Тема 10. Некооперативные игры.

Цель: познакомить читателя с понятием игры в нормальной форме, дать классификацию игр, познакомить с основными принципами оптимальности в некооперативных играх, а также с их достоинствами и недостатками.

Задачи:

- научиться формулировать проблему принятия решения в условиях конфликта как игру в нормальной форме;
- познакомиться с основными принципами оптимальности в некооперативных играх: равновесие по Нэшу, оптимальность по Парето, доминирование стратегий, осторожное поведение;
- научиться применять введенные принципы оптимальности к простейшим задачам теории игр.

Оглавление

§10.1. Понятие игры в нормальной форме. Классификация игр

Основным объектом изучения теории игр являются математические модели принятия решений в условиях конфликта. Под *конфликтом* мы понимаем здесь взаимодействие нескольких участников, называемых в теории игр *игроками*, каждый из которых принимает решение, преследуя собственные интересы. Однако результат принимаемого решения не может быть полностью предопределен действием (*стратегией*) принимающего решение участника, а зависит от стратегий всех взаимодействующих лиц (*игроков*).

Наиболее простыми моделями подобных конфликтов являются салонные игры (например, карты или шахматы). Действительно, в такой игре выигрыш каждого участника зависит не только от его поведения (стратегии), но и от поведения противника. В каждом состязании (спортивном, экономическом или социальном) мы можем найти стратегический (поведенческий) аспект и тем самым проанализировать его с теоретико-игровых позиций. Например, в любой экономической задаче обязательно присутствуют проблемы пересечения интересов сторон, их взаимного влияния на результат экономического взаимодействия, что позволяет использовать для их анализа весь аппарат теоретико-игрового моделирования.

Считается, что теория игр сформировалась в середине 40-х XX в. Основание теории игр как самостоятельной дисциплины связывают с выходом монографии Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Впоследствии эта монография неоднократно переиздавалась и была переведена на русский язык в 1970 г. Другим ключевым событием в теории игр стала опубликованная в 1951 г. работа Джона Нэша (впоследствии лауреата Нобелевской премии в области экономики, 1994 г.), в которой был сформулирован принцип оптимального поведения при конфликтном взаимодействии – равновесие по Нэшу и доказано его существование в простейшем случае конечной игры.

Введем понятие игры в *нормальной (стратегической) форме.* Имеется самая общая формализация игры (нормальная или стратегическая форма), в которую вписываются все мыслимые конфликты с конечным числом участников. В этой формализации игра представляется как набор объектов: заинтересованные стороны, возможные действия каждой стороны, интересы сторон, поэтому *игрой в нормальной форме* называется набор объектов вида:

$$\Gamma_N = \left\langle N; X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n; K_1, \cdots, K_i, \cdots, K_n \right\rangle .$$

Здесь Γ_N – обозначение игры; $N = \{1, \cdots, i, \cdots, n\}$ – множество *игроков*; $X_i = \{x_i\}$ – *множество стратегий* игрока $i \in N$; $K_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to R^1$ – *функция выигрыша* игрока $i \in N$. Значение функции выигрыша представляет собой *выигрыш (полезность),* который получает игрок i, если игроками используются стратегии $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

Игра происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга (не имея информации о действиях других игроков) выбирают свои стратегии $x_i \in X_i$ из множества всех своих возможных стратегий X_i, $i \in N$. В результате формируется набор стратегий

$$x_N = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n), \; x_N \in X_N ,$$

называемый в теории игр *ситуацией* (заметим, что здесь выражение $X_N = \prod_{i \in N} X_i$ обозначает операцию декартового произведения множеств, а множество X_N представляет собой *множество всех ситуаций* в игре). После этого игра прекращается, и каждый из игроков i, $i \in N$ получает выигрыш, который вычисляется как значение функции его выигрыша K_i в ситуации x_N, т. е. величину $K_i(x_N) = K_i(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$.

