Тема 5. Дискретное программирование

Цель: познакомить читателя с постановкой задачи дискретного программирования, основными классами задач, которые можно сформулировать как модели дискретного программирования. Изучить один из основных методов решения данного класса задач – метод ветвей и границ.

Задачи:

- научиться формулировать задачу дискретного программирования;
- познакомиться с алгоритмом метода ветвей и границ;
- научиться применять метод ветвей и границ для решения задачи целочисленного линейного программирования и задачи о коммивояжере.

Оглавление

§ 5.1. Постановка задачи дискретного программирования. Схема метода ветвей и границ

Рассматривается задача

$$\min z = \min_{x \in G} \varphi(x), \qquad (5.1.1)$$

где G – конечное множество.

Задача $(5.1.1)$ называется задачей дискретного программирования.

В задачах дискретного программирования множество допустимых решений является невыпуклым и несвязным. Поэтому отыскание решения сопряжено со значительными трудностями. В частности, невозможно применение стандартных приемов, состоящих в замене дискретной задачи ее непрерывным аналогом, и в дальнейшем округлении найденного решения до ближайшего целочисленного.

Пример 5.1.1. Найти максимум функции

$$z = x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 - x_3 \le 4,\\
&4x_1 - 3x_2 \le 2,\\
&-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0,\\
&x_j - \text{целые, } j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

Игнорируя условие целочисленности, можно найти оптимальное решение данной задачи линейного программирования, используя симплекс-метод:

$$x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = 0, x_3^* = 4\frac{1}{2}.$$

Однако оптимальное целочисленное решение задачи имеет вид:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 2, x_3^* = 5,$$

и не может быть получено никакими округлениями оптимального решения задачи без условия целочисленности.

Одним из основных методов решения задач дискретного программирования является *метод ветвей и границ*.

Метод ветвей и границ относится к группе комбинаторных методов и позволяет существенно уменьшить объем перебора вариантов.

В основу метода положены следующие построения:

1. *Вычисление нижней оценки* $\xi(G)$ для значения целевой функции на множестве G. Для любого множества G нужно уметь вычислять величину

$$\xi(G) \le \varphi(x), x \in G.$$

2. *Ветвление* (разбиение на подмножества). Реализация метода связана с постоянным ветвлением множества допустимых решений на дерево подмножеств. Процесс ветвления состоит из некоторых итераций:

ИТЕРАЦИЯ 0.

Полагаем $G^{(0)} = G$. Далее некоторым способом разбиваем исходное множество на систему подмножеств:

$$G^{(0)} = G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)} \cup \ldots \cup G_p^{(1)}, \ \bigcap_{i=1}^{p} G_i^{(1)} = \varnothing.$$

ИТЕРАЦИЯ $k\ (k \ge 1)$.

Пусть $G_1^{(k)}, G_2^{(k)} \ldots, G_r^{(k)}$ – это множества, еще не подвергшиеся ветвлению. По некоторому правилу выбираем множество $G_{v(k)}^k$, и это множество разбивается на подмножества:

$$G_{v(k)}^k = G_{v(k),1}^{(k)} \cup G_{v(k),2}^{(k)} \cup \ldots \cup G_{v(k),s}^{(k)}, \bigcap_{i=1}^{s} G_{v(k),i}^{(k)} = \varnothing.$$

Дерево подмножеств (процесс ветвления)

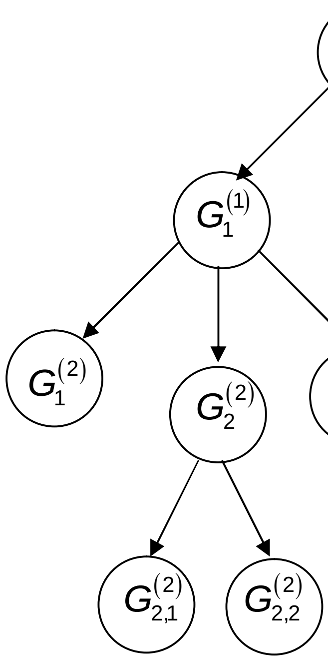

Рис. 5.1.1

3. Границы. В процессе ветвления появляются множества, которые не могут быть подвергнуты дальнейшему ветвлению (граничные). Эти множества называются *концевыми вершинами дерева подмножеств* (рис.5.1.1).

4. Нахождение решения. Для граничных множеств нужно уметь находить допустимые решения, способ зависит от специфики рассматриваемой задачи.

5. Пересчет оценок.

Если $G_1 \subset G_2$, то $\min\limits_{x \in G_1} \varphi(x) \geq \min\limits_{x \in G_2} \varphi(x)$. Поэтому оценки не убывают:

$$\xi\left(G^i\right) \geq \xi\left(G^0\right).$$

6. *Признак оптимальности.* Пусть $G = \bigcup\limits_{i=1}^{s} G_i$, и некоторое решение $x_0 \in G_v$. Если при этом $\varphi(x_0) = \xi(G_v) \leq \xi(G_i)$, где G_i – множества, не подвергавшиеся ветвлению, то текущее решение x_0 – оптимально.

