Тема 12. Кооперативное поведение

Цель: познакомить читателя с понятием кооперативной игры, дать определение основных элементов игры в форме характеристической функции, дать представление об основных принципах оптимальности в кооперативных играх, их достоинствах и недостатках.

Задачи:

- ввести понятия игры в форме характеристической функции, дележа в кооперативной игре, доминирования дележей;
- определить основные принципы оптимальности, применяемые в кооперативных играх: С-ядро, М-Н решение;
- научиться находить вектор Шепли в кооперативной игре.

Оглавление

§ 12.1. Игра в форме характеристической функции

В данном подразделе будем предполагать, что условия игры допускают совместные действия игроков и перераспределение выигрыша. При этом полезности различных игроков могут быть оценены единой шкалой (*трансферабельные* выигрыши). В соответствии с первым предположением любая коалиция (§ 10.2) может выбрать стратегию, которая доставляет максимально возможный выигрыш коалиции, называемый иногда *ценой коалиции*. Второе предположение делает возможным любое распределение цены коалиции между игроками как часть обязывающего соглашения, заключенного между участниками коалиции. Определение цены коалиции зависит не только от игроков, входящих в коалицию, но и от игроков, не входящих в данную коалицию. Наиболее распространенная интерпретация цены коалиции – это тот общий гарантируемый выигрыш, который может получить коалиция независимо от действий других игроков, не входящих в данную коалицию.

Теперь определение кооперативной игры заключается в задании множества игроков N и функции v, которая каждой коалиции ставит в соответствие цену этой коалиции.

Характеристической функцией игры с множеством игроков N будем называть вещественную функцию v, определенную на всех коалициях $S \subset N$, при этом для любых непересекающихся коалиций T, S $(T \subset N, S \subset N, T \bigcap S = \varnothing)$ выполняется неравенство

$$v(T) + v(S) \le v(T \bigcup S), \qquad (12.1.1)$$

$$v(\varnothing) = 0.$$

Свойство, которым обладает характеристическая функция, называется *свойством супераддитивности*. Содержательно это свойство означает, что возможности объединенной коалиции не меньше, чем возможности двух непересекающихся коалиций, действующих независимо. Поэтому у всех игроков имеется мотив объединиться в максимальную коалицию N.

Игру $\Gamma = \langle N,v \rangle$, где N – множество игроков; v – характеристическая функция, заданная на множестве коалиций, будем называть *кооперативной игрой в форме характеристической функции*.

Пример 12.1.1. Три менеджера по инвестициям рассматривают инвестиционные возможности на год. Первый менеджер имеет \$3,000,000 для инвестирования, второй менеджер имеет \$1,000,000 для инвестирования и третий менеджер обладает \$2,000,000 для этих целей. Возможности инвестирования определяются следующей схемой процентных ставок.

Величина депозита	Процентная ставка
Менее \$2,000,000	8 %
От \$2,000,000 до \$5,000,000	9 %
От \$5,000,000 и более	10 %

Эта задача может быть описана игрой трех лиц в форме характеристической функции. Здесь множество игроков есть $N = \{1,2,3\}$. Если за выигрыш $v(S)$ принять годовой доход по депозиту коалиции S, то значения характеристической функции примут вид (каждая единица - \$10,000):

$v(N) = 60$,

$v(1,2) = 36, v(1,3) = 50$, $v(2,3) = 27$,

$v(1) = 27$, $v(2) = 8$, $v(3) = 18$.

Пусть задана игра $\Gamma = \langle N,v \rangle$ в форме характеристической функции. Из супераддитивности характеристической функции следует, что для любых непересекающихся коалиций $S_1,\ldots,S_k$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \le v(N).$$

Отсюда, в частности, получаем, что не существует такого разбиения множества игроков на коалиции, при котором суммарный гарантированный выигрыш этих коалиций превышал бы выигрыш максимальной коалиции.

Можно построить игру в форме характеристической функции по игре в нормальной форме с множеством игроков N.

Лемма 12.1.1. Для бескоалиционной игры

$$\Gamma_N = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N} \right\rangle$$

построим функцию

$$v(S) = \sup_{x_S} \inf_{x_{-S}} K_S(x_S, x_{-S}),\ S \subset N,$$

где

- $x_S \in X_S$ – стратегия коалиции S, $S \subset N$;
- $x_{-S} \in X_{-S}$ – стратегия дополнительной коалиции (см. § 10.2);
- $K_S(x_S, x_{-S}) = \sum_{i\in S} K_i(x_S, x_{-S})$ – выигрыш коалиции S, $S \subset N$ в антагонистической игре $\Gamma_2(S) = \left\langle X_S, X_{-S}, K_S \right\rangle$.

Тогда для любых непересекающихся коалиций $T, S\ (T \subset N, S \subset N)$ выполняется неравенство

$$v(T) + v(S) \le v(T \cup S),\ v(\varnothing) = 0.$$

Утверждение леммы позволяет интерпретировать значение характеристической функции как *гарантированный выигрыш коалиции* в некоторой бескоалиционной игре в нормальной форме.