Пример 10.1.1. (*Аукцион неделимого товара)* На аукцион выставлен товар по начальной цене c , который должен быть куплен одним из участников аукциона. Предположим, что в аукционе принимают участие игроки из множества $N=\{1,\cdots,i,\cdots,n\}$. Ценность товара для каждого участника оценивается величиной v_i, $i\in N$. Будем предполагать, что

$$c\le v_n\le\cdots\le v_2\le v_1.$$

На аукционе участники независимо друг от друга назначают цену $x_i\ge c$, $i\in N$ (*аукцион закрытого типа*), победителем является тот участник, который назначает максимальную цену. Рассмотрим два типа аукционов, отличие этих типов аукционов состоит в том, какую цену должен платить победитель.

Обсудим эти вопросы более формально.

а) Аукцион первой цены. Победитель аукциона выплачивает названную им цену продавцу. Множество стратегий каждого участника есть $X_i=[c,+\infty), i=\overline{1,n}$. Пусть в ходе аукциона реализовалась ситуация $x_N=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$, обозначим множество игроков, назначивших максимальную цену, через

$$\omega(x_N)=\left\{i\,\middle|\,x_i=\max_{j=\overline{1,n}}x_j\right\}.$$

Тогда функция выигрыша участника аукциона примет вид:

$$\Pi_i(x_N)=\begin{cases}v_i-x_i,\ i=\min\limits_{j\in\omega(x_N)}j,\\ 0,\text{в противном случае.}\end{cases}$$

Заметим, что при одинаковых ценах предпочтение отдается тому игроку, для кого ценность товара больше. Таким образом, мы получили игру в нормальной форме $\Gamma_N=\left\langle N,\{X_i\}_{i\in N},\{\Pi_i\}_{i\in N}\right\rangle$, которая называется *моделью аукциона закрытого типа на повышение первой цены.*

б) Аукцион второй цены. В аукционе второго типа (*аукцион Викри*) победителем считается также участник, предложивший наибольшую цену, однако он должен уплатить вторую по величине цену. Множество стратегий каждого участника также есть $X_i=[c,+\infty), i=\overline{1,n}$.

Пусть в ходе аукциона реализовалась ситуация $x_N=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$, обозначим $x_{-i}^{+}=\max\limits_{j\ne i}x_j$. Тогда функция выигрыша участника примет вид:

$$\Pi_i(x_N)=\begin{cases}v_i-x_{-i}^{+},\ i=\min\limits_{j\in\omega(x_N)}j,\\ 0,\text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом имеем игру в нормальной форме $\Gamma_N=\left\langle N,\{X_i\}_{i\in N},\{\Pi_i\}_{i\in N}\right\rangle$, но другую.

Пример 10.1.2. (*Выбор способа передвижения по городу)*

Пусть число игроков n велико, каждый игрок имеет две стратегии: 0 – воспользоваться автомобилем; 1 – использовать общественный транспорт. Тогда $X_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$. Функция выигрыша определяется следующим образом:

$$H_i(x_N) = \begin{cases} a(t), & x_i = 1, \\ b(t), & x_i = 0, \end{cases}$$

где $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ имеют вид, изображенный на рис. 10.1.1.

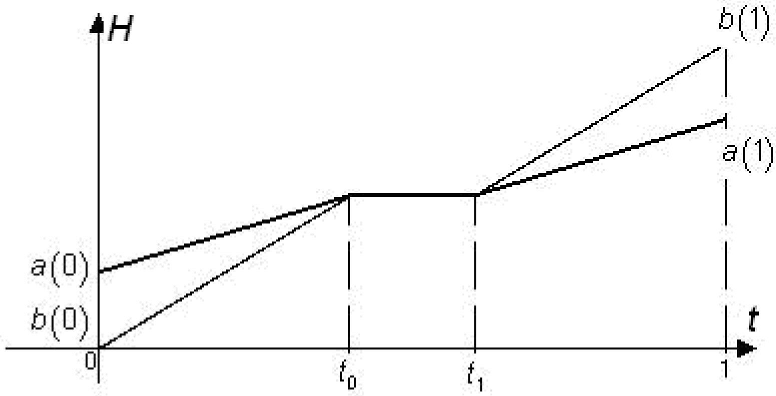

Рис. 10.1.1

Из вида функций следует, что если доля игроков, выбирающих стратегию 1, больше t_1, то на дорогах настолько свободно, что водитель чувствует себя лучше, чем пассажир в общественном транспорте. Если же доля автомобилистов больше $1-t_0$, то движение настолько интенсивное, что сравнение теперь в пользу пассажиров общественного транспорта.