7. *Оценка точности приближенного решения.* Пусть $G = \bigcup\limits_{i=1}^{s} G_i$, $\xi = \min\limits_{i} \xi(G_i)$. Пусть x – некоторое решение, тогда $\xi \leq \min\limits_{x} \varphi(x)$ и $\Delta = \varphi(x) - \xi$ – точность.

§ 5.2. Алгоритм метода ветвей и границ для задачи целочисленного программирования (ЗЦП)

Рассмотрим задачу:

$$\min z = \min \varphi(x) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (5.2.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \; i = \overline{1,m}, \qquad (5.2.2)$$

$$c_j \le x_j \le d_j, \; j = \overline{1,n}, \qquad (5.2.3)$$

$$x_j \text{ – целые.} \qquad (5.2.4)$$

Задача $(5.2.1)-(5.2.4)$ называется задачей линейного целочисленного программирования.

ИТЕРАЦИЯ 0.

Шаг 1. Находим множество допустимых решений задачи $G^{(0)}$ без условия целочисленности. Множество $G^{(0)}$ определяется ограничениями $(5.2.2),(5.2.3)$.

Шаг 2. Находим оптимальное решение X_0 задачи $(5.2.1)$ при условиях $(5.2.2),(5.2.3)$. Если X_0 удовлетворяет и условию $(5.2.4)$, то X_0 оптимальное, если нет – переходим к итерации 1.

Шаг 3. Вычисляем оценку $\xi\left(G^{(0)}\right) = \left]\varphi(X_0)\right[$, где $]a[$ – наименьшее целое, не меньшее чем a (округление до ближайшего целого с избытком).

ИТЕРАЦИЯ 1.

Шаг 1. Ветвление. Выбираем нецелочисленную компоненту решения X_0: $x_i = x_i^0, i = \overline{1,n}$. Тогда $G^{(0)} = G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)}$, где

$$G_1^{(1)} = \left\{X \middle| X \in G^{(0)}, x_i \le \left[x_i^0\right]\right\},$$

$$G_2^{(1)} = \left\{X \middle| X \in G^{(0)}, x_i \ge \left[x_i^0\right] + 1\right\},$$

где $[a]$ – целая часть a.

Шаг 2. Решаем задачи ЛП $(5.2.1)$ на множествах $G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$. Находим соответствующие решения $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}$.

Шаг 3. Вычисляем оценки: $\xi\left(G_1^{(1)}\right) = \left]\varphi\left(X_1^{(1)}\right)\right[, \xi\left(G_2^{(1)}\right) = \left]\varphi\left(X_2^{(1)}\right)\right[$.

Шаг 4. Проверка оптимальности. Если $X_i^{(1)}$ – целочисленное решение и $\xi\left(G_i^{(1)}\right)=\min\left\{\xi\left(G_1^{(1)}\right),\xi\left(G_2^{(1)}\right)\right\}$, то $X_i^{(1)}$ – оптимальное решение.

ИТЕРАЦИЯ $(k+1)$

Пусть проведено k итераций, $G_1^{(k)},G_2^{(k)},\cdots,G_{r_k}^{(k)}$ – множества, еще не подвергшиеся ветвлению, $\xi\left(G_i^{(k)}\right)$ – оценки этих множеств, и не найдено оптимальное решение. Тогда перспективное для ветвления множество: $\xi\left(G_v^{(k)}\right)=\min\limits_i\left\{\xi\left(G_i^{(k)}\right)\right\}$.

Шаг 1. Производим ветвление $G_v^{(k)}$ на подмножества: $G_{v1}^{(k)},G_{v2}^{(k)}$, $G_v^{(k)}=G_{v1}^{(k)}\cup G_{v2}^{(k)}$, где

$$G_{v1}^{(k)}=\left\{X\,\middle|\,X\in G_v^{(k)},x_s\le\left[x_s^k\right]\right\},$$

$$G_{v2}^{(k)}=\left\{X\,\middle|\,X\in G_v^{(k)},x_s\ge\left[x_s^k\right]+1\right\},$$

x_s^k – нецелочисленная компонента решения $X_v^{(k)}$.

Шаг 2. Решаем задачи ЛП $(5.2.1)$ на множествах $G_{v1}^{(k)},G_{v2}^{(k)}$. Находим соответствующие решения $X_{v1}^{(k)}$, $X_{v2}^{(k)}$.

Шаг 3. Вычисляем оценки $\xi\left(G_{v1}^{(k)}\right)=\left]\varphi\left(X_{v1}^{(k)}\right)\right[$, $\xi\left(G_{v2}^{(k)}\right)=\left]\varphi\left(X_{v2}^{(k)}\right)\right[$.

Шаг 4. Если $X_{v1}^{(k)}$ удовлетворяет условию целочисленности, то это концевая вершина. Если при этом $\xi\left(G_{v1}^{(k)}\right)\le\xi\left(G_i^{(k)}\right)$ для любого i, то $X_{v1}^{(k)}$ – оптимальное решение.

