Тема 3. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Цель: познакомить читателя с симплекс-методом решения задачи линейного программирования и основными понятиями и теоремами теории двойственности в линейном программировании.

Задачи:

- научиться формулировать стандартную и каноническую задачи линейного программирования, познакомиться с эквивалентными преобразованиями задачи;
- ввести понятие базисного решения для канонической задачи линейного программирования (задача ЛП), сформулировать алгоритм симплекс-метода решения задачи ЛП;
- сформулировать теоремы двойственности и равновесия в линейном программировании. Дать экономическую интерпретацию теории двойственности.

Оглавление

§ 3.1. Специальные виды задач линейного программирования. Стандартная и каноническая задачи. Матричная форма записи

Напомним, что математически задача ЛП – это задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения линейной функции многих переменных при линейных ограничениях типа равенства или нестрогого неравенства, когда на переменные задачи есть (нет) ограничений на знак.

Формально это означает, что задачу максимизации можно записать так:

$$\max z = \max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n),$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, i = \overline{1, m_1},$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n_1},$$
$$x_j \gtrless 0, j = \overline{n_1 + 1, n}.$$

Аналогично можно написать общую постановку для задачи минимизации

$$\min z = \min(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n),$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i, i = \overline{1, m_1},$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n_1},$$
$$x_j \gtrless 0, j = \overline{n_1 + 1, n}.$$

Однако симплекс-метод решения задачи предполагает, что задача ЛП записана в одном из специальных видов. Имеется 4 специальных вида задачи ЛП (два стандартных и два канонических вида).

Стандартная *форма задачи ЛП максимизации* – это задача нахождения максимума целевой функции при ограничениях типа нестрогого неравенства (меньше или равно) и при наличии ограничений на знак для всех переменных (*условия неотрицательности*):

$$\max z = \max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n),$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, i = \overline{1, m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}.$$

В матричном и векторном виде эта задача может быть записана так:

$$\begin{array}{lcl} \max z = \max CX & & \max z = \max CX, \\ AX \le B & \text{или} & A_iX \le b_i, i = \overline{1, m}, \ , \\ X \ge 0 & & X \ge 0. \end{array}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – матрица порядка $m \times n$, A_i – i-ая строка матрицы A,

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Стандартная форма задачи ЛП минимизации – это задача нахождения минимума целевой функции при ограничениях типа нестрогого неравенства (больше или равно) и при наличии ограничений на знак для всех переменных:

$$\min z = \min(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n),$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i, i = \overline{1, m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}.$$

В матричном и векторном виде эта задача может быть записана так:

$$\begin{array}{lcl} \min z = \min CX & & \min z = \min CX \\ AX \ge B & \text{или} & A_i X \ge b_i, i = \overline{1,m} \\ X \ge 0 & & X \ge 0. \end{array}$$

Каноническая форма задачи ЛП максимизации – это задача нахождения максимума целевой функции при ограничениях типа равенства и при наличии ограничений на знак для всех переменных:

$$\max z = \max(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n),$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

В матричном и векторном виде эта задача может быть записана так:

$$\begin{array}{lcl} \max z = \max CX & & \max z = \max CX, \\ AX = B & \text{или} & A_i X = b_i, i = \overline{1,m}, . \\ X \ge 0 & & X \ge 0. \end{array}$$

Каноническая форма задачи ЛП минимизации – это задача нахождения минимума целевой функции при ограничениях типа равенства и при наличии ограничений на знак для всех переменных:

$$\min z = \min(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n),$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

В матричном и векторном виде эта задача может быть записана так:

$$\begin{array}{lcl} \min z = \min CX & & \max z = \max CX \\ AX = B & \text{или} & A_i X = b_i, i = \overline{1,m} \;\; . \\ X \ge 0 & & X \ge 0 \end{array}$$

§ 3.2. Эквивалентные формулировки. Эквивалентные преобразования

На практике общая задача линейного программирования должна быть приведена к одному из специальных видов. Это делается с использованием простых преобразований, которые называются эквивалентными преобразованиями.