Лемма 12.1.2. Пусть $\Gamma_N = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N} \right\rangle$ – бескоалиционная игра с постоянной суммой, при этом характеристическая функция определена как в предыдущей лемме, и игры $\Gamma_2(S)$, $S \subset N$ имеют значения в смешанных стратегиях. Тогда

$$v(T) + v(S) = v(T \cup S),\ S \subset N.$$

В дальнейшем под *кооперативной игрой* будем понимать просто пару $\langle N, v \rangle$, где v – характеристическая функция произвольной природы, поскольку содержательная интерпретация самой характеристической функции не имеет принципиального значения для поиска решения.

§ 12.2. Дележ кооперативной игры

Основной проблемой теории кооперативных игр является не задача выбора тех или иных стратегий игроками, а проблема достижения справедливого раздела общего выигрыша $v(N)$.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям

- $\alpha_i \ge v(i), i \in N$, $\quad (12.2.1)$
- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$, $\quad (12.2.2)$

где $v(i)$— значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $S = \{i\}$, называется *дележом*.

Множество всех дележей в кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ будем обозначать $I(\Gamma)$. Проверьте, что множество $I(\Gamma)$ является выпуклым многогранником в R^n.

- Условие $(12.2.1)$ в определении дележа называется *условием индивидуальной рациональности.* Оно означает, что при участии в максимальной коалиции, каждый игрок получает, по меньшей мере, столько, сколько бы он мог бы получить, действуя самостоятельно и не заботясь о поддержке каких-либо других игроков.
- Должно также выполняться условие $(12.2.2)$, т. к. в противном случае либо существует распределение, при котором каждый игрок получит больше, чем его доля в конкретном дележе, либо игроки делят между собой нереализуемый выигрыш, а тогда сам дележ неосуществим. Таким образом, вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ является дележом только при выполнении второго условия, которое называется *условием коллективной рациональности*.

Из определения дележа следует, что вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ является дележом в кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ только при выполнении равенства

$$\alpha_i = v(i) + \gamma_i, i \in N, \qquad (12.2.3)$$

причем

$$\gamma_i \ge 0, i \in N, \sum_{i \in N} \gamma_i = v(N) - \sum_{i \in N} v(i).$$

Кооперативная игра $\Gamma = \langle N, v \rangle$ называется *существенной*, если

$$\sum_{i \in N} v(i) < v(N). \qquad (12.2.4)$$

В противном случае игра $\Gamma = \langle N, v \rangle$ называется *несущественной*. Несущественная игра имеет единственный дележ $\alpha = (v(1), \ldots, v(n))$. Поэтому больший интерес представляют существенные игры.

Пример 12.2.1. Рассмотрим следующие две игры трех лиц $N=\{1,2,3\}$:

a) $v(1)=0, v(2)=v(3)=1,\ v(1,2)=v(1,3)=v(2,3)=2, v(1,2,3)=3$.
Данная игра является существенной, т. к.

$$\sum_{i\in N} v(i)=v(1)+v(2)+v(3)=2,$$

$$v(N)=v\left(3\right)=3.$$

b) $v(1)=v(2)=v(3)=1,\ v(1,2)=v(1,3)=v(2,3)=2, v(1,2,3)=3$.
Данная игра является несущественной, т. к.

$$\sum_{i\in N} v(i)=v(1)+v(2)+v(3)=3,$$

$$v(N)=v\left(3\right)=3.$$

§ 12.3. Доминирование дележей

Во всякой существенной игре множество дележей бесконечно. Поэтому будем анализировать такие игры с помощью отношения доминирования.

Будем говорить, что *дележ* $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\mathrm{n}})$ *доминирует дележ* $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{\mathrm{n}})$ *по коалиции* $S\subset N$ (обозначение $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$), если

$$\alpha_i>\beta_i, i\in S, \qquad (12.3.1)$$

$$\sum_{i\in S}\alpha_i\le v(S). \qquad (12.3.2)$$

- Первое из условий в определении доминирования дележей по коалиции означает, что дележ $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathrm{n}})$ лучше дележа $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_{\mathrm{n}})$ для всех членов коалиции.
- Второе условие отражает реализуемость дележа $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathrm{n}})$ коалицией (т. е. коалиция на самом деле может предложить каждому из игроков указанную в дележе долю).

Замечание 12.3.1. Заметим, что доминирование невозможно по одноэлементной коалиции и множеству всех игроков (максимальной коалиции), поскольку в первом случае это противоречит условию $(12.3.1)$, а во втором – условию $(12.3.2)$ доминирования дележей.

Говорят, что дележ $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathrm{n}})$ *доминирует* дележ $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_{\mathrm{n}})$, если существует коалиция $S\subset N$, для которой $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$. Доминирование дележа $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_{\mathrm{n}})$ дележом $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathrm{n}})$ обозначается как $\alpha\succ\beta$.

§ 12.4. С-ядро кооперативной игры

Перейдем к рассмотрению принципов оптимального поведения в кооперативных играх, т. е. принципов оптимального распределения максимального суммарного выигрыша между игроками.