Пример 5.2.1. Найти решение задачи линейного целочисленного программирования:

$$\min z=-x_1-x_2 \qquad (5.2.5)$$

$$\begin{gathered}2x_1+11x_2\le 38,\\ x_1+x_2\le 7,\\ 4x_1-5x_2\le 5, \qquad (5.2.6)\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\\ x_1,\ x_2-\textit{целые}.\end{gathered}$$

Решение.

ИТЕРАЦИЯ 0.

Шаг 1. Решаем геометрически задачу $(5.2.5)$, $(5.2.6)$ без условия целочисленности (рис. 5.2.2). Оптимальное решение:

$$X^0 = \left(\frac{40}{9}, \frac{23}{9}\right),$$

$$\xi\left(G^{(0)}\right) = \left]\varphi(X_0)\right[= \left] -7 \right[= -7.$$

Шаг 2. Выбираем нецелочисленную компоненту решения, например, $x_1 = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$. Строим $G_1^{(1)} = \left\{X \middle| X \in G^0 \cap x_1 \le 4\right\}$, $G_2^{(1)} = \left\{X \middle| X \in G^0 \cap x_1 \ge 5\right\}$.

0-итерация, 1-итерация.

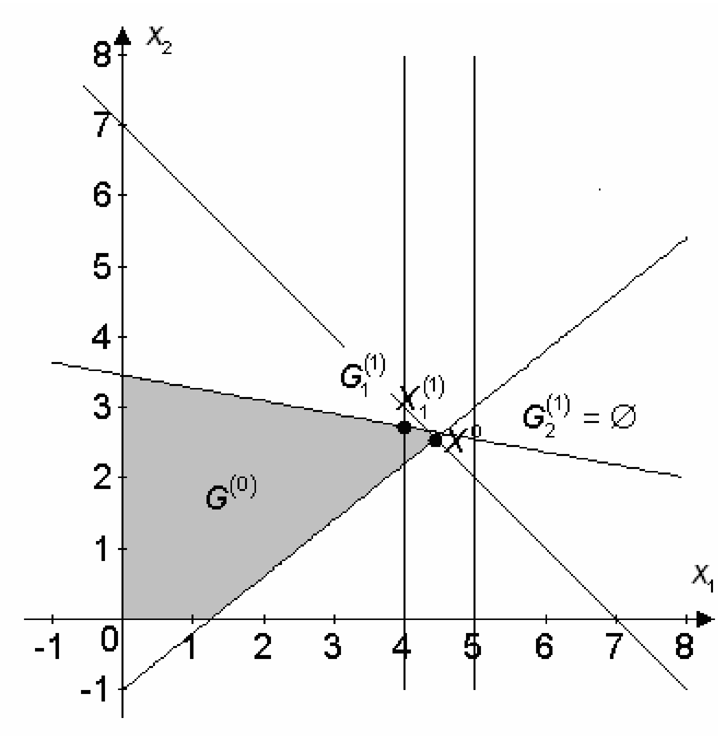

Рис 5.2.2

ИТЕРАЦИЯ 1.

Шаг 1. Решаем геометрически задачу $(5.2.5)$, $(5.2.6)$ без условия целочисленности на множестве $G_1^{(1)}$, оптимальное решение – $X_1^{(1)} = \left(4, \frac{30}{11}\right)$. Множество $G_2^{(1)} = \varnothing$, поэтому $X_2^{(1)}$ не существует.

Шаг 2. $\xi\left(G_1^{(1)}\right) = \left]-\frac{74}{11}\right[= -6$, $\xi\left(G_2^{(1)}\right) = \infty$.

Дерево подмножеств

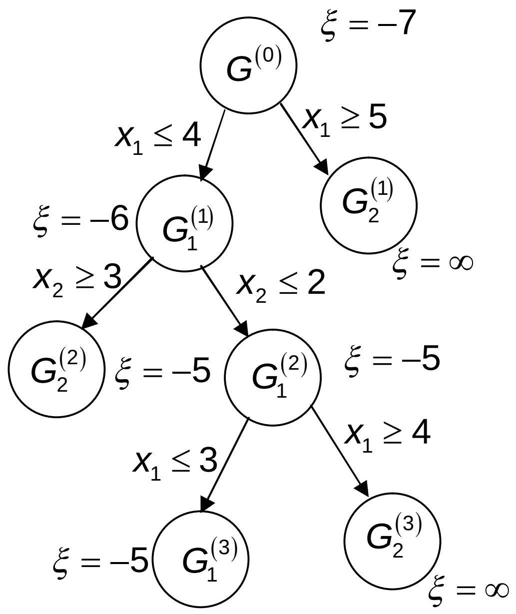

Рис.5.2.3

ИТЕРАЦИЯ 2.

Шаг 1. Разбиваем $G_1^{(1)}$ на два множества $G_1^{(2)}$ и $G_2^{(2)}$, где $G_1^{(2)} = \left\{ X \middle| X \in G_1^{(1)} \cap x_2 \le 2 \right\}$, $G_2^{(2)} = \left\{ X \middle| X \in G_1^{(1)} \cap x_2 \ge 3 \right\}$.