- Нахождение максимума линейной функции эквивалентно нахождению минимума этой функции, взятой с противоположным знаком, и наоборот:

$$\min z = -\max(-z),$$
$$\max z = -\min(-z).$$

- Если на переменную x_j не накладывается условие неотрицательности, то ее можно заменить разностью двух неотрицательных переменных $x_j^{\,+}$ и $x_j^{\,-}$:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-,$$
$$x_j^+ \ge 0, x_j^- \ge 0.$$

- Если имеется n таких переменных x_j, $j = \overline{1,n}$, то их можно заменить $n+1$ неотрицательной переменной $x_j^{\,+}$, $j = \overline{1,n}$ и x_0, положив:

$$x_j = x_j^+ - x_0,$$
$$x_j^+ \ge 0, j = \overline{1,n}, x_0 \ge 0.$$

- Ограничение типа неравенства можно представить в виде равенства, используя дополнительные переменные $s_i \ge 0, i = \overline{1,m}$, называемые слабыми переменными, следующим образом:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, i = \overline{1,m} \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \cdots a_{in}x_n + s_i = b_i, s_i \ge 0, i = \overline{1,m},$$
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i, i = \overline{1,m} \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \cdots a_{in}x_n - s_i = b_i, s_i \ge 0, i = \overline{1,m}.$$

- Ограничение типа равенства можно заменить двумя неравенствами:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i. \end{cases}$$

- Если имеется m равенств, то их можно заменить $m+1$ неравенством:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{1,m} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - b_i) \ge 0. \end{cases}$$

Пример 3.2.1. Представить задачу ЛП в стандартной и канонической формах максимизации:

$$\min z = \min(2x_1 + 3x_2),$$
$$x_1 + x_2 = 10,$$
$$-2x_1 + 3x_2 \le -5,$$
$$7x_1 - 4x_2 \ge 6,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Используя эквивалентные формулировки, получим:

каноническая ЗЛП максимизации:

$$\max(-z) = \max(-2x_1^+ + 2x_1^- - 3x_2),$$
$$x_1^+ - x_1^- + x_2 = 10,$$
$$-2x_1^+ + 2x_1^- + 3x_2 + s_1 = -5,$$
$$7x_1^+ - 7x_1^- - 4x_2 - s_2 = 6.$$
$$x_1^+ \ge 0,\ x_1^- \ge 0,\ x_2 \ge 0, s_1 \ge 0, s_2 \ge 0$$

стандартная ЗЛП максимизации:

$$\max(-z) = \max(-2x_1^+ + 2x_1^- - 3x_2),$$
$$x_1^+ - x_1^- + x_2 \le 10,$$
$$-x_1^+ + x_1^- - x_2 \le -10,$$
$$-2x_1^+ + 2x_1^- + 3x_2 \le -5,$$
$$-7x_1^+ + 7x_1^- + 4x_2 \le -6,$$
$$x_1^+ \ge 0,\ x_1^- \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

§ 3.3. Базисное решение системы линейных уравнений

Рассмотрим каноническую задачу ЛП максимизации в матричной форме

$$\max z = \max CX$$
$$AX = B$$
$$X \ge 0.$$

Множество допустимых решений задачи является *замкнутым выпуклым многогранником* и может быть найдено как множество решений системы линейных уравнений:

$$M = \left\{ X \middle| AX = B, X \ge 0 \right\}.$$

Напомним, что система линейных уравнений

$$AX = B \Leftrightarrow \sum A^j x_j = B$$

совместна, если выполнено условие:

$$rang(A) = rang([A,B]) = m, m \le n.$$

Это условие означает, что ранг матрицы системы равен числу уравнений, и все уравнения системы независимы (ни одно из уравнений не является следствием остальных).

Предположим, что система линейных уравнений $AX = B$ совместна, запишем ее в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Базисным решением СЛУ, зависящим от множества индексов $S = \{1, \cdots, m\}$, будем называть решение СЛУ, которое находится по указанным ниже правилам.

- Для нахождения *базисного решения, зависящего от множества индексов* $S = \{1, \cdots, m\}$ (количество индексов в множестве S равно m – числу уравнений), надо привести данную систему, используя метод Гаусса, к диагональной форме по переменным $x_1,\cdots,x_m$, которые называются *базисными переменными* данного решения. Получим:

$$\begin{cases} x_1+\cdots+\bar{a}_{1m+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{1n}x_n=\bar{b}_1, \\ \quad\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ \quad x_m+\bar{a}_{mm+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{mn}x_n=\bar{b}_m. \end{cases}$$

- Полагая переменные, не вошедшие в диагональную форму (*небазисные переменные*) равными нулю $(x_j=0, j=\overline{m+1,n})$, получаем значения для базисных переменных: $x_j=\bar{b}_j, j=\overline{1,m}$.

