаются случайными величинами с известными законами распределения. Такая задача часто возникает, когда внешние факторы статистически наблюдаются;
- *в условиях неопределенности:* внешние факторы учитываются, но распределение вероятностей отсутствует;
- *в условиях конфликта:* внешние факторы учитываются, но являются результатом рационального действия других участников процесса принятия решения.

Замечание 9.1.1. В задачах принятия решения в условиях риска и неопределенности учитывается внешняя среда (природа), состояния которой считаются случайными, поэтому задачи такого типа иногда называются *играми с природой*.

В зависимости от *информированности лица*, принимающего решение, о параметрах модели задачи принятия решений делятся на классы:

- *хорошо структурированные задачи*: проблемные ситуации, для которых можно написать одну корректную математическую модель;
- *удовлетворительно структурированные задачи*: проблемные ситуации, для которых можно написать одну или несколько корректных математических моделях, но существует проблема выбора оптимального решения;
- *плохо структурированные задачи:* проблемные ситуации, для которых нельзя написать одну корректную математическую модель, вследствие учета неопределенностей, а поэтому в модель нужно вводить субъективное представление о влиянии внешней среды на исход решения.

§ 9.2. Задача принятия решений в условиях риска

Введем следующие обозначения:

d_i , $i = \overline{1,m}$ – возможные варианты решения;

$s_j,\ j=\overline{1,n}$ – возможные состояния внешней среды;

$p(s_j)$ – вероятность реализации состояния $s_j,\ j=\overline{1,n}$;

$h(d_i,s_j)$ – полезность принятого решения d_i при реализации состояния s_j.

Исходные данные *задачи принятия решения в условиях риска* можно представить в виде таблицы (матрицы полезности) и вероятностей реализации состояний:

Решения	Состояния среды s_1	s_2	$\cdots$	s_n
d_1	$h(d_1,s_1)$	$h(d_1,s_2)$	$\cdots$	$h(d_1,s_n)$
d_2	$h(d_2,s_1)$	$h(d_2,s_2)$	$\cdots$	$h(d_2,s_n)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
d_m	$h(d_m,s_1)$	$h(d_m,s_2)$	$\cdots$	$h(d_m,s_n)$
Вероятности	$p(s_1)$	$p(s_2)$	$\cdots$	$p(s_n)$

Каждое возможное решение $d_i,\ i=\overline{1,m}$ может быть оценено с точки зрения его ожидаемой полезности $H(d_i)$, которая находится как математическое ожидание по формуле:

$$H(d_i)=\sum_{i=1}^{n} h(d_i,s_j)\,p(s_j)\ .$$

Критерий ожидаемого значения. Задачу принятия решения в условиях риска можно поставить как задачу *максимизации* ожидаемой полезности принятого решения

$$\max_{d_i,\ i=\overline{1,m}} H(d_i)=H(d^*),$$

либо как задачу *минимизации* ожидаемых затрат

$$\min_{d_i,\ i=\overline{1,m}} H(d_i)=H(d^*).$$

Решение d^* называется *оптимальным решением ЗПР в условиях риска* по критерию ожидаемого значения.

Замечание 9.2.1. Ожидаемую полезность (затраты) решения $H(d_i)$ часто обозначают $EMV(d_j)$ – *expected monetary value* (*ожидаемое значение выигрыша*).

Замечание 9.2.2. Оптимальное решение ЗПР в условиях риска, найденное с помощью критерия ожидаемого значения, *называется оптимальной стратегией Байеса.*

В ЗПР в условиях риска можно применять и другие критерии, например *критерий дисперсии полезности принятого решения.*

Обозначим $D(d_i)=\sum_{j=1}^{n}\big(h(d_i,s_j)-H(d_i)\big)^2 p(s_j)$ – дисперсия полезности решения d_i. Тогда задачу принятия решения в условиях риска можно поставить как задачу *минимизации* дисперсии полезности решения d_i:

$$\min_{d_i,\, i=\overline{1,m}} D(d_i) = D(d_*).$$

Решение d_* называется *оптимальным решением ЗПР в условиях риска* по критерию дисперсии полезности решения.