Шаг 2. Решаем ЗЛП $(5.2.5)$, $(5.2.6)$ на множествах $G_1^{(2)}$ и $G_2^{(2)}$. Находим решения $X_1^{(2)} = \left(\frac{15}{4}, 2\right)$, $X_2^{(2)} = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

Шаг 3. Вычисляем оценки:

$$\xi\left(G_1^{(2)}\right) = \left]-\frac{23}{4}\right[= -5,\ \xi\left(G_2^{(2)}\right) = \left]-\frac{11}{2}\right[= -5.$$

Для дальнейшего ветвления можно выбрать любое из множеств $G_1^{(2)}$ или $G_2^{(2)}$, т. к. их оценки совпадают.

ИТЕРАЦИЯ 3.

Шаг 1. Разбиваем $G_1^{(2)}$ на два множества $G_1^{(3)}$ и $G_2^{(3)}$, где $G_1^{(3)} = \left\{ X \middle| X \in G_1^{(2)} \cap x_1 \le 3 \right\}$, $G_2^{(3)} = \left\{ X \middle| X \in G_1^{(2)} \cap x_1 \ge 4 \right\} = \varnothing$.

Шаг 2. Решаем ЗЛП $(5.2.5)$, $(5.2.6)$ на множествах $G_1^{(3)}$ и $G_2^{(3)}$. Находим решения $X_1^{(3)}=(3,2)$. Множество $G_2^{(3)}=\varnothing$, поэтому $X_2^{(3)}$ не существует.

Шаг 3. $\xi\left(G_1^{(3)}\right)=-5,\xi\left(G_2^{(3)}\right)=\infty$.

Шаг 4. $X_1^{(3)}=(3,2)$ удовлетворяет условию целочисленности, следовательно, является оптимальным решением исходной задачи.

2-итерация

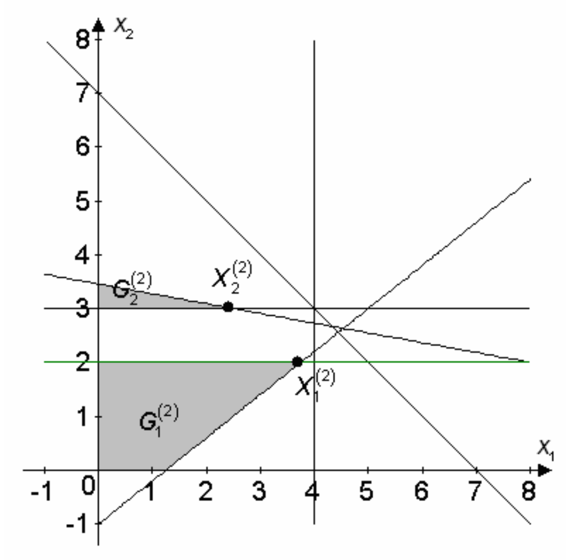

Рис 5.2.4

3-итерация

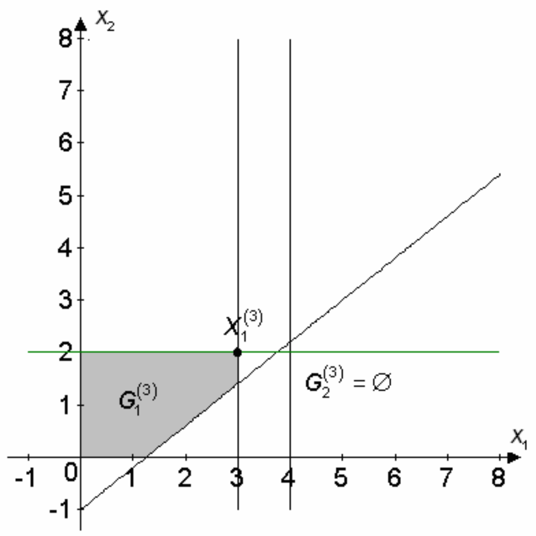

Рис 5.2.5

§ 5.3. Представление об эйлеровых и гамильтоновых графах

Напомним, что последовательность дуг (ребер) графа $(x_1,x_2),(x_2,x_3),\ \ldots(x_{k-1},x_k)$ называется путем (цепью) из узла x_1 в узел x_k. Если $x_1 = x_k$, то такая последовательность ребер называется *циклом* (§ 4.1).

Если в конечном графе существует цикл, в котором каждое ребро участвует только один раз, то такой цикл называется *эйлеровым циклом*, а граф, содержащий такой цикл, *эйлеровым графом*.

Цикл называется *гамильтоновым циклом,* если он проходит через каждую вершину графа. Граф, содержащий такой цикл, называется *гамильтоновым графом*. Граф на рис. 5.3.1 является эйлеровым и гамильтоновым.

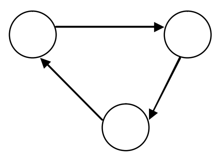

Рис. 5.3.1

§ 5.4. Задача о коммивояжере и ее решение методом ветвей и границ

Постановка задачи. Имеется n городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Задана матрица расстояний между ними $C = \{c_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. В общем случае $c_{ij} \neq c_{ji}$. Необходимо отыскать замкнутый маршрут, проходящий через все города только по одному разу, при котором минимизируется суммарная длина пути:

$$L(t) = \sum_{(i,j)\in t} c_{ij}, \ t = \left((i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_n, i_1)\right).$$

Такой маршрут будет являться эйлеровым и гамильтоновым циклом (§ 5.3).

