Тема 11. Матричные игры

Цель: познакомить читателя с основными понятиями теории матричных игр: принципом максимина и минимакса, ситуациями равновесия, смешанным расширением игры, выяснить взаимосвязь между матричной игрой и задачей линейного программирования.

Задачи:

- научиться находить минимаксные и максиминные стратегии игроков в матричных играх, ситуации равновесия в чистых стратегиях;
- научиться использовать графический метод для нахождения ситуаций равновесия в смешанных стратегиях для игр с двумя чистыми стратегиями у одного из игроков;
- получить представление о нахождение ситуации равновесия в смешанных стратегиях в любой матричной игре сведением ее к задаче линейного программирования.

Оглавление

§ 11.1. Понятие матричной игры.
§ 11.2. Максиминные и минимаксные стратегии.
§ 11.3. Ситуации равновесия в матричных играх.
§ 11.4. Смешанные стратегии. Смешанное расширение игры.
§ 11.5. Существование решения матричной игры в смешанных стратегиях.
§ 11.6. Применение методов линейного программирования к решению матричных игр.
§ 11.7. Свойства оптимальных смешанных стратегий.
§ 11.8. Графоаналитический метод решения игр.

§ 11.1. Понятие матричной игры

Антагонистическая игра (см. § 10.1), в которой у каждого игрока конечное множество стратегий, называется *матричной игрой*.

Матричную игру можно задать как набор объектов $\Gamma = (M, N, A)$, где

- $M = \{1, 2, \ldots m\}$ – множество стратегий первого игрока;
- $N = \{1, 2, \ldots n\}$ – множество стратегий второго игрока;
- $(i, j) \in M \times N$ – ситуация в игре Γ;
- a_{ij} – выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока) в ситуации $(i, j) \in M \times N$;
- $A = \{a_{ij}\}, (i, j) \in M \times N$ – матрица выигрышей первого игрока.

Игра происходит следующим образом: игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии $i \in M$ и $j \in N$ из множества своих возможных стратегий. В результате формируется пара стратегий

$$(i, j), \ (i, j) \in M \times N ,$$

называемая *ситуацией*. После этого игра прекращается, первый игрок получает выигрыш a_{ij}, а второй – $\left(-a_{ij}\right)$.

§ 11.2. Максиминные и минимаксные стратегии

В теории игр предполагается, что оба игрока действуют рационально, т. е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим для себя образом. В основу выработки понятия оптимальности для матричной игры $\Gamma = \left(M, N, A\right)$ можно положить следующие соображения.

- Первый игрок может всегда себе гарантировать выигрыш

$$\underline{v} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} ,$$

который называется *нижним значением игры* $\Gamma = \left(M, N, A\right)$, принцип построения стратегии i_0, основанный на максимизации минимального выигрыша называется *принципом максимина,* стратегия i_0– *максиминной стратегией* первого игрока. Таким образом, разумной стратегией игрока 1 можно считать ту, при которой его наименьший выигрыш окажется максимальным.

- Второй игрок может всегда себе гарантировать проигрыш

$$\overline{v} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} ,$$

который называется *верхним значением игры* $\Gamma = \left(M, N, A\right)$, принцип построения стратегии j_0, основанный на минимизации максимального выигрыша называется *принципом минимакса,* стратегия j_0 – *минимаксной стратегией* второго игрока. Таким образом, разумной стратегией игрока 2 можно считать ту, при которой его наибольшие потери окажутся минимальными.

Минимакс и максимин для игры $\Gamma = \left(M, N, A\right)$ можно найти по следующей схеме:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \min a_{1j} \\ \min a_{2j} \\ \dots \\ \min a_{mj} \end{matrix} \rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

$$\max a_{i1} \quad \max a_{i1} \quad \max a_{i1}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Для любой матричной игры справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.2.1.

В матричной игре $\Gamma = (M, N, A)$ $\underline{v} \le \overline{v}$, т. е.

$$\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \le \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij}.$$

Пример 11.2.1. Найти максиминные и минимаксные стратегии в игре Γ_A и Γ_B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