Замечание 3.3.1.

Базисное решение не может содержать более чем m отличных от нуля элементов. Обратное, однако, неверно, т.е. если решение СЛУ содержит менее чем m отличных от нуля элементов, то оно не обязательно базисное. Нужно, чтобы оно получалось указанным выше образом из диагональной формы СЛУ.

Замечание 3.3.2.

Если базисное решение содержит ровно m отличных от нуля компонент, то оно называется *невырожденным базисным решением*. В противном случае – *вырожденным базисным решением*.

Замечание 3.3.3.

Если все компоненты базисного решения – неотрицательные, то такое базисное решение называется *допустимым базисным решением*.

Замечание 3.3.4.

Из линейной алгебры известно, что если $m<n$, то СЛУ имеет бесконечное множество решений. Однако количество базисных решений СЛУ с конечным числом уравнений всегда конечное число, поскольку оно не может превышать величину C_m^n.

Пример 3.3.1. Найдем все базисные решения системы ЛУ:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2 \\ -x_1+2x_2-x_3=1. \end{cases}$$

Максимальное число базисных решений определяется величиной

$$C_3^2=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3.$$

Если привести систему к диагональному виду по переменным x_1,x_2, получим

$$\begin{cases} x_1 \qquad +x_3=5 \\ \qquad x_2-x_3=3 \end{cases}$$

и базисное решение – $x_1=5, x_2=3, x_3=0$.

Если привести систему к диагональному виду по переменным x_1,x_3, получим

$$\begin{cases} x_1 \qquad -3x_2 = -4 \\ \qquad x_3 + x_2 = 3 \end{cases}$$

и базисное решение – $x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 3$, которое не является допустимым, т. к. $x_1 \le 0$.

Если привести систему к диагональному виду по переменным x_2, x_3, получим

$$\begin{cases} -1/3\,x_1 + x_2 \qquad = 4/3 \\ 1/3\,x_1 + \qquad x_3 = 5/3 \end{cases}$$

и базисное решение – $x_1 = 0, x_2 = 4/3, x_3 = 5/3$.

§ 3.4. Алгоритм симплекс-метода решения задачи ЛП. Геометрическая интерпретация

Оказывается, что для нахождения оптимального решения достаточно ограничиться рассмотрением только базисных решений в силу справедливости следующих утверждений.

Утверждение 3.4.1. Если у системы линейных уравнений (системы ЛУ) существует решение (система ЛУ – совместна), то существует и базисное решение этой системы ЛУ.

Геометрически допустимому базисному решению системы ЛУ соответствует крайняя точка (вершина) множества допустимых решений. Небазисные допустимые решения являются внутренними точками множества допустимых решений.

Утверждение 3.4.2. Если задача ЛП имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.

Утверждение 3.4.3. Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.

В силу справедливости последнего утверждения, вычислительный алгоритм линейного программирования (симплекс-метод) основан на нахождении именно оптимального базисного решения и оперирует только с допустимыми базисными решениями.

Пример 3.4.1. (неформальное решение задачи ЛП симплекс-методом)

Рассмотрим следующую ЗЛП:

$$\max z = \max(5x_1 + 3x_2),$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Переведем ЗЛП в каноническую форму и запишем систему СЛУ, соответствующую этой канонической форме ЗЛП, первое уравнение системы будем называть z-уравнением:

$$\begin{cases} z \quad - 5x_1 - 3x_2 = 0, \\ s_1 \quad + x_1 + x_2 = 4, \\ \quad s_2 + 5x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$$

Система уравнений находится в диагональной форме по переменным z, s_1, s_2, переменные s_1, s_2 являются базисными, а x_1, x_2 – небазисными. Этой системе соответствует допустимое базисное решение

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 4, s_2 = 10, z = 0,$$

которое автоматически получается при нулевых значениях небазисных переменных.

Отрицательные коэффициенты при небазисных переменных в z-уравнении показывают, что значение целевой функции может быть увеличено за счет увеличения значения этих переменных.