Классификация игр.

Разговор о классификации игр актуален в первую очередь потому, что каждый класс игр, вообще говоря, использует свой математический аппарат (может быть, в этом и кроется основная сложность изучения теории игр в целом).

1. На первом уровне классификации игры делятся на *статические* и *динамические игры.* В статических играх (в отличие от динамических) стратегии игроков не зависят от времени.

2. Каждый класс можно разделить на *бескоалиционные* и *кооперативные* игры. В кооперативных играх в отличие от бескоалиционных допускаются совместные действия игроков и перераспределение выигрыша.

3. В зависимости от количества стратегий у игроков и свойств их функций выигрыша игры можно разделить на *конечные* (с конечным числом стратегий у каждого игрока) и *бесконечные игры.*

4. В зависимости от знания игроками самой игры в нормальной форме игры делятся на *игры с полной* и *неполной информацией* соответственно.

Игра Γ_N называется *игрой с полной информацией*, если каждый элемент в представлении игры общеизвестен всем игрокам. В противном случае игра Γ_N называется *игрой с неполной информацией*.

5. Бескоалиционные игры можно разделить на *игры с постоянной* и *переменной* суммой. Для игр с *постоянной суммой* для каждой ситуации x_N выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_N) = \text{const}.$$

Особенность игр с постоянной суммой заключается в том, что при любом исходе игры суммарный выигрыш всех игроков есть величина постоянная. Если эта константа равна 0, то говорят об *играх с нулевой суммой.*

6. Специально выделяется подкласс *игр двух лиц*. Заметим, что любая игра Γ_2 двух лиц определяется заданием следующих объектов:

$$\Gamma_2 = \langle X, Y, K_1, K_2 \rangle,$$

где X – множество стратегий игрока 1; Y – множество стратегий игрока 2; $K_i(x, y)$, $x \in X, y \in Y$ – функция выигрыша игрока i, $i = 1, 2$.

7. Игры двух лиц с нулевой суммой называются *антагонистическими*. Особенность антагонистической игры заключается в том, что в любой ситуации выигрыш каждого игрока равен проигрышу другого, поэтому формально антагонистическая игра Γ_2 определяется заданием объектов вида

$$\Gamma_2 = \langle X, Y, K \rangle,$$

где X – множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, $K(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ – функция выигрыша (проигрыша) игрока 1 (2) соответственно.

8. Наиболее разработаны классы конечных игр двух лиц, которые называются *биматричными* (если игра неантагонистическая) и *матричными* (если игра антагонистическая) соответственно.

Биматричная $m \times n$ игра $\Gamma_2(A, B)$ определяется заданием пары матриц $(A, B) = \{(a_{ij}, b_{ij})\}$ порядка $m \times n$, элементами которой являются пары выигрышей (a_{ij}, b_{ij}), а стратегиями – номера строк i, $i=\overline{1,m}$ и столбцов j, $j=\overline{1,n}$, для игроков 1 и 2 соответственно.

Матричная $m \times n$ игра $\Gamma_2(A)$ определяется заданием матрицы $A=\{a_{ij}\}$ порядка $m \times n$, элементами которой являются выигрыши (проигрыши) a_{ij} первого (второго) игрока, а стратегиями номера строк i, $i=\overline{1,m}$, и столбцов j, $j=\overline{1,n}$, для игроков 1 и 2 соответственно.

Биматричная игра $\Gamma_2(A,B)$ (матричная игра $\Gamma_2(A)$) реализуется следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга (не имея информации о действиях других игроков) выбирают свои стратегии $i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\}$ из множества всех своих возможных стратегий (выбирают номера строки и столбца матрицы соответственно). После осуществления своего выбора они одновременно объявляют свои стратегии. В результате формируется пара стратегий (i,j) – ситуация в игре. После этого игра прекращается, при этом игрок 1 получает выигрыш a_{ij}, а игрок 2 выигрыш b_{ij}, если игра биматричная, и $(-a_{ij})$, если игра матричная.