В игре Γ_A нижнее значение игры (максимин) $\underline{v} = 3$, максиминной стратегией первого игрока является стратегия $i_0 = 2$. Верхнее значение игры (минимакс) $\overline{v} = 3$**,** минимаксная стратегия второго игрока – $j_0 = 2$:

$$\begin{array}{cc} & \min_j a_{ij} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \rightarrow \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = 3$$

$$\max_i a_{ij}: \quad 6 \quad 3 \quad 8$$

$$\downarrow$$

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij} = 3$$

В игре Γ_B нижнее значение игры (максимин) $\underline{v} = 2$, максиминной стратегией первого игрока является стратегия $i_0 = 2$. Верхнее значение игры (минимакс) $\overline{v} = 5$**,** минимаксная стратегия второго игрока – $j_0 = 2$:

$$\begin{array}{lccl} & & & \min\limits_j b_{ij} \\ B = & \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \to \underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j b_{ij} = 2 \\ \max\limits_i b_{ij} & 7 \quad 5 & & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{v} = \min_j \max_i b_{ij} = 5$$

§ 11.3. Ситуации равновесия в матричных играх

Рассмотрим вопрос об оптимальном поведении игроков в матричной игре. Естественно считать оптимальной в игре $\Gamma = (M, N, A)$ такую ситуацию $(i^*, j^*) \in M \times N$, от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться. Такая ситуация называется *равновесной*, а принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации, – *принципом равновесия.*

В матричной игре $\Gamma = (M, N, A)$ ситуация (i^*, j^*) называется *ситуацией равновесия* или *седловой точкой*, если для всех $i \in M$ и $j \in N$ выполняются неравенства:

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*} \le a_{i^* j}.$$

Число $v = a_{i^* j^*}$, равное значению функции выигрыша в ситуации равновесия (i^*, j^*), называется *значением игры* $\Gamma = (M, N, A)$.

Стратегия i^* называется *оптимальной* стратегией первого игрока, стратегия j^* – *оптимальной* стратегией второго игрока.

Ситуация равновесия (седловая точка) является ситуацией равновесия по Нэшу в матричной игре (см. § 10.2).

Теорема 11.3.1. Для того, чтобы в матричной игре $\Gamma = (M, N, A)$ существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы нижнее значение игры было равно верхнему значению игры, т. е. выполнялось равенство

$$\underline{v} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} = \overline{v}.$$

Пусть (i^*, j^*) ситуация равновесия в игре Γ_A, тогда *значение игры* v, определяется следующим образом:

$$v = \overline{v} = \underline{v} = a_{i^* j^*},$$

где стратегии i^* (максиминная) и j^* (минимаксная) – *оптимальные стратегии* игрока 1 и 2 соответственно.

Пример 11.3.1. Найти ситуации равновесия и значения следующих матричных игр:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. В игре Γ_A $\overline{v} = \underline{v} = 2$, поэтому ситуация, образованная максиминной и минимаксной стратегиями игроков, $\left(i^*, j^*\right) = (2,1)$ является ситуацией равновесия.

В игре Γ_B ситуации равновесия нет, т. к. $\overline{v} = 5, \underline{v} = 3$, следовательно, минимаксная ($j_0 = 2$) и максиминная ($i_0 = 1$) стратегия не образуют ситуацию равновесия.

Теорема 11.3.2. Пусть $\left(i_1^*, j_1^*\right)$ и $\left(i_2^*, j_2^*\right)$ – две произвольные ситуации равновесия в антагонистической игре Γ, $K\left(i_1^*, j_1^*\right), K\left(i_2^*, j_2^*\right)$ – выигрыши в соответствующих ситуациях. Тогда

1) $K\left(i_1^*, j_1^*\right) = K\left(i_2^*, j_2^*\right) = K\left(i_1^*, j_2^*\right) = K\left(i_2^*, j_1^*\right)$;

2) ситуации $\left(i_1^*, j_2^*\right)$, $\left(i_2^*, j_1^*\right)$ – ситуации равновесия в игре Γ.

Пример 11.3.2. Найти значение игры и оптимальные стратегии игроков в матричной игре:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 20 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -16 & 0 & 16 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Нижнее значение игры $\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2$, верхнее значение игры $\overline{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2$, следовательно, $v = 2$, а максиминные и минимаксные стратегии игроков образуют ситуацию равновесия. Первый игрок имеет две минимаксные стратегии – $i_1^* = 1$, $i_2^* = 3$, второй игрок имеет две максиминные стратегии – $j_1^* = 2$, $j_2^* = 5$. Следовательно, в игре существуют четыре ситуации равновесия – $(1,2), (1,5), (3,2), (3,5)$.

§ 11.4. Смешанные стратегии. Смешанное расширение игры

Если в игре Γ_A не существует ситуации равновесия, то максиминная и минимаксная стратегии не являются оптимальными. В этом случае игрокам разумно действовать случайно, что обеспечивает наибольшую скрытность выбора стратегий. Результат выбора не может стать известным противнику, поскольку до реализации случайного механизма не известен самому игроку.

Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией*.

- Вектор x называется *смешанной стратегией* первого игрока, если

$$x = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m\right) \in R^m, \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m.$$

- Вектор y называется *смешанной стратегией* второго игрока, если

$$y = \left(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n\right) \in R^n, \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1, \eta_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n.$$

- Множества X и Y называются *множествами смешанных стратегий* первого и второго игроков соответственно.
- Вектор $u_i = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m\right) \in X$, где $\xi_i = 1, \xi_j = 0, i \neq j, i \in M$, есть i-я *чистая стратегия* первого игрока.
- Вектор $w_j = \left(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n\right) \in Y$, где $\eta_j = 1, \eta_i = 0, j \neq i, j \in N$, есть j-я *чистая стратегия* второго игрока.
- Пара $\left(x, y\right) \in X \times Y$ смешанных стратегий называется ситуацией в смешанных стратегиях.

Выигрыш первого игрока в ситуации $\left(x, y\right) \in X \times Y$ определим как математическое ожидание выигрыша при условии, что игроки используют смешанные стратегии x и y.

Математическое ожидание выигрыша первого игрока в ситуации $\left(x, y\right) \in X \times Y$ равно

$$K\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

или в матричной форме

$$K\left(x, y\right) = \left(xA\right) y^T = x\left(Ay^T\right).$$

Выигрыши при применении одним из игроков чистой стратегии (i или j соответственно), а другим – смешанной (x или y) имеют вид:

$$K\left(i, y\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j = a_i y^T, i = 1,2,\ldots m,$$

$$K\left(x, j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \xi_i = x a^j, j = 1,2,\ldots n,$$

где a_i – i-я строка, a^j – j-й столбец матрицы A.

Игру $\overline{\Gamma}_A = (X, Y, K)$ будем называть *смешанным расширением* игры $\Gamma = (M, N, A)$.

§ 11.5. Существование решения матричной игры в смешанных стратегиях

Ситуация (x^*, y^*) в игре $\overline{\Gamma}_A$ называется *ситуацией равновесия в смешанных стратегиях*, а число $v = K(x^*, y^*)$ является *значением игры* $\overline{\Gamma}_A$, если для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y).$$

Пример 11.5.1. Проверить, что смешанные стратегии

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),\ y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

оптимальны, а $v = 0$ значение игры $\overline{\Gamma}_A$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем $K(x^*, y^*) = x^* A (y^*)^T = 0$. Для любой стратегии $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ имеем $K(x^*, y) = x^* A (y)^T = 0$, для любой стратегии $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ имеем $K(x, y^*) = xA(y^*)^T = 0$. Следовательно, указанные стратегии являются оптимальными, а $v = 0$.

Теорема 11.5.1. (*О существовании ситуации равновесия в смешанных стратегиях)*.

Всякая матричная $\Gamma = (M, N, A)$ игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

§ 11.6. Применение методов линейного программирования к решению матричных игр

Матричная игра $\overline{\Gamma}_A$ в определенном смысле эквивалентна паре двойственных задач линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\min xu^T \\ &xA \ge w \\ &x \ge 0 \end{aligned} \qquad (11.6.1)$$

$$\max yw^T$$
$$Ay^T \le u \qquad (11.6.2)$$
$$y \ge 0$$

где $u = (1,1,\dots,1) \in R^m, w = (1,1,\dots,1) \in R^n$.

Теорема 11.6.1. Пусть $\overline{\Gamma}_A$ $(m \times n)$ – игра с положительной матрицей A (все элементы положительны) и даны две задачи линейного программирования $(11.6.1)$, $(11.6.2)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Обе задачи линейного программирования имеют оптимальное решение $\overline{x}$ и $\overline{y}$, при этом

$$\theta = \min_x xu^T = \max_y yw^T .$$

2. Значение v_A игры $\overline{\Gamma}_A$ равно

$$v_A = \frac{1}{\theta},$$

а вектора

$$x^* = \frac{\overline{x}}{\theta}, \quad y^* = \frac{\overline{y}}{\theta}$$

являются оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков.

3. Любые оптимальные стратегии $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$ игроков могут быть построены указанным способом, т. е.

$$X^* = \frac{\overline{X}}{\theta},\ Y^* = \frac{\overline{Y}}{\theta},$$

где

$\overline{X} \ne \varnothing$ – множество оптимальных решений задачи $(11.6.1)$;

$\overline{Y} \ne \varnothing$ – множество оптимальных решений задачи $(11.6.2)$.