Алгоритм метода ветвей и границ для задачи о коммивояжере

ИТЕРАЦИЯ

Шаг 1. Приведение матрицы.

Обозначим

$h_i = \min\limits_{i=\overline{1,n}} c_{ij}$ – *приводящие константы* строк матрицы C;

$$c_{ij}' = c_{ij} - h_i,$$

$h^j = \min\limits_{j=\overline{1,n}} c_{ij}'$ – *приводящие константы* столбцов для матрицы C',

$$c_{ij}^0 = c_{ij}' - h_i.$$

Матрица C^0 называется *приведенной* матрицей и обладает свойством: в каждой строке и каждом столбце имеется, по крайней мере, один нулевой элемент.

Пусть $H^0 = \sum\limits_i h_i + \sum\limits_j h^j$ – сумма приводящих констант, которая является нижней оценкой длин всех возможных циклов.

Теорема 5.4.1.

Оптимальный план задачи о коммивояжере с матрицей C^0 является оптимальным и для задачи с матрицей C. Издержки цикла t, посчитанные по матрицам C и C^0, связаны соотношением

$$L(t) = L^0(t) + H^0.$$

Шаг 2. Ветвление.

Матрица C^0 задает множество всех возможных маршрутов $G^{(0)}$, оценка длины которых $\xi\left(G^{(0)}\right) = H^0$. Разобьем множество $G^{(0)}$ на два подмножества, удовлетворяющие условиям:

- $G^{(0)} = G_1^{(1)} \bigcup G_2^{(1)}, G_1^{(1)} \bigcap G_2^{(1)} = \varnothing$,
- Множество $G_1^{(1)}$ содержит только те циклы, для которых переезд из i^* осуществляется непосредственно в j^*. Для циклов множества $G_2^{(1)}$ переезд из узла i^* в узел j^* возможен только через промежуточный пункт.

Выбор пары $\left(i^*, j^*\right)$ основан на следующих соображениях: рассматриваются элементы матрицы C^0, для которых $c_{ij}^0 = 0$ (переезды с наименьшими издержками). Затем из них выбирают элемент $c_{i^*j^*}^0$, так чтобы множество $G_1^{(1)}$ с наибольшей вероятностью содержало оптимальный цикл, а множество $G_2^{(1)}$ не содержало. По любому из циклов в множестве $G_2^{(1)}$ путь переходит из i^* в промежуточный пункт k $(k \neq j^*)$, а в пункт j^* попадают только из некоторого пункта l $\left(l \neq i^*\right)$.

Длина этого пути будет не меньше, чем

$$\theta\left(i, j\right) = \min_{k \neq j} c_{ik}^0 + \min_{l \neq i} c_{lj}^0 = \alpha_i + \beta_j .$$

Пару $\left(i^*, j^*\right)$ выбирают так, чтобы

$$\theta\left(i^*, j^*\right) = \max_{(i,j): c_{ij}^0 = 0} \theta\left(i, j\right).$$

Шаг 3. Пересчет оценок и преобразование матрицы расстояний.

- В множестве $G_2^{(1)}$ запрещен переезд из i^* в j^*, поэтому матрица, соответствующая этому множеству, отличается от C^0 элементом $c_{i^*j^*}$, который следует положить равным ∞. Кроме того следует запретить возможность образования замкнутых подциклов длины меньше n.

Оценка для множества $G_2^{(1)}$ вычисляется по правилу:

$$\xi\left(G_2^{(1)}\right) = \xi\left(G^{(0)}\right) + \theta\left(i^*, j^*\right).$$

- Множество $G_1^{(1)}$ по построению содержит переход из i^* в j^*, поэтому в матрице C^0 следует вычеркнуть i^*-ю строку и j^*-й столбец. Применив процедуру приведения к полученной матрице, получаем C^1, вычисляем сумму ее приводящих констант H^1.

Оценка для множества $G_1^{(1)}$ вычисляется по правилу:

$$\xi\left(G_1^{(1)}\right) = \xi\left(G^{(0)}\right) + H^1.$$

- Далее для ветвления из множеств $G_1^{(1)}$ и $G_2^{(1)}$ выбирается то, которое имеет меньшую оценку.

- Переходим к шагу 1. Процесс продолжается пока не будет построен цикл, проходящий по всем городам и имеющий наименьшую оценку *(критерий оптимальности цикла).*

Пример 5.4.1.

Решим задачу о коммивояжере, определяемую матрицей C, $c_{ii} = \infty$:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	4	10	13	4	8
2	2	∞	9	7	6	7
3	8	5	∞	5	5	9
4	5	8	5	∞	7	10
5	6	4	4	9	∞	4
6	5	1	4	8	3	∞

ИТЕРАЦИЯ 1.