9. Среди бесконечных игр особый интерес представляет разделение на *непрерывные* (игры с непрерывными функциями выигрыша и компактными множествами стратегий) и *разрывные игры*.

10. Среди непрерывных игр выделяют подкласс *вогнутых игр*, когда функция выигрыша каждого игрока вогнута по стратегиям этого игрока.

§ 10.2. Принципы оптимальности в некооперативных играх

В теории некооперативных игр нет единого подхода к выработке принципов оптимальности. По существу имеется целое множество принципов оптимальности, каждый из которых основывается на некоторых дополнительных предположениях о поведении игроков и структуре игры.

Введем некоторые понятия и обозначения. Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma_N = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N} \right\rangle$. Произвольное подмножество $S \subset N$ будем называть *коалицией* в игре. Дополнение до множества всех игроков, т. е. коалицию $T = N \setminus S$, будем называть *дополнительной коалицией* для коалиции $S \subset N$. В дальнейшем дополнительную коалицию $T = N \setminus S$ для коалиции S будем обозначать как $T \equiv -S$. Понятно, что каждый игрок $i \in N$ является коалицией (*одноэлементная коалиция*), пустое множество и все множество игроков N также являются коалициями (*минимальная* и *максимальная* коалиции соответственно).

Определим теперь понятие стратегии для коалиции. Под *стратегией* x_S *коалиции* S будем понимать набор стратегий, выбранных всеми игроками, входящими в коалицию S, т. е. $x_S = \left(x_i\right)_{i \in S}$. Множество всех стратегий коалиции S обозначим через X_S.

Понятно, что

$$x_S \in X_S = \prod_{i \in S} X_i .$$

В такой терминологии ситуация $x_N = (x_1, \ldots, x_n) \in X_N$ может интерпретироваться как стратегия максимальной коалиции N. При этом в дальнейшем будем использовать следующее удобное обозначение, справедливое для любой ситуации $x_N = (x_1, \ldots, x_n)$ и любой коалиции S:

$$x_N = (x_S, x_{-S}), \;\; x_S \in X_S, \;\; x_{-S} \in X_{-S} ,$$

где x_S, x_{-S} – наборы стратегий игроков, входящих в основную коалицию S и дополнительную коалицию $-S$ и соответствующих ситуации $x_N = (x_1, \ldots, x_n)$.

- *Равновесие по Нэшу.*

Наиболее распространенным принципом оптимального поведения (или принципом оптимальности) в бескоалиционных играх следует считать *ситуацию равновесия* или *равновесие по Нэшу*, которое так названо в честь Джона Нэша, сформулировавшего этот принцип оптимальности в 1951 г. Принцип определяет в качестве оптимальных такие ситуации, для которых индивидуальные отклонения игроков от входящих в эту ситуацию стратегий не увеличивают выигрыша отклонившегося игрока при условии, что остальные игроки придерживаются зафиксированных в этой ситуации стратегий.

Математически это условие выглядит следующим образом.

Ситуация $x_N^* = (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^* \ldots, x_n^*) \in X_N$ в игре Γ_N называется *равновесием по Нэшу*, если для каждого игрока i, $i \in N$, и любой стратегии $x_i \in X_i$ этого игрока выполняются неравенства

$$K_i(x_1^*, \ldots, x_i^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) \ge K_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*).$$

Заметим, что в введенных выше обозначениях коалиции последнее неравенство примет следующий вид:

$$K_i(x_i^*, x_{-i}^*) \ge K_i(x_i, x_{-i}^*) .$$

Множество всех ситуаций равновесия по Нэшу будем обозначать $NE(\Gamma_N)$.

- *Оптимальность по Парето.*

В качестве другого принципа оптимальности рассмотрим *парето-оптимальное решение*.

Ситуация $\bar{x}_N \in X_N$ в игре Γ_N называется *парето-оптимальной (оптимальной по Парето)*, если не существует другой ситуации $x_N \in X_N$, когда неравенство

$$K_i(x_N) \geq K_i(\bar{x}_N)$$

справедливо для каждого игрока $i \in N$, и хотя бы для одного игрока $i_0 \in N$ оно выполняется как строгое, т. е.

$$K_{i_0}(x_N) > K_{i_0}(\bar{x}_N).$$

Множество всех парето-оптимальных решений игры Γ_N будем обозначать через $PO(\Gamma_N)$.