Замечание 11.6.1. Если матрица игры A' не является положительной, то существует такая константа $\beta > 0$, что матрица $A = \left\{a_{ij}{}' + \beta\right\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n},}$ – положительна.

Тогда значение игры A' равно

$$v_{A'} = v_A - \beta = 1/\theta - \beta ,$$

оптимальные стратегии в игре с матрицей A' и матрицей A совпадают.

Пример 11.6.1. Решим матричную игру $\overline{\Gamma}_A$ сведением ее к задаче линейного программирования, где

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Решение. Соответствующие задачи линейного программирования имеют вид:

$$\begin{array}{ll} \min\left(\xi_1+\xi_2\right) & \max\left(\eta_1+\eta_2\right)\\ 4\xi_1+2\xi_2\ge 1 & 4\eta_1\le 1\\ 3\xi_2\ge 1 & 2\eta_1+3\eta_2\le 1\\ \xi_1\ge 0,\xi_2\ge 0 & \eta_1\ge 0,\eta_2\ge 0 \end{array}.$$

Оптимальные решения этих задач можно найти геометрически:

$$\bar{x}=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{3}\right),\ \bar{y}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right);$$

$$\theta=\bar{x}u=\bar{y}w=\frac{5}{12}.$$

Тогда оптимальные смешанные стратегии:

$$x^*=\frac{\bar{x}}{\theta}=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),\ y^*=\frac{\bar{y}}{\theta}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right),$$

значение игры:

$$v_A=\frac{1}{\theta}=\frac{12}{5}.$$

§ 11.7. Свойства оптимальных смешанных стратегий

Теорема 11.7.1. Для того чтобы ситуация $\left(x^*,y^*\right)$ была равновесной в игре $\bar{\Gamma}_A$, а число $v=K\left(x^*,y^*\right)$ являлось значением игры $\bar{\Gamma}_A$, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех $i\in M$ и $j\in N$:

$$K\left(i,y^*\right)\le K\left(x^*,y^*\right)\le K\left(x^*,j\right).$$

Теорема 11.7.2. Для того чтобы ситуация в смешанных стратегиях $\left(x^*,y^*\right)$ была равновесной в игре Γ_A, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\min_{j\in N}K\left(x^*,j\right)=\max_{i\in M}K\left(i,y^*\right).$$

Теорема 11.7.3. Для матричной игры $\bar{\Gamma}_A$ справедливы следующие соотношения:

$$v_A=\max_{x\in X}\min_{j\in N}K\left(x,j\right)=\min_{y\in Y}\max_{i\in M}K\left(i,y\right),$$

причем экстремумы по смешанным стратегиям x и y достигаются на оптимальных стратегиях игроков.

Теорема 11.7.4. Пусть $x^* = \left(\xi_1^*, \dots, \xi_m^*\right)$ и $y^* = \left(\eta_1^*, \dots, \eta_n^*\right)$ – оптимальные стратегии в игре $\overline{\Gamma}_A$, v_A – значение игры. Тогда для любого $i \in M$, при котором $K\left(i, y^*\right) < v_A$, имеет место равенство $\xi_i^* = 0$, а для любого $j \in N$, при котором $K\left(x^*, j\right) > v_A$, имеет место равенство $\eta_j^* = 0$.

Обратно, если $\xi_i^* > 0$, то $K\left(i, y^*\right) = v_A$, а если $\eta_j^* > 0$, то $K\left(x^*, j\right) = v_A$.

Чистая стратегия $i \in M \left(j \in N\right)$ первого (второго) игрока называется *существенной или активной* стратегией, если существует оптимальная стратегия $x^* = \left(\xi_1^*, \dots, \xi_m^*\right)$ ($y^* = \left(\eta_1^*, \dots, \eta_n^*\right)$) этого игрока, для которой $\xi_i^* > 0$ ($\eta_i^* > 0$).

Из определения существенной стратегии и теоремы 11.7.4 следует, что для каждой существенной стратегии i игрока 1 и любой оптимальной стратегии $y^* \in Y^*$ игрока 2 в игре Γ_A выполняется равенство

$$K\left(i, y^*\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j^* = v_A.$$

Аналогичное равенство имеет место для любой существенной стратегии j игрока 2 и оптимальной стратегии $x^* \in X^*$ игрока 1:

$$K\left(y^*, j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \xi_i^* = v_A.$$

Тогда теорема 11.7.4 может быть переформулирована следующим образом: если чистая стратегия игрока существенна, то она уравновешивает любую оптимальную стратегию противника.