Пример 9.2.1.

Рассмотрим следующую ЗПР. Имеется 100 урн, в каждой по 10 шаров. При этом урны бывают двух типов: в урне типа I находится 5 черных и 5 белых шаров, а в урне типа II – 8 черных и 2 белых шара. Известно, что урн типа I – 70 штук, а урн типа II – 30 штук. Играющий подходит к случайно выбранной урне и должен сказать, какого она типа или отказаться от игры. Если он называет тип I и она действительно этого типа, то он выигрывает \$500, если она типа II, то он проигрывает \$200. Если играющий называет тип II и урна действительно этого типа, то он выигрывает \$1000, если же она типа I, то он проигрывает \$150. Какое решение должен принять игрок?

Решение.

Множество вариантов решения имеет вид: d_1 – назвать урну типа I; d_2 – назвать урну типа II; d_3 – отказаться от игры.

Множество состояний среды: s_1 – урна типа I, s_2 – урна типа II.

Тогда таблица выигрышей (полезностей) имеет вид:

	Состояния среды	
Решения	s_1	s_2
d_1	\$500	-\$200
d_2	-\$150	\$1000
d_3	\$0	\$0
Вероятности	0,7	0,3

Вычислим ожидаемые полезности каждого решения:

$$H(d_1) = 500 \cdot 0{,}7 + (-200) \cdot 0{,}3 = 290,$$

$$H(d_2) = -150 \cdot 0{,}7 + 1000 \cdot 0{,}3 = 195,$$

$$H(d_3) = 0.$$

Используя критерий ожидаемой полезности, игрок должен назвать урну типа I $\left(d^* = d_1\right)$, т. к.

$$H(d_1) = \max_{d_i} H(d_i) = 290.$$

Если использовать критерий дисперсии полезности, то оптимальным решением будет отказ от игры $\left(d^* = d_3\right)$, т. к.

$$D(d_3) = \min_{d_i} D(d_i) = 0\,.$$

§ 9.3. Метод дерева решений

Дерево решений, с одной стороны, представляет собой способ изображения процесса принятия решения. С другой стороны – это способ нахождения оптимального решения, когда сам процесс принятия решения достаточно сложен.

Дерево решений представляет собой (см. тема 4, § 4.1) *ориентированный граф*, исходящий из одной вершины (*основание дерева*), соответствующей исходной точке процесса принятия решения. Этот граф (дерево решений) состоит из 3 типов узлов:

- *узлы принятия решения* (на графе изображаются квадратами);
- *случайные узлы* (на графе изображаются кружками);
- *терминальные узлы* (на графе изображаются треугольниками).

Из терминальных узлов (концевых вершин дерева) не выходят никакие ребра. Этим узлам соответствуют количественные оценки варианта решения (полезности). Из остальных узлов обязательно выходят ребра. Все ребра дерева решений ориентированы в направлении принятия решения. Основание дерева может быть как узлом принятия решений, так и случайной вершиной.

Из узлов принятия решений исходят ребра, соответствующие возможным альтернативам решения в данной вершине.

Из случайных вершин исходят вероятностные ребра (соответствующие исходам случайных событий). На этих ребрах указываются вероятности исходов случайного события.

Метод нахождения оптимального решения с использованием дерева решений состоит из 3 этапов: построение дерева решений, его оценка и нахождение оптимального решения.

Этапы выполняются в приведенном порядке:

1. Строится дерево решений в направлении принятия решения. При этом на граф наносятся все известные числовые характеристики (полезности исходов, вероятности случайных событий).
2. Оценивается дерево решений последовательно по шагам в обратном направлении, т.е. начиная с терминальных вершин. При оценивании дерева решений последовательно вычисляются математические ожидания случайных событий (если вершина случайная) или оценки лучших альтернатив (если вершина соответствует принятию решения). Данные оценки приписываются соответствующей вершине дерева. Процесс оценивания заканчивается, когда оценка приписана основанию дерева.
3. Последний этап – это определение оптимального решения. Для нахождения оптимального решения дерево еще раз просматривается в прямом направлении.