Если для ситуации $\bar{x}_N$ существует другая ситуация $x_N \in X_N$, для которой выполнены вышеприведенные неравенства, то говорят, что ситуация x_N *доминирует* ситуацию $\bar{x}_N$ *по Парето*. Таким образом, $PO(\Gamma_N)$ – это множество ситуаций, которые *недоминируемы по Парето* в игре Γ_N.

Заметим, что принцип оптимальности по Парето, вообще говоря, нельзя рассматривать как *принцип некооперативного поведения*, поскольку его реализация связана с совместным выбором стратегий всеми игроками. Однако сейчас он нас интересует в большей степени как желательное свойство «оптимального» решения, поскольку принцип оптимальности по Парето характеризует свойство *коллективной рациональности* принимаемого решения.

Пример 10.2.1 *(Игра «Перекресток»).*

Два автомобилиста двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно встречаются на перекрестке. Каждый из них может остановиться (стратегия 1) или ехать (стратегия 2). Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не пострадать в аварии и проехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой с матрицей:

$$(A,B) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,1) & (1-\varepsilon,2) \\ (2,1-\varepsilon) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

(неотрицательное число ε соответствует неудовольствию от того, что игрок остановился и пропустил партнера).

Решение. Непосредственной проверкой убедимся, что ситуации $(2,1)$, $(1,2)$ являются ситуациями равновесия по Нэшу.

Действительно, поскольку

$$K_1(1,2) \geq K_1(2,2),$$

$$K_2(1,2) \geq K_2(1,1),$$

$(1,2)$ – ситуация равновесия. Аналогично,

$$K_1(2,1) \geq K_1(1,1),$$

$$K_2(2,2) \geq K_2(2,2),$$

$(2,1)$ – ситуация равновесия.

Таким образом, для каждого игрока равновесной является стратегия «ехать», если другой игрок остановился, и наоборот, «остановиться», если другой выбрал стратегию «ехать». Однако выигрыш в две единицы каждый игрок может получить только при выборе стратегии «ехать», поэтому неизбежна борьба за лидерство, т.е. каждый из игроков заинтересован первым заявить стратегию «ехать».

Ситуациями, оптимальными по Парето, являются три ситуации: $PO(\Gamma_N) = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$.

Пример 10.2.2. «*Семейный спор».*

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}.$$

Игре можно дать следующую интерпретацию. Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч (стратегия 1, более предпочтительная для мужчины) или театр (стратегия 2, более предпочтительная для женщины). Если их желания не совпадают, они остаются дома.

Решение. Пользуясь определением, нетрудно проверить, что ситуации $(1,1)$ и $(2,2)$ являются ситуациями равновесия по Нэшу и оптимальны по Парето.

Пример 10.2.3. *«Дилемма заключенного».*

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (-8,-8) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-2,-2) \end{bmatrix}.$$

Игроки являются преступниками, которые находятся под подозрением в совершении тяжкого преступления. Если оба сознаются (стратегия 1), то будут осуждены на 8 лет каждый, если оба не сознаются (стратегия 2), то будут обвинены в незначительном преступлении и получат срок по 2 года. Если признается один, то он будет выпущен на свободу, а второй получит 10 лет.

Решение. Равновесием по Нэшу является ситуация $(1,1)$, оставшиеся ситуации оптимальны по Парето.

- *Доминирование.*

Стратегия $\tilde{x}_i \in X_i$ называется *доминирующей* стратегией игрока i, $i \in N$, если для любого $x_i \in X_i$ и любого $x_{-i} \in X_{-i}$ выполнено условие

$$K_i\left(\tilde{x}_i, x_{-i}\right) \geq K_i\left(x_i, x_{-i}\right).$$

Ситуация $\tilde{x}_N = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ называется *равновесием в доминирующих стратегиях*, где $\tilde{x}_i \in X_i$ – доминирующая стратегия игрока i, $i \in N$.

Пример 10.2.1. В игре «Перекресток» (пример 10.2.1) у игроков нет доминирующих стратегий.