Приведем систему к диагональной форме по переменным z, s_1, x_1 методом Гаусса. Получим

$$\begin{cases} z \quad - x_2 + s_2 = 10, \\ s_1 \quad + 3/5\, x_2 - 1/5\, s_2 = 2, \\ \quad x_1 + 2/5\, x_2 + 1/5\, s_2 = 2. \end{cases}$$

Ей соответствует допустимое базисное решение

$$x_1 = 2, x_2 = 0, s_1 = 2, s_2 = 0, z = 10.$$

Введем переменную x_2 в состав базисных переменных, для этого приведем систему к диагональной форме по переменным z, x_2, x_1. Получим:

$$\begin{cases} z \quad + 5/3\, s_1 + 2/3\, s_2 = 40/3, \\ x_1 \quad - 2/3\, s_1 + 1/3\, s_2 = 2/3, \\ \quad x_2 + 5/3\, s_1 - 1/3\, s_2 = 10/3. \end{cases}$$

Так как коэффициенты z-уравнения неотрицательны, значение целевой функции улучшить нельзя, поэтому допустимое базисное решение этой системы является оптимальным:

$$z^* = 40/3, x_1^* = 2/3, x_2^* = 10/3, s_1^* = 0, s_2^* = 0.$$

Замечание 3.4.1.

Коэффициенты целевой функции при слабых переменных $y_1 = 5/3, y_2 = 2/3$ представляют собой двойственные (теневые) цены ресурсов 1 и 2 соответственно.

Замечание 3.4.2.

Понятно, что указанным методом можно найти оптимальное решение, если на итерации метода в число базисных переменных вводить любую переменную с отрицательным коэффициентом в z-уравнении.

Геометрическая интерпретация расчетов по симплекс-методу примера 3.4.1 приведена на рис. 3.4.1:

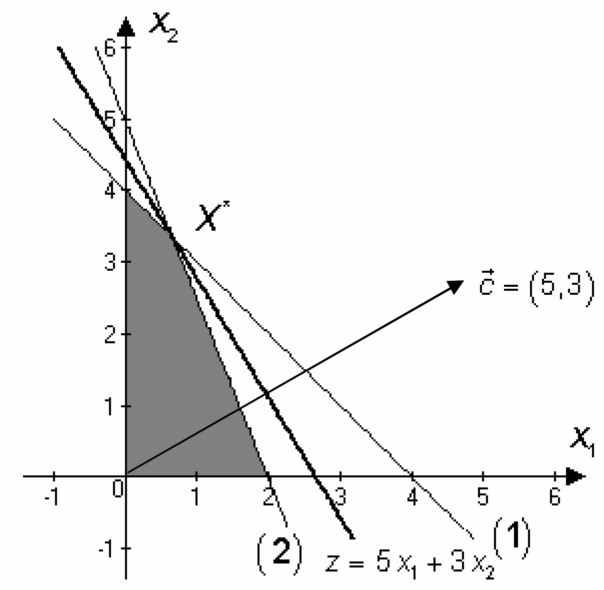

Рис. 3.4.1

Вершинам заштрихованного четырехугольника соответствуют найденные допустимые базисные решения, оптимальное решение находится в точке X^*.

Перейдем к описанию формального *алгоритма симплекс-метода* для канонической задачи максимизации:

$$\max z = \max(\bar{c}_1 x_1 + \cdots + \bar{c}_n x_n),$$
$$\bar{a}_{i1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{in} x_n = \bar{b}_i, i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Для этого сначала выполним ряд вспомогательных построений. По задаче ЛП запишем систему линейных уравнений, рассматривая целевую функцию как одно из ограничений:

$$\begin{cases} z - \overline{c_1} x_1 - \cdots - \overline{c_n} x_n = 0, \\ \overline{a_{i1}} x_1 + \cdots + \overline{a_{in}} x_n = \overline{b}_i, \ i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Приведем данную систему к диагональной форме по переменным $z, x_1, \cdots, x_m$:

$$\begin{cases} z \quad + \cdots + c_{m+1} x_{m+1} + \cdots + c_n x_n = z^0, \\ x_1 + \cdots + a_{1m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ \quad x_m \quad + a_{mm+1} x_{m+1} + \cdots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases}$$

Составим таблицу коэффициентов данной диагональной формы (симплексная таблица, сокращенно СТ):

	z	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n
z	z^0	0	…	0	…	0	c_{m+1}	…	c_s	…	c_n
x_1	b_1	1	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rs}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

Первая (выделенная) строка СТ содержит коэффициенты z-уравнения, в выделенном столбце СТ находятся правые части ограничений и z-уравнения (z^0).