- Множество $M_x = \left\{i \mid i \in M, \xi_i > 0\right\}$ называется спектром *смешанной стратегии* $x \in X$. Спектр смешанной стратегии состоит из стратегий, которые выбираются с положительными вероятностями.
- Множество $N_y = \left\{j \mid j \in N, \eta_j > 0\right\}$ называется спектром *смешанной стратегии* $y \in Y$.

Знание спектра оптимальной смешанной стратегии упрощает нахождение решения игры. Оптимальная смешанная стратегия и значение игры удовлетворяют системе:

для первого игрока

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i^* = v_A, & j \in N_{y^*}, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i^* > v_A, & j \in N \setminus N_{y^*}, \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* = 1, \ \xi_i^* \ge 0, i \in M, \end{cases}$$

для второго игрока

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* = v_A, & i \in M_{x^*}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* < v_A, & i \in M \setminus M_{x^*}, \\ \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* = 1, \eta_j^* \ge 0, \ j \in N. \end{cases}$$

§ 11.8. Графоаналитический метод решения игр

В основе метода лежит свойство оптимальных стратегий x^*, y^* доставлять внешние экстремумы в равенстве (теорема 11.7.3):

$$v_A = \max_{x \in X} \min_{j \in N} K(x, j) = \min_{y \in Y} \max_{i \in M} K(i, y).$$

Рассмотрим игру, в которой игрок 1 имеет только две стратегии чистые стратегии, игрок 2 – произвольное число чистых стратегий.

Матрица игры имеет вид:

$$A_{[2\times n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}.$$

Пусть игрок 1 выбрал смешанную стратегию $x = (\xi, 1-\xi)$, а игрок 2 чистую стратегию $j \in N$. Тогда выигрыш игрока 1 в ситуации (x, j) равен

$$K(x, j) = \xi a_{1j} + (1-\xi) a_{2j}, \tag{11.8.1}$$

геометрически он представляет собой прямую линию в координатах (ξ, K). Каждой чистой стратегии второго игрока $j \in N$ соответствует своя прямая.

Графиком функции

$$H(\xi) = \min_{j \in N} K(x, j)$$

является *нижняя огибающая* семейства прямых $(11.8.1)$. Точка ξ^*, в которой достигается максимум функции $H(\xi), \xi \in [0,1]$, дает требуемое оптимальное решение $x^* = (\xi^*, 1-\xi^*)$, и значение игры $\overline{\Gamma}_A$ равно $v_A = H(\xi^*)$.

Аналогично можно решить игру, в которой второй игрок имеет только две чистые стратегии. Тогда матрица игры имеет вид:

$$A_{[m\times 2]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}.$$

Пусть $y = (\eta, 1-\eta)$ – смешанная стратегия второго игрока, тогда выигрыш игрока 2 в ситуации (i, y), $i \in M$, равен

$$K(i, y) = \eta a_{i1} + (1-\eta) a_{i2},$$

геометрически это прямая в координатах (η, K).

Графиком функции

$$H(\eta) = \max_{i \in M} K(i, y)$$

является *верхняя огибающая* семейства указанных прямых. Точка η^*, в которой достигается минимум функции $H(\eta), \eta \in [1,0]$, дает требуемое оптимальное решение $y^* = (\eta^*, 1-\eta^*)$ и значение игры $v_A = H(\eta^*)$.

Пример 11.8.1. Решить матричную игру, заданную матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Ожидаемый выигрыш первого игрока при различных стратегиях второго имеет вид

$K(x,1) = -\xi + 2$, $K(x,2) = 2\xi + 1$, $K(x,3) = -3\xi + 4$, $K(x,4) = 4\xi$.

Нижняя огибающая $H(\xi) = \min_j K(x, j)$ и сами прямые $K(x, j)$ изображены на рис 11.8.1.