Шаг 1. Найдем приводящие константы строк h_i для матрицы C, запишем их в последний столбец таблицы:

	1	2	3	4	5	6	h_i
1	∞	4	10	13	4	8	4
2	2	∞	9	7	6	7	2
3	8	5	∞	5	5	9	5
4	5	8	5	∞	7	10	5
5	6	4	4	9	∞	4	4
6	5	1	4	8	3	∞	1

Вычтем из каждой строки приводящую константу и найдем приводящие константы столбцов h^j, запишем их в последнюю строку таблицы:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	6	9	0	4
2	0	∞	7	5	4	5
3	3	0	∞	0	0	4
4	0	3	0	∞	2	5
5	2	0	0	5	∞	0
6	4	0	3	7	2	∞
h^j	0	0	0	0	0	0

Шаг 2.

$$\xi\left(G^{(0)}\right) = H^0 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 4 + 2 + +5 + 5 + 4 + 1 = 21.$$

Вычисляем величины $\alpha_i = \min\limits_{k\neq j} c^0_{ik}$, $\beta_j = \min\limits_{l\neq i} c^0_{lj}$

	1	2	3	4	5	6	α_i
1	∞	0	6	9	0	4	0
2	0	∞	7	5	4	5	4
3	3	0	∞	0	0	4	0
4	0	3	0	∞	2	5	0
5	2	0	0	5	∞	0	0
6	4	0	3	7	2	∞	2
β_j	0	0	0	5	0	4	

$$\theta(3,4) = \max_{(i,j):c^0_{ij}=0} \theta(i,j) = 0+5=5,\ \left(i^*, j^*\right) = (3,4).$$

Производим ветвление $G^0 = G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)}$ относительно пары $\left(i^*, j^*\right) = (3,4)$, вычисляем оценку

$$\xi\left(G_2^{(1)}\right) = \xi\left(G^{(0)}\right) + \theta(3,4) = 21+5=26.$$

Шаг 3. Для вычисления оценки $\xi\left(G_1^{(1)}\right)$ вычеркиваем в матрице C^0 третью строку и четвертый столбец и полагаем $c_{34} = \infty$, выполним процесс приведения и получим матрицу C^1:

	1	2	3	5	6	h_i	α_i
1	∞	0	6	0	4	0	0
2	0	∞	7	4	5	0	4
4	0	3	∞	2	5	0	2
5	2	0	0	∞	0	0	0
6	4	0	3	2	∞	0	2
h^j	0	0	0	0	0		
β_j	0	0	3	2	4		

$$H^1 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 0,\ \xi\left(G_1^{(1)}\right) = \xi\left(G^{(0)}\right) + H^1 = 21.$$

Т. к. $\xi\left(G_2^{(1)}\right) > \xi\left(G_1^{(1)}\right)$, на следующем шаге разбиваем множество $G_1^{(1)}$.

ИТЕРАЦИЯ 2.

Шаг 1. Производим ветвление $G_1^{(1)} = G_1^{(2)} \cup G_2^{(2)}$ относительно пары $\left(i^*, j^*\right) = (5,6)$, вычисляем оценку множества $G_2^{(2)}$:

$$\xi\left(G_2^{(2)}\right) = \xi\left(G_1^{(1)}\right) + \theta(5,6) = 21+4=25.$$

Шаг 2. Строим матрицу C^2, вычеркивая в C^1 пятую строку и шестой столбец, и выполняем процесс приведения, полагая $c_{56} = \infty$:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 3 & 5 & h_i \\
\hline
1 & \infty & 0 & 6 & 0 & 0 \\
2 & 0 & \infty & 7 & 4 & 0 \\
4 & 0 & 3 & \infty & 2 & 0 \\
6 & 4 & 0 & 3 & \infty & 0 \\
\hline
h^j & 0 & 0 & 3 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 3 & 5 & \alpha_i \\
\hline
1 & \infty & 0 & 3 & 0 & 0 \\
2 & 0 & \infty & 4 & 4 & 4 \\
4 & 0 & 3 & \infty & 2 & 2 \\
6 & 4 & 0 & 0 & \infty & 0 \\
\hline
\beta_j & 0 & 0 & 3 & 2 &
\end{array}
$$

Шаг 3.

$$H^2 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 3,\ \xi\left(G_1^{(2)}\right) = \xi\left(G_1^{(1)}\right) + H^2 = 21 + 3 = 24.$$

Т. к. $\xi\left(G_1^{(2)}\right) = \min\left\{\xi\left(G_1^{(2)}\right), \xi\left(G_2^{(1)}\right), \xi\left(G_2^{(2)}\right)\right\}$, на следующем шаге разбиваем множество $G_1^{(2)}$.

ИТЕРАЦИЯ 3.