Симплексная таблица – основной элемент вычислительной процедуры симплекс-метода.

Симплексная таблица представляет собой таблицу коэффициентов диагональной формы системы линейных уравнений, построенной для канонической задачи линейного программирования максимизации. Поскольку она строится для диагональной формы системы ЛУ, то симплексная таблица соответствует базисному решению рассматриваемой системы ЛУ.

Классификация симплексных таблиц:

- симплексная таблица называется *прямо-допустимой*, если $b_i \ge 0, i = \overline{1,m}$. Прямо-допустимая СТ соответствует допустимому базисному решению;
- симплексная таблица называется *двойственно-допустимой*, если $c_j \ge 0, j = \overline{1,n}$. Двойственно-допустимая СТ соответствует допустимому базисному решению двойственной задачи;
- симплексная таблица называется *оптимальной*, если она одновременно и прямо-допустимая, и двойственно-допустимая. Оптимальная СТ соответствует оптимальному базисному решению.

Алгоритм прямого симплекс-метода (максимизации)

0. Начать вычисления с прямо-допустимой симплексной таблицы.

Вычисления по алгоритму состоят в выполнении следующих однотипных итераций. Каждая такая итерация состоит из трех последовательно выполняемых шагов.

ИТЕРАЦИЯ

1. **Проверка оптимальности или нахождение ведущего столбца СТ.**

- Если все коэффициенты в выделенной строке при небазисных переменных неотрицательны (коэффициенты в z-уравнении), то текущее базисное решение является оптимальным.
- В противном случае на следующей итерации в число базисных переменных вводим небазисную переменную x_s, номер которой находится по правилу:

$$c_s = \min_{c_j<0} c_j .$$

Столбец под номером s называется *ведущим столбцом* симплексной таблицы.

	z	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n
z	z^0	0	…	0	…	0	c_{m+1}	…	c_s	…	c_n
x_1	b_1	1	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rs}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

2. **Проверка условия неограниченности решения задачи ЛП и нахождение ведущей строки (ведущего элемента) СТ.**

- Если в ведущем столбце симплексной таблицы s нет положительных коэффициентов, то значение задачи ЛП неограниченно (нет оптимального решения).
- В противном случае (в ведущем столбце имеются положительные элементы) в качестве базисной переменной, которая исключается из числа базисных, выбирается та переменная x_r, для которой

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}} .$$

Строка под номером r называется *ведущей строкой СТ*, а элемент $a_{rs} > 0$ – *ведущим элементом СТ.*

3. **Преобразование симплексной таблицы.**

- Используя эквивалентные преобразования таблицы (процедуру Гаусса) пересчитываем таблицу так, чтобы ведущий элемент новой СТ стал равным 1, а все остальные элементы ведущего столбца – равными 0.
- Обозначим верхним индексом 1 элементы новой симплексной таблицы. Тогда формулы пересчета коэффициентов примут вид:

$$a_{rj}^1 = \frac{a_{rj}}{a_{rs}},\ j = \overline{1,n},\ b_r^1 = \frac{b_r}{a_{rs}},$$

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{is},\ i \neq r,\ j = \overline{1,n},\ b_i^1 = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is}, i \neq r,$$

$$c_j^1 = c_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} c_s,\ j = \overline{1,n},\ z^1 = z^0 - \frac{b_r}{a_{rs}} c_s.$$

- Перейти к исследованию новой симплексной таблицы (новая итерация).

Пример 3.4.2. Решим задачу из примера 3.4.1 с помощью симплекс-таблиц:

$$\begin{aligned} &\max z = \max(5x_1 + 3x_2), \\ &x_1 + x_2 \leq 4, \\ &5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z \quad - 5x_1 - 3x_2 = 0, \\ s_1 \quad + x_1 + x_2 = 4, \\ s_2 + 5x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$$

Итерация 1.
Начальная симплексная таблица выглядит так:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2
z	0	-5	-3	0	0
s_1	4	1	1	1	0
s_2	10	5	2	0	1

Вводим в базис переменную x_1, выводим s_2, производим пересчет таблицы.