Таким образом, процесс нахождения оптимального решения заключается в *тройной прогонке* дерева решений.

Пример 9.3.1. Задачу 9.2.1 можно решить с использованием дерева решений. Процесс принятия решения изображен на рис. 9.3.1.

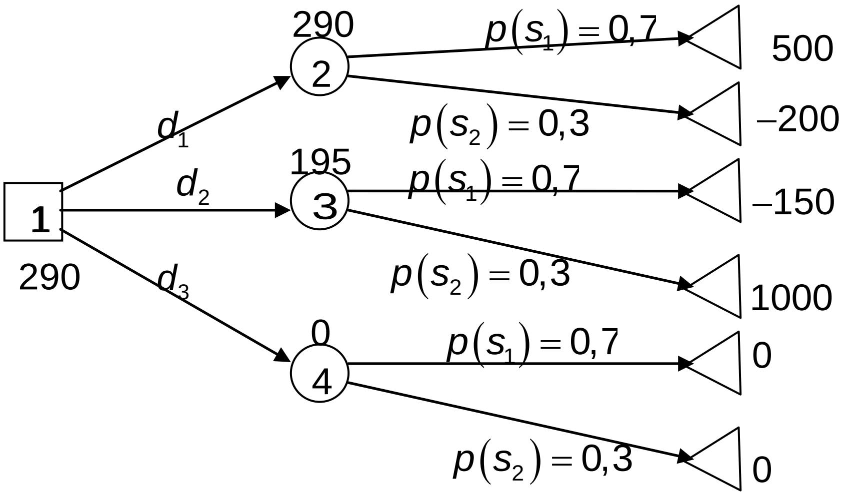

Рис. 9.3.1

§ 9.4. Задача принятия решений в условиях неопределенности. Критерии принятия решения в условиях неопределенности

Принятие решения в условиях неопределенности, как и в условиях риска, учитывает влияние внешней среды, но отличие состоит в том, что в условиях неопределенности вероятностное распределение, соответствующее состояниям внешней среды, неизвестно и не может быть оценено.

Недостаток информации о вероятностном распределении обусловил необходимость использования различных субъективных *критериев принятия решений* в условиях неопределенности:

- *критерий Вальда* (*«осторожного наблюдателя», максиминный, принцип «гарантированного результата»*).

Критерий оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном состоянии. По этому критерию выбирается стратегия, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем состоянии среды:

$$\max_{d_i}\min_{s_j} H(d_i,s_j)=\min_{s_j} H(d_0,s_j),$$

d_0– *максиминная стратегия* (*стратегия «осторожного наблюдателя»*), величина $\max_{s_j} H(d_0,s_j)$ определяет гарантированную полезность исхода принятого решения;

- *максимаксный критерий (критерий «здорового оптимиста»).*

Лицо, принимающее решение, считает, что среда наилучшим образом влияет на любое решение, поэтому выбирается наилучшая альтернатива из наилучших:

$$\max_{d_i}\max_{s_j} H(d_i, s_j) = \max_{s_j} H(d_1, s_j),$$

d_1– *максимаксная стратегия* (*стратегия « здорового оптимиста»),* величина $\max_{s_j} H(d_1, s_j)$ определяет максимально возможную полезность исхода принятого решения;

- *критерий Гурвица.*

Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решения от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного). При использовании этого критерия предполагается, что внешняя среда может находиться либо в наилучшем состоянии с вероятностью α, либо в наихудшем с вероятностью $1-\alpha$. Тогда ожидаемая полезность исхода d_i при заданном уровне α будет равна:

$$H_\alpha(d_i) = \alpha \max_{s_j} h(d_i, s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} h(d_i, s_j),$$

лучшим решением будет решение, максимизирующее ожидаемую полезность

$$H_\alpha(d_\alpha) = \max_{d_j} H_\alpha(d_j).$$

Решение d_α называется *оптимальным по критерию Гурвица* при уровне субъективной вероятности α.