Пример 10.2.2. В игре «Семейный спор» (пример 10.2.2) у игроков тоже нет доминирующих стратегий.

Пример 10.2.3. В игре «Дилемма заключенного» (пример 10.2.3) найти равновесие в доминирующих стратегиях.

Решение. Для обоих игроков стратегия 1 доминирует стратегию 2, таким образом, в игре единственное равновесие в доминирующих стратегиях имеет вид $(1,1)$. В то же время исход $(2,2)$дает больший выигрыш для обоих игроков. Таким образом, некооперативное эгоистическое рациональное поведение вступает в противоречие с коллективными интересами.

Пример 10.2.4. Найдем множество доминирующих стратегий в примере 10.1.1.

а) Аукцион первой цены. Искренняя стратегия игрока v_i, $i \in N$, доминирует любую стратегию x_i, для которой выполнено условие $v_i < x_i$. Действительно, $\Pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) \leq \Pi_i(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n)$, т. к. $\Pi_i(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n) = 0$, а $\Pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) \leq 0$. Значит, множество доминирующих стратегий любого игрока имеет вид: $\left[c, v_i\right]$.

б) Аукцион второй цены.

Случай 1. Игрок i выигрывает на аукционе при исходе $(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n)$, отсюда следует, что $x_{-i}^{+} \leq v_i$. Тогда $\Pi_i(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n) = v_i - x_{-i}^{+} \geq 0$, $\Pi_i(x_N) = 0$. Следовательно, $\Pi_i(x_N) \leq \Pi_i(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n)$.

Случай 2. Игрок i не выигрывает на аукционе при исходе $(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n)$, тогда $x_{-i} \geq v_i$, а значение функции $\Pi_i(x_N) = \begin{cases} v_i - x_{-i} \\ 0 \end{cases}$.

Поэтому $\Pi_i(x_N) \leq 0 = \Pi_i(x_1, \ldots, v_i, \ldots x_n)$. Убедитесь, что у игрока i нет другой доминирующей стратегии, а значит, у игрока только одна доминирующая стратегия – v_i.

Равновесие в доминирующих стратегиях приводит к победе первого игрока, который выплачивает цену v_2, однако этот исход доминируется по Парето исходом $(c,\ldots,c,\ldots c)$: если каждый игрок назначит начальную цену аукциона, то первый игрок выиграет, заплатив лишь c. Игроки не станут помогать игроку 1, если он не распределит между ними часть своего сверхдохода $\left(v_1 - r\right)$.

- *Осторожное поведение.*

Осторожное поведение основано на пессимистическом предположении игрока о том, что противник будет действовать наихудшим для игрока образом.

В игре в нормальной форме стратегия $\tilde{\tilde{x}}_i \in X_i$ называется *осторожной стратегией* игрока i, $i \in N$, если выполнено:

$$\inf_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i\left(\tilde{\tilde{x}}_i, x_{-i}\right) = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i\left(x_i, x_{-i}\right) = \alpha_i .$$

Число α_i называется *гарантированным выигрышем* игрока $i, i \in N$.

Если набор гарантированных выигрышей $\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\right)$ является оптимальным по Парето, то осторожные стратегии могут быть названы *оптимальными*.

Замечание 10.2.1. Для определения своих доминирующих и осторожных стратегий игроку i достаточно знать лишь свою функцию выигрыша K_i и множество стратегий всех игроков.

В игре «Перекресток» (пример 10.2.1) у игроков осторожными являются стратегии 1 («остановиться»), с набором гарантированных выигрышей $(1,1)$.

В игре «Семейный спор» (пример 10.2.2) у игроков обе стратегии являются осторожными. Набор гарантированных выигрышей – $(0,0)$.

В игре «Дилемма заключенного» (пример 10.2.3) осторожными являются стратегии 1 («сознаться»), с набором гарантированных выигрышей $(-8,-8)$.

§10.3. Недостатки равновесия по Нэшу

Выделение ситуаций равновесия в качестве претендентов на оптимальное поведение достаточно естественно. Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что принцип равновесия по Нэшу (как принцип оптимальности) обладает рядом свойств, затрудняющим его практическое применение.