Итерация 2.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2
z	10	0	-1	0	1
s_1	2	0	3/5	1	-1/5
x_1	2	1	2/5	0	1/5

Вводим в базис переменную x_2, выводим s_1, производим пересчет таблицы.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2
z	40/3	0	0	5/3	2/3
x_2	10/3	0	1	5/3	-1/3
x_1	2/3	1	0	-2/3	1/3

Полученная таблица оптимальна, она соответствует решению:

$$z^* = 40/3, x_1^* = 2/3, x_2^* = 10/3, s_1^* = 0, s_2^* = 0.$$

§ 3.5. Прямая и двойственная задачи линейного программирования. Свойства

С каждой задачей линейного программирования, которую условно назовем *прямой задачей ЛП*, однозначно связана другая задача ЛП, называемая *двойственной задачей ЛП* (для данной прямой задачи). Помимо однозначности написания между прямой и двойственной задачами существует тесная содержательная взаимосвязь, заключающаяся в *теореме двойственности*.

Дадим формальное определение двойственной задачи для общей задачи ЛП максимизации.

Прямая задача ЛП	**Двойственная задача ЛП**
$\max z = \max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n),$	$\min w = \min(b_1y_1 + \cdots + b_my_m),$
$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = \overline{1,m_1},$	$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m \ge c_j,\ j = \overline{1,n_1},$
$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,\ i = \overline{m_1+1,m},$	$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j,\ j = \overline{n_1+1,n},$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n_1},$	$y_i \ge 0, i = \overline{1,m_1},$
$x_j \gtrless 0,\ j = \overline{n_1+1,n}.$	$y_i \gtrless 0, i = \overline{m_1+1,m}.$

$x_j,\ j = \overline{1,n}$ – переменные прямой задачи;

$y_i,\ i = \overline{1,m}$ – переменные двойственной задачи (двойственные переменные).

Сопоставляя формы записи прямой и двойственной задачи, можно установить между ними следующие взаимосвязи:

- если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации, и наоборот;
- каждому ограничению типа стандартного неравенства прямой задачи соответствует неотрицательная двойственная переменная двойственной задачи, и наоборот;
- каждому ограничению типа равенства прямой задачи соответствует двойственная переменная без ограничения на знак, и наоборот;
- коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами ограничений двойственной задачи, и наоборот;
- матрицу ограничений двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.

Пример 3.5.1. Запишем двойственную задачу к задаче:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - x_3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6,$$
$$x_1 \ge 0.$$

В соответствии с правилами построения двойственной задачи имеем:

$$\min w = 5y_1 + 6y_2,$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 3,$$
$$y_1 - y_2 = 2, \quad .$$
$$y_1 + 3y_2 = -1,$$
$$y_1 \geq 0.$$

Эти задачи образуют двойственную пару.

Приведем некоторые частные случаи прямой и двойственной задачи:

Прямая задача ЛП	Двойственная задача ЛП
$\max z = \max CX$ $AX \leq B$ $X \geq 0$	$\min w = \min BY$ $YA \geq C$ $Y \geq 0$
$\max z = \max CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	$\min w = \min BY$ $YA \geq C$
$\min z = \min CX$ $AX \leq B$	$\max w = \max BY$ $YA = C$ $Y \leq 0$
$\min z = \min CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	$\max w = \max BY$ $YA \leq C$
$\min z = \min CX$ $AX \geq B$ $X \geq 0$	$\max w = \max BY$ $YA \leq C$ $Y \geq 0$

Стандартной задаче максимизации и двойственной к ней стандартной задаче минимизации можно дать следующую *экономическую интерпретацию.*

Пусть фирма имеет n видов производственной деятельности (производит n видов продукции), используя при этом m типов ресурсов. Обозначим c_j – прибыль, приходящаяся на единицу продукции j-го вида производственной деятельности, $j = \overline{1,n}$. Расход ресурса типа i, $i = \overline{1,m}$, запасы которого ограничены величиной b_i, на единицу продукции j-го вида производственной деятельности, равен a_{ij} единиц этого ресурса.