Величину $\alpha \in [0,1]$ можно интерпретировать, как *показатель оптимизма* или *субъективную вероятность*, например:

если $\alpha = 1$, то критерий оптимистичный (*«здорового оптимиста»)*,

если $\alpha = 0$, то критерий пессимистичный (*«осторожного наблюдателя*»),

если $\alpha = 0{,}5$, у лица, принимающего решение, отсутствует выраженная склонность к оптимизму или пессимизму;

- *критерий Лапласа.*

Поскольку распределение вероятностей неизвестно, предполагается, что внешний фактор – случайная величина с равномерным распределением, т. е.:

$$p(s_1) = p(s_2) = \cdots = p(s_n) = \frac{1}{n}.$$

Тогда ожидаемая полезность равна

$$H_L(d_i) = (1/n)\sum_{j=1}^{n} H(d_i, s_j),$$

$$H_L(d_L) = \max_{d_i} H_L(d_j),$$

d_L – *оптимальное решение по критерию Лапласа*;

- *критерий Сэвиджа.*

При помощи этого критерия можно «смягчить» консерватизм максиминного критерия путем замены матрицы полезности матрицей Сэвиджа, которая строится следующим образом:

1) выбирается наилучшее решение при любом состоянии среды

$$h\left(s_j\right) = \max_{d_i} h(d_i, s_j);$$

2) находится «сожаление» (матрица Сэвиджа) – элементы матрицы представляют собой величины, равные изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно наилучшего возможного решения

$$H^c(d_i, s_j) = H(d_i, s_j) - h\left(s_j\right);$$

3) к матрице Сэвиджа применяется максиминный критерий

4) $$\max_{d_i} \min_{s_i} H^c(d_i, s_j) = \min_{s_i} H^c(d_c, s_j),$$

a. d_c – *оптимальное решение по критерию Сэвиджа*.

Этот критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние среды наихудшим образом отличается от предполагаемого.

Пример 9.4.1. Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить наиболее целесообразное количество комнат в этом отеле. Для решения проблемы составляют смету расходов по строительству отеля с различным числом комнат d_i, а также рассчитывают прибыль $h\left(d_i, s_j\right)$ в зависимости от количества мест, которые будут сняты (s_j). Расчетные данные приведены в таблице.

Таблица доходов (матрица полезности) $h\left(d_i, s_j\right)$ от строительства:

	$s_1 = 0$	$s_2 = 10$	$s_3 = 20$	$s_4 = 30$	$s_5 = 40$	$s_6 = 50$
$d_1 = 20$	-121	62	245	245	245	245
$d_2 = 30$	-168	14	198	380	380	380
$d_3 = 40$	-216	-33	150	332	515	515
$d_4 = 50$	-264	-81	101	284	468	650

Решение.

- *критерий Вальда («осторожного наблюдателя»):*

$$\max_i \min_j h\left(d_i, s_j\right) = -121, d_0 = 20.$$

Вывод: поскольку прибыль отрицательная, строить отель не следует.

- *максимаксный критерий («здорового оптимиста»):*

$$\max_i \max_j h\left(d_i, s_j\right) = 650, d_1 = 50.$$

Вывод: отель следует строить на максимальное количество комнат.

- *критерий Лапласа:*

$$\max_i (1/6)\sum_{j=1}^{6} h\left(d_i, s_j\right) = \max\left\{153, 198, 210, 193\right\} = 210, d_L = 40.$$

Вывод: если считать вероятности всех состояний равными, то отель следует строить на 40 комнат.