- Входящие в ситуацию равновесия стратегии нельзя считать оптимальными, поскольку ни один из игроков, используя их в индивидуальном порядке, не может гарантировать себе выигрыша в равновесной ситуации. Поэтому для реализации ситуации равновесия необходимо некоторое дополнительное соглашение между игроками о том, что все предполагают придерживаться именно данного равновесия. Из вышесказанного получаем, что можно говорить лишь об *оптимальности ситуации равновесия в целом*. Это в свою очередь требует, чтобы в игре существовала пусть даже незначительная кооперация (хотя бы на уровне возможности обмена информацией).

- К числу негативных свойств можно отнести (в общем случае) *неединственность равновесия* (при этом в различных ситуациях игроки могут получать различные выигрыши), т. е. может получиться так, что одна равновесная ситуация предпочтительна одним игрокам, а другая – другим (распространенный в литературе пример на эту тему – игра «семейный спор»).
- Далее может оказаться, что какая-то группа (коалиция) игроков при отклонении от ситуации равновесия увеличивает свой выигрыш (игра «дилемма заключенного»).
- В случае, когда принцип оптимальности в игре выбран, т. е. определено, что понимается под оптимальным поведением, необходимо убедиться, что оно действительно в этой игре существует.

Замечание 10.3.1. Представляется, что равновесие по Нэшу является «приемлемым» принципом оптимальности в данном классе игр, если каждая равновесная по Нэшу ситуация является также оптимальной по Парето.

Замечание 10.3.2. Отмеченные проблемы, связанные с ситуациями равновесия, являются достаточно глубокими и находятся в самом существе конфликтного взаимодействия в задаче со многими участниками и поэтому не должны рассматриваться в качестве негативной аргументации. В то же время для приложений наибольший интерес представляют те модели, в которых эти проблемы могут быть хотя бы частично решены.

Выводы

- Любой конфликт с конечным количеством участников можно представить как игру в нормальной форме.
- Важно уметь классифицировать игры, чтобы знать, какой математический аппарат использовать при их решении.
- Основными принципами оптимальности в бескоалиционных играх являются равновесие по Нэшу и оптимальность по Парето, доминирующие стратегии, осторожное поведение.
- Равновесие по Нэшу обладает рядом недостатков, затрудняющих его практическое применение, впрочем, как и остальные признаки оптимальности.

- В качестве приемлемого принципа оптимальности можно считать равновесие по Нэшу, если оно удовлетворяет также условию оптимальности по Парето.

Вопросы для самопроверки

1. Какие объекты нужно задать, чтобы определить игру в нормальной форме?
2. Как реализуется игра в нормальной форме?
3. Зачем нужно знать классификацию игр?
4. Что такое конечная игра?
5. Какие игры называются биматричными и матричными?
6. Какие игры называются антагонистическими?
7. Сформулируйте содержательный смысл равновесия по Нэшу.
8. Какой информацией об игре необходимо обладать, чтобы проверить ситуацию на равновесность по Нэшу?
9. Перечислите недостатки концепции равновесия по Нэшу.
10. Напишите определение равновесия по Нэшу для игры двух лиц.
11. Напишите определение ситуации равновесия по Нэшу для биматричной игры.
12. Напишите определение ситуации равновесия по Нэшу для антагонистической игры.
13. Напишите определение ситуации равновесия по Нэшу для матричной игры.
14. Какая ситуация называется парето-оптимальной?
15. Какая стратегия игрока называется доминирующей?
16. Что такое ситуация равновесия в доминирующих стратегиях?
17. Какая стратегия игрока называется осторожной?
18. Что называется гарантированным выигрышем игрока?
19. В чем недостатки ситуации равновесия по Нэшу?

Библиография

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.1985.
2. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998.
3. *Петросян Л.А., Кузютин Д.В.* Игры в развернутой форме: Оптимальность и устойчивость. Изд. СПбГУ, 2000.
4. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир,1985.
5. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. Изд. дом «Вильямс», М., 2005.

6. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А.,Тришин И.М.,Фридман М.Н*. Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.
7. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В.* Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №3. СПб, изд-во МБИ, 2005.
8. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.
9. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.