Стандартная задача максимизации позволяет определить оптимальный план производства $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*\right)$, где x_j^* – количество единиц продукции j-го вида, максимизирующий общую (суммарную) прибыль от всех видов деятельности, при ограничении на запас используемых ресурсов:

$$\max z = \max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n),$$

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Стандартная задача минимизации позволяет определить оптимальные двойственные цены ресурсов $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots y_m^*\right)$, где y_i^* – ценность единицы i-го ресурса, минимизирующие суммарные затраты на приобретение ресурсов, при ограничении на стоимость продукции:

$$\min w = \min(b_1y_1 + \cdots + b_my_m),$$

$$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m \ge c_j,\ j = \overline{1,n},$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,m}.$$

§ 3.6. Теоремы двойственности и равновесия в линейном программировании

Рассматривается пара двойственных задач в стандартной форме:

$$\begin{array}{ll} \max z = \max CX & \min w = \min BY \\ AX \le B & YA \ge C \\ X \ge 0 & Y \ge 0 \end{array}$$

Лемма 3.6.1. (Свойство допустимых решений прямой и двойственной задачи)

Пусть X и Y – произвольные допустимые решения пары двойственных задач в стандартной форме. Тогда $CX \le BY$.

Лемма 3.6.2. (Достаточные условия оптимальности)

Пусть X^* и Y^*– пара таких допустимых решений двойственных задач в стандартной форме, для которых выполнено равенство

$$CX^* = BY^*.$$

Тогда X^* и Y^*– оптимальные решения соответствующих задач.

Теорема 3.6.1. (двойственности).

- Если обе задачи ЛП (и прямая, и двойственная) имеют допустимые решения, то обе задачи имеют оптимальные решения X^* и Y^* соответственно, причем

$$z^* = w^*, z^* = CX^*, w^* = BY^*.$$

- Если хотя бы одна из задач ЛП (прямая или двойственная) не имеют допустимого решения, то обе задачи ЛП (и прямая, и двойственная) не имеют оптимальных решений.

Замечание 3.6.1.

Теорема двойственности справедлива для любой пары двойственных задач.

Теорема 3.6.2. (Критерий оптимальности допустимых решений прямой и двойственной задач).

Для того чтобы пара допустимых решений X^* и Y^* прямой и двойственной задач была парой оптимальных решений соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы

$$CX^* = BY^*.$$

Теорема 3.6.3. (Стандартная теорема равновесия).

Для того чтобы пара допустимых решений X^* и Y^* прямой и двойственной задач была парой оптимальных решений соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} Y^*(B - AX^*) = 0, \\ (Y^*A - C)X^* = 0. \end{cases}$$

Следствие. (Критерий оптимальности для стандартной задачи ЛП).

Для того чтобы пара допустимых решений $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$ прямой и двойственной задач была парой оптимальных решений соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось 4 соотношения:

1. $x_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{mj}y_m^* = c_j,$
2. $a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{mj}y_m^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0,$
3. $y_i^* > 0 \Rightarrow a_{i1}x_1^* + \cdots + a_{in}x_n^* = b_i,$
4. $a_{i1}x_1^* + \cdots + a_{in}x_n^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0.$

Пример 3.6.1. (Стандартная задача ЛП).

Пусть известно оптимальное решение

$$z^* = 40/3, x_1^* = 2/3, x_2^* = 10/3, s_1^* = 0, s_2^* = 0$$

для следующей задачи ЛП

$$\max z = \max(5x_1 + 3x_2),$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Найдем оптимальное решение для двойственной задачи, которая имеет следующий вид на основе теоремы двойственности:

$$\min w = \min(4y_1 + 10y_2),$$
$$y_1 + 5y_2 \ge 5,$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 3,$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.$$

Так как

$$x_1^* > 0 \Rightarrow y_1^* + 5y_2^* = 5,$$
$$x_2^* > 0 \Rightarrow y_1^* + 2y_2^* = 3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} y_1^* + 5y_2^* = 5, \\ y_1^* + 2y_2^* = 3, \end{cases}$$

получаем $y_1^* = 5/3, y_2^* = 2/3, w^* = 40/3.$

Пример 3.6.2. (Общая задача ЛП).

Известно оптимальное решение

$$z^* = 17/5, x_1^* = 2/5, x_2^* = 9/5, s_2^* = 1, s_3^* = 0.$$

следующей задачи:

$$\min z = \min(4x_1 + x_2),$$
$$3x_1 + x_2 = 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Найдем оптимальное решение двойственной задачи, которая имеет следующий вид:

$$\max z = \max(3y_1 + 6y_2 - 4y_3),$$
$$3y_1 + 4y_2 - y_3 = 4,$$
$$y_1 + 3y_2 - 2y_3 \ge 1,$$
$$y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$$