Шаг 1. Производим ветвление $G_1^{(2)} = G_1^{(3)} \cup G_2^{(3)}$ относительно пары $\left(i^*, j^*\right) = (2,1)$, вычисляем оценку множества $G_2^{(3)}$:

Шаг 2.

$$\xi\left(G_2^{(3)}\right) = \xi\left(G_1^{(2)}\right) + \theta(2,1) = 24 + 4 = 28.$$

Шаг 3. Строим матрицу C^3, вычеркивая в C^2 вторую строку и первый столбец и полагая $c_{21} = \infty$, и выполняя процесс приведения:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 2 & 3 & 5 & h_i \\
\hline
1 & \infty & 3 & 0 & 0 \\
4 & 3 & \infty & 2 & 2 \\
6 & 0 & 0 & \infty & 0 \\
\hline
h^j & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 2 & 3 & 5 & \alpha_i \\
\hline
1 & \infty & 3 & 0 & 0 \\
4 & 1 & \infty & 0 & 1 \\
6 & 0 & 0 & \infty & 0 \\
\hline
\beta_j & 0 & 3 & 0 &
\end{array}
$$

Шаг 4. $H^3 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 2$, $\xi\left(G_1^{(3)}\right) = \xi\left(G_1^{(2)}\right) + H^3 = 24 + 2 = 26$. Т. к. $\xi\left(G_2^{(2)}\right) = \min\left\{\xi\left(G_1^{(3)}\right), \xi\left(G_2^{(3)}\right), \xi\left(G_2^{(2)}\right)\right\}$, то производим ветвление множества $G_2^{(2)}$.

ИТЕРАЦИЯ 4.

Шаг 1. Стоим матрицу $C^{1'}$, для этого в матрице C^1 полагаем $c_{56} = \infty$, выполняем процесс приведения, получаем матрицу C^4:

Шаг 2.

	1	2	3	5	6	h_i
1	∞	0	6	0	4	0
2	0	∞	7	4	5	0
4	0	3	∞	2	5	0
5	2	0	0	∞	∞	0
6	4	0	3	2	∞	0
h^j	0	0	0	0	4	

	1	2	3	5	6	α_i
1	∞	0	6	0	0	0
2	0	∞	7	4	1	1
4	0	3	∞	2	1	1
5	2	0	0	∞	∞	0
6	4	0	3	2	∞	2
β_j	0	0	3	2	1	

Шаг 3. Производим ветвление $G_2^{(2)} = G_1^{(4)} \cup G_2^{(4)}$ относительно пары $\left(i^*, j^*\right) = (5,3)$, вычисляем оценку множества $G_2^{(4)}$:

$$\xi\left(G_2^{(4)}\right) = \xi\left(G_2^{(2)}\right) + \theta(5,3) = 25 + 3 = 28.$$

Шаг 4. Строим матрицу C^5, вычеркивая 5-ю строку и 3-й столбец, выполняем процесс приведения:

	1	2	5	6	h_i
1	∞	0	0	0	0
2	0	∞	4	1	0
4	0	3	∞	1	0
6	4	0	2	∞	0
h^j	0	0	0	0	

	1	2	5	6	α_i
1	∞	0	0	0	0
2	0	∞	4	1	1
4	0	3	∞	1	1
6	4	0	2	∞	2
β_j	0	0	2	1	

$$H^5 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 0,\ \xi\left(G_1^{(4)}\right) = \xi\left(G_2^{(2)}\right) + H^5 = 25.$$

Поскольку $\xi\left(G_2^{(4)}\right) > \xi\left(G_1^{(4)}\right)$, производим ветвление $\xi\left(G_1^{(4)}\right)$.

ИТЕРАЦИЯ 5.

Шаг 1. Производим ветвление $G_1^{(4)} = G_1^{(5)} \cup G_2^{(5)}$ относительно пары $\left(i^*, j^*\right) = (6,2)$.

Шаг 2. Вычисляем оценку множества $G_2^{(5)}$:

$$\xi\left(G_2^{(5)}\right) = \xi\left(G_1^{(4)}\right) + \theta(6,2) = 25 + 2 = 27.$$

Сумма приводящих констант для матрицы C^6:

$$H^6 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 0,\ \xi\left(G_1^{(5)}\right) = \xi\left(G_1^{(4)}\right) + H^6 = 25.$$

Шаг 3. Поскольку $\xi\left(G_2^{(5)}\right) > \xi\left(G_1^{(5)}\right)$, производим ветвление $\xi\left(G_1^{(5)}\right)$.

ИТЕРАЦИЯ 6.

Шаг 1. Находим приводящие константы:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 5 & 6 & h_i \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & \infty & 1 & 0 \\ \hline h^j & 0 & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 5 & 6 & \alpha_i \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & \infty & 4 \\ 4 & 0 & \infty & 1 & 1 \\ \hline \beta_j & 0 & 4 & 1 & \end{array}$$

Шаг 2. Вычисляем оценки:

$$\xi\left(G_2^{(6)}\right) = \xi\left(G_1^{(5)}\right) + \theta(2,1) = 25 + 4 = 29.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 5 & 6 & h_i \\ \hline 1 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 1 & 1 \\ \hline h^j & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} & 5 & 6 & \alpha_i \\ \hline 1 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 0 & 0 \\ \hline \beta_j & 0 & 0 & \end{array}$$

$$H^7 = \sum_i h_i + \sum_j h^j = 1,\ \xi\left(G_1^{(6)}\right) = \xi\left(G_1^{(5)}\right) + H^7 = 25 + 1 = 26.$$

Шаг 3. В последней матрице выбираются две последние пары $(1,5), (4,6)$. Последние два шага выполняются аналогичным образом. Получаем цикл, отвечающий множеству $G_1^{(8)}$ (рис 5.3.1):

$$t = ((1,5),(5,3),(3,4),(4,6),(6,2),(2,1)).$$

Длина цикла t равна оценке для множества $G_1^{(8)}$, поскольку оценка для $G_1^{(8)}$ не превышает оценок для остальных концевых вершин.