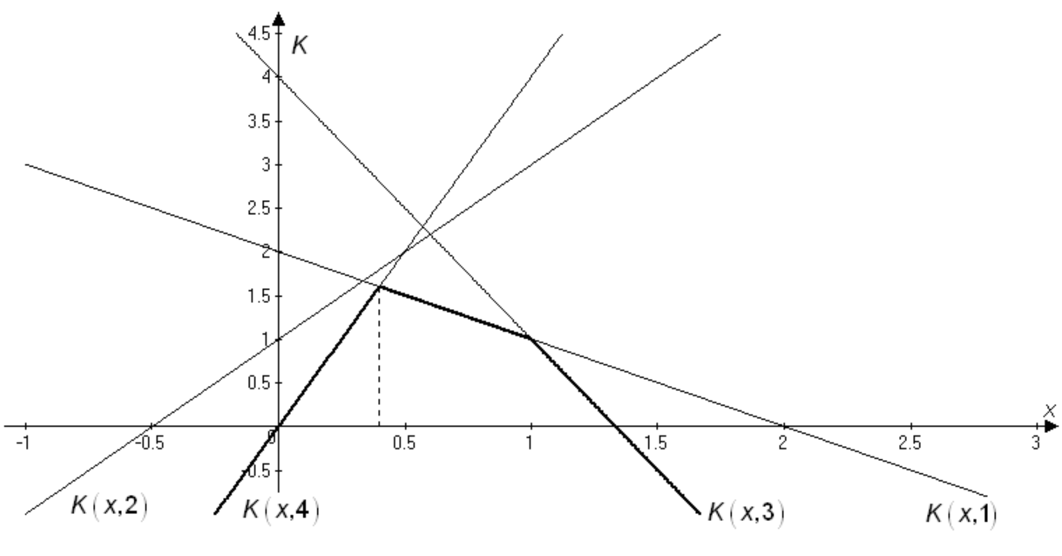

Рис.11.8.1

Точкой максимума функции $H(\xi)$ является точка пересечения первой и четвертой прямой, значение ξ^* можно найти из уравнения:

$$K(x,1) = K(x,4) \Leftrightarrow -\xi^* + 2 = 4\xi^* \Leftrightarrow \xi^* = \frac{2}{5}.$$

Получаем оптимальную стратегию первого игрока $x^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Заметим, что $v_A = K(x^*,1) = K(x^*,4) = \frac{8}{5}$.

Для оптимальной стратегии второго игрока $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*\right)$ должно выполняться:

$$v_A = K(x^*, y^*) = \eta_1^* K(x^*,1) + \eta_2^* K(x^*,2) + \eta_3^* K(x^*,3) + \eta_4^* K(x^*,4).$$

При этом $K(x^*,2) > 8/5$, $K(x^*,3) > 8/5$, следовательно, $\eta_2^* = 0$, $\eta_3^* = 0$ (см. теорему 11.7.4), а η_1^* и η_4^* можно найти из системы:

$$\begin{cases} K\left(1, y^*\right) = \eta_1^* + 4\eta_4^* = \frac{8}{5} \\ K\left(2, y^*\right) = 2\eta_1^* = \frac{8}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1^* = \frac{4}{5} \\ \eta_4^* = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока $y^* = \left(\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}\right)$.

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков – $x^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $y^* = \left(\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}\right)$, значение игры $v_A = \frac{8}{5}$.

Выводы

- Антагонистическая игра двух лиц с конечным множеством стратегий у каждого игрока называется матричной игрой.
- Принцип максимина (минимакса) позволяет определить гарантированный выигрыш первого (второго) игрока.
- Ситуация равновесия в чистых стратегиях не всегда существует, поэтому требуется вводить смешанное расширение матричной игры.
- Ситуация равновесия в смешанном расширении игры всегда существует, и ее можно получить, используя методы линейного программирования.
- Для матричных игр, в которых один из игроков имеет только две стратегии, решение можно найти графическим методом.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется антагонистической игрой?
2. Дайте определение матричной игры.
3. Как реализуется матричная игра?
4. Что представляет собой чистая стратегия 1-го (2-го) игрока?
5. Что такое максиминная и минимаксная стратегии игроков?
6. Что называется ситуацией равновесия?
7. Всегда ли максиминная и минимаксная стратегии игроков образуют ситуацию равновесия?
8. Что называется значением матричной игры?
9. Дайте определение смешанной стратегии 1-го (2-го) игрока.
10. Что называется выигрышем 1-го игрока в смешанных стратегиях?
11. Что такое смешанное расширение матричной игры?
12. Что такое значение игры в смешанных стратегиях?
13. Всегда ли матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях?
14. Как найти решение любой матричной игры в смешанных стратегиях?
15. Какая стратегия игрока называется существенной?
16. Что такое спектр смешанной стратегии?
17. В чем суть графического метода решения матричных игр?

Библиография

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.1985.
2. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998.
3. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир,1985.
4. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. Изд. дом «Вильямс», М., 2005.
5. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н*. Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.
6. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В.* Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №3. СПб, изд-во МБИ, 2005.
7. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.
8. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.