- *критерий Гурвица:*

$\alpha \in [0,1]$ – субъективная вероятность,

$$H_\alpha\left(d_i\right) = \alpha \max_{s_j} h\left(d_i, s_j\right) + (1-\alpha)\min_{s_j} h\left(d_i, s_j\right).$$

При различных значениях параметра α, получаем различные решения по критерию Гурвица

Решения	Вероятности α 0,1	0,2	0,5	0,9
$d_1 = 20$	-84	-47	62	206
$d_2 = 30$	-114	-59	108	325
$d_3 = 40$	-143	-70	150	442
$d_4 = 50$	-172	-81	193	560
Оптимальное решение d_α	20	20	50	50

Вывод: если у лица, принимающего решение, преобладает пессимистичное представление о влиянии внешней среды (например, $\alpha = 0{,}1$ или $\alpha = 0{,}2$), то строить отель нельзя, т.к. ожидаемая полезность при оптимальном решении отрицательна, если $\alpha = 0{,}5$ (нет склонности к оптимизму или пессимизму) или $\alpha = 0{,}9$ (оптимистичное представление о влиянии внешней среды), то строить отель нужно на максимальное количество комнат ($d_4 = 50$).

- *критерий Сэвиджа:*

матрица Сэвиджа

	$s_1 = 0$	$s_2 = 10$	$s_3 = 20$	$s_4 = 30$	$s_5 = 40$	$s_6 = 50$
$d_1 = 20$	0	0	0	-135	-270	-405
$d_2 = 30$	-47	-48	-47	0	-135	-270
$d_3 = 40$	-95	-95	-95	-48	0	-135
$d_4 = 50$	-143	-143	-144	-96	-47	0

$$\max_i \min_j h^c\left(s_i, d_j\right) = \max\left\{-405, -270, -135, -144\right\} = -135, d_c = 40 .$$

Вывод: исходя из критерия Сэвиджа, следует выбирать решение d_3 (строить отель на 40 комнат), этот выбор минимизирует возможное «сожаление».

Выводы

- Все задачи принятия решения можно классифицировать как задачи принятия решения в условиях определенности, условиях риска, условиях неопределенности, условиях конфликта.
- При принятии решения в условиях риска учитывается внешняя среда, параметры модели считаются случайными величинами с известными законами распределения.
- Основным критерием, применяемым в задачах принятия решения в условиях риска, является критерий максимизации ожидаемой полезности.
- Недостаток информации о вероятностном распределении состояний внешней среды обусловил использование различных субъективных критериев принятия решения в условиях неопределенности.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные элементы процесса принятия решений.
2. Какие существуют классы задач принятия решения в зависимости от влияния условий внешней среды и информированности лица, принимающего решения?
3. В чем отличие задачи принятия решения в условиях риска и задачи принятия решения в условиях неопределенности?
4. Как строится дерево решений?
5. Какие типы узлов используются при построении дерева решений, в чем различие между ними?
6. Каков критерий выбора решения при использовании дерева решений?
7. Что такое EMV решения?
8. Производитель бурильных машин, имея \$50000 годового дохода, решает, стоит ли ему переходить на выпуск новой бурильной установки. Проблема заключается в том, рекомендует или нет Министерство топлива и энергетики эту установку к внедрению. Затраты по переходу на выпуск новой установки составляют \$100000. Если рекомендация министерства будет, то доход от реализации составит примерно \$200000. Однако менеджеры производителя оценивают шансы рекомендации министерства только на 30%.

   а) Нарисуйте и оцените дерево принятия решения.

b) Каково EMV вашего решения?

c) Что вы рекомендуете производителю бурильных машин?

9. Объясните различие между минимаксным и максимаксным критериями принятия решений.

10. Объясните процедуру нахождения оптимального решения по критерию Гурвица.

11. Объясните процедуру нахождения оптимального решения по критерию Лапласа.

12. Объясните процедуру нахождения оптимального решения по критерию Сэвиджа.

Библиография

1. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.
2. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2003.
3. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А.,Тришин И.М.,Фридман М.Н.* Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.
4. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.
5. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В*. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.
6. *Хазанова Л.Э.* Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.
7. *Cook T. & Russel R.A.* Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.
8. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.
9. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.