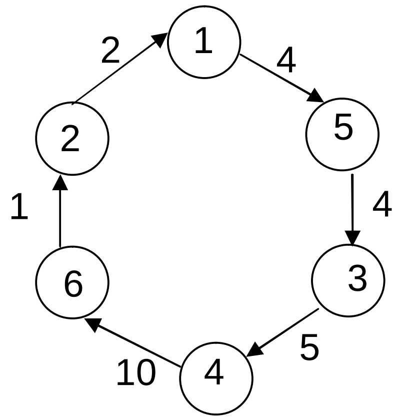

Рис. 5.3.1

Ветвление множества циклов представлено на рис. 5.3.2.

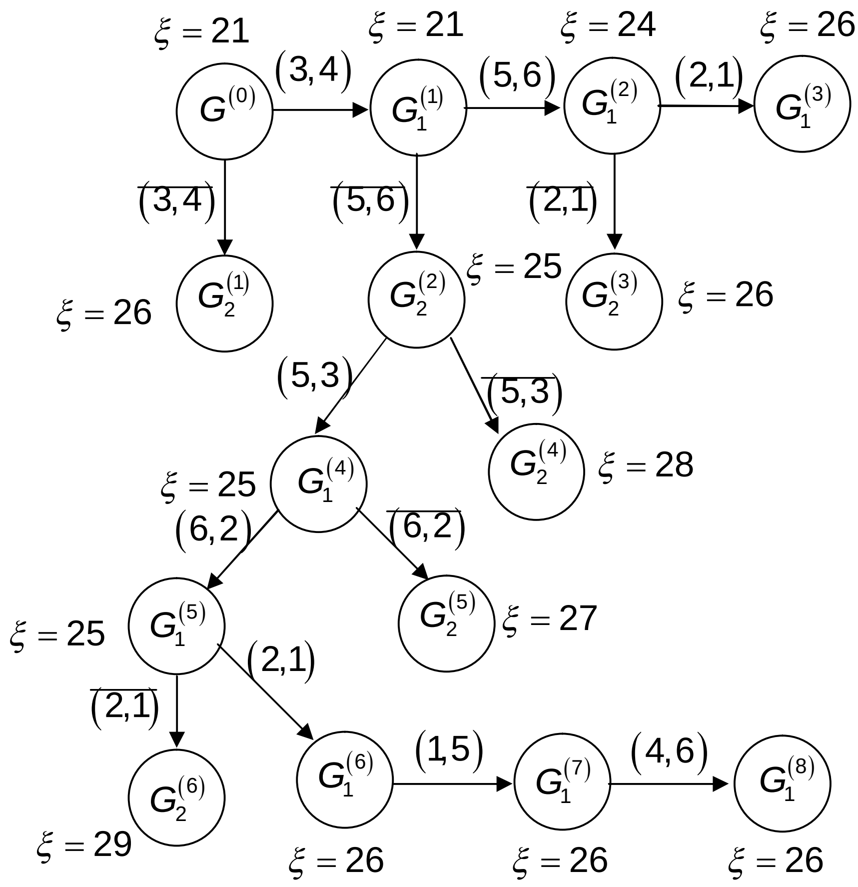

Рис. 5.3.2

Выводы

- Существуют классы задач принятия решений, которые могут быть формализованы как задачи дискретного программирования. Множество допустимых решений в таких задачах конечно.
- Основным методом решения данного класса задач является метод ветвей и границ.
- Метод ветвей и границ может быть применен, например, для решения задачи линейного целочисленного программирования и для нахождения кратчайшего пути в задаче о коммивояжере.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение задачи дискретного программирования.
2. Какова основная идея метода ветвей и границ?
3. В чем состоят особенности реализации метода ветвей и границ при решении конкретных классов задач?
4. Что такое нижняя оценка множества?

5. В чем заключается процесс ветвления множества?
6. Какие множества называются конечными?
7. Сформулируйте признак оптимальности в задаче целочисленного линейного программирования.
8. Дайте определения эйлеровых и гамильтоновых графов.
9. Сформулируйте постановку задачи о коммивояжере.
10. В чем заключается процедура приведения матрицы в задаче о коммивояжере?
11. Сформулируйте теорему о длине цикла при приведении матрицы расстояний.
12. По какому принципу происходит ветвление множества циклов на подмножества в задаче о коммивояжере?
13. В чем отличие в подсчете оценок для различных типов множеств?
14. Сформулируйте критерий оптимальности цикла для задачи о коммивояжере.

Библиография

1. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.
2. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях.М.: Мир, 1972.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.
4. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: ИЛ, 1963.
5. *Красс М.С., Чупрынов Б.П*. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2003.
6. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В*. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №2. СПб.: изд-во МБИ, 2005.
7. *Хазанова Л.Э.* Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.
8. *Cook T. & Russel R.A.* Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.
9. *Winston W.L.* Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.
10. *Winston W.L.* Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.