Так как

$$x_1^* > 0 \Rightarrow 3y_1^* + 4y_2^* - y_3^* = 4,$$
$$x_2^* > 0 \Rightarrow y_1^* + 3y_2^* - 2y_3^* = 1,$$
$$4x_1^* + 3x_2^* > 6 \Rightarrow y_2^* = 0.$$

Решая систему,

$$\begin{cases}3y_1^* + 4y_2^* - y_3^* = 4 \\ y_1^* + 3y_2^* - 2y_3^* = 1 \\ y_2^* = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y_1^* - y_3^* = 4 \\ y_1^* - 2y_3^* = 1 \\ y_2^* = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y_1^* - y_3^* = 4 \\ y_1^* - 2y_3^* = 1 \\ y_2^* = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_1^* = 7/5 \\ y_3^* = 1/5 \\ y_2^* = 0\end{cases}.$$

Рассмотрим пару двойственных задач в канонической форме:

$$\begin{array}{ll} \max z = \max CX & \min w = \min BY \\ AX = B & YA \ge C \\ X \ge 0 & \end{array}.$$

Теорема 3.6.4. (Каноническая теорема равновесия).

Для того чтобы пара допустимых решений X^* и Y^* прямой и двойственной задач в канонической форме была парой оптимальных решений соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы

$$(Y^* A - C)X^* = 0.$$

Следствие. (Критерий оптимальности).

Для того чтобы пара допустимых решений $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$ прямой и двойственной задач в канонической форме была парой оптимальных решений соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два соотношения:

1. $x_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j} y_1^* + \cdots + a_{mj} y_m^* = c_j$,
2. $a_{1j} y_1^* + \cdots + a_{mj} y_m^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0$.

Выводы

- Любая задача линейного программирования может быть приведена к одному из специальных видов: стандартному или каноническому.
- Для нахождения оптимального решения ЗЛП достаточно рассматривать только базисные решения. Понятие базисного решения – это основа симплекс-метода.
- Симплекс-метод обычно реализуется с помощью симплекс-таблиц.
- Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие двойственную задачу. Решения этих задач связаны рядом свойств.
- Прямая и двойственная задачи имеют наглядную экономическую интерпретацию.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение стандартной задачи ЛП.

2. Дайте определение канонической задачи ЛП.
3. Какие эквивалентные преобразования используются для перехода от одной формы задачи ЛП к другой?
4. Верно ли утверждение: любую задачу ЛП можно привести к канонической форме.
5. Какая система линейных уравнений называется совместной, несовместной?
6. Дайте определение базисного решения СЛУ. Чем отличается базисное решение СЛУ от любого другого решения?
7. Сформулируйте алгоритм нахождения базисного решения.
8. Что представляет собой симплексная таблица?
9. Какая таблица называется прямо-допустимой, двойственно-допустимой, оптимальной?
10. Сформулируйте алгоритм симплекс-метода.
11. Как по симплекс-таблице сделать вывод об отсутствии у задачи ЛП оптимального решения?
12. Можно ли по симплексной таблице сделать вывод об отсутствии у задачи ЛП допустимого решения?
13. Как определить теневые (двойственные) цены по оптимальной симплексной таблице?
14. Какова содержательная взаимосвязь между прямой и двойственной задачами ЛП?
15. Сформулируйте правила построения двойственной задачи.
16. Верно ли утверждение: двойственной к стандартной задаче максимизации является стандартная задача минимизации?
17. Верно ли утверждение: двойственной к канонической задаче максимизации является каноническая задача минимизации?
18. Верно ли утверждение: для пары двойственных задач в стандартной форме значение целевой функции прямой задачи максимизации не больше значения целевой функции двойственной задачи?
19. Верно ли утверждение: оптимальные решения прямой и двойственной задач совпадают?
20. Как, зная оптимальное решение задачи ЛП, найти оптимальное решение двойственной задачи?
21. Если у одной задачи нет оптимального решения, что можно сказать о наличии оптимального решения у двойственной задачи?
22. Если целевая функция одной задачи ЛП неограничена, существует ли оптимальное решение у двойственной задачи?

Библиография

1. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.
2. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях.М.: Мир, 1972.

3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.

4. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: ИЛ, 1963.

5. *Красс М.С., Чупрынов Б.П*. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2003.

6. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В*. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.

7. *Хазанова Л.Э.* Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.

8. *Cook T. & Russel R.A.* Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.

9. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.

10. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.