Пусть игроки в кооперативной игре пришли к такому соглашению (договору о дележе α^*) о распределении выигрыша максимальной коалиции, при котором ни один из дележей не доминирует указанное соглашение. Тогда такое распределение устойчиво в том смысле, что ни одной из коалиций невыгодно отделиться от других игроков и распределить между членами коалиции гарантированный выигрыш коалиции. Такие рассуждения наводят на мысль о целесообразности рассмотрения множества недоминируемых дележей.

Множество недоминируемых дележей кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ называется ее *C-ядром.*

Множество всех дележей из С-ядра кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ будем обозначать $C(\Gamma)$. Из определения следует, что $C(\Gamma) \subset I(\Gamma)$. Имеет место следующая теорема, которая характеризует С-ядро.

Теорема 12.4.1. Для того чтобы дележ $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ принадлежал С-ядру, необходимо и достаточно выполнение для всех $S \subset N$ следующих неравенств

$$v(S) \le \sum_{i \in S} \alpha_i \,. \tag{12.4.1}$$

Замечание 12.4.1. Из теоремы следует, что С-ядро является замкнутым, выпуклым подмножеством множества всех дележей. Однако, существенный недостаток такого подхода к оптимальности – это возможная пустота С-ядра.

Пример 12.4.1. «Джаз-оркестр». Директор клуба обещает 100 руб. певцу S, пианисту P и ударнику D за совместное выступление. Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 руб., ударника и пианиста в 65 руб., певца и ударника в 50 руб., один пианист зарабатывает 30 руб., певец – 20 руб., ударник один ничего не может заработать. Обозначая цифрами 1,2,3 игроков S, P и D соответственно, получаем кооперативную игру (N, v), где

$$N = \{1,2,3\}, v(1) = 20, v(2) = 30, v(3) = 0,$$

$$v(1,2) = 80, v(1,3) = 50, v(2,3) = 65, v(1,2,3) = 100.$$

Условия $(12.4.1)$ в данном примере примут вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \ge 80,\ \alpha_2 + \alpha_3 \ge 65,\ \alpha_1 + \alpha_3 \ge 50, \\ \alpha_1 \ge 20,\ \alpha_2 \ge 30,\ \alpha_3 \ge 0. \end{cases}$$

Множество дележей, удовлетворяющих этой системе, представляет собой треугольник ABC (рис.12.4.1) с вершинами: (35,45,20), (35,50,15), (30,50,20).

Построение С-ядра

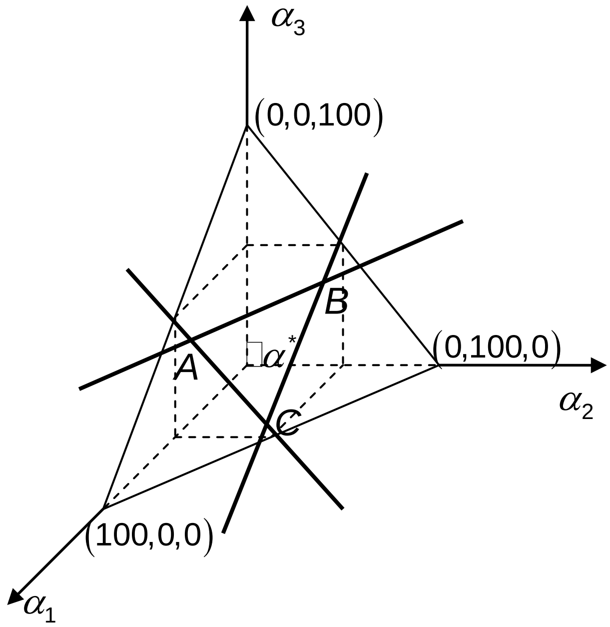

Рис. 12.4.1

Типичным представителем ядра является его центр (среднее арифметическое крайних точек), а именно дележ $\alpha^* =$(33.3;48.3;18.3). Этот дележ является справедливым компромиссом внутри С-ядра. Для дележа α^* характерно, что все двухэлементные коалиции имеют одинаковый дополнительный доход:

$$\alpha_i + \alpha_j - v(i, j) = 1,6 .$$

§ 12.5. НМ-решение

Концепция С-ядра предъявляет к оптимальным дележам достаточно сильные требования, вследствие чего С-ядро часто оказывается пустым. Несколько более слабые требования к оптимальным дележам содержатся в предложенной Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном концепции решения.

Подмножество множества дележей $L(\Gamma) \subset I(\Gamma)$ называется *НМ-решением игры* $\Gamma = \langle N, v \rangle$, если выполнены условия:

1) никакие два дележа из $L(\Gamma)$ не доминируют друг друга (внутренняя устойчивость);

2) для любого дележа $\alpha \notin L(\Gamma)$, найдется дележ $\beta \in L(\Gamma)$, такой что $\beta \succ \alpha$ (внешняя устойчивость).

Замечание 12.5.1. Если в игре $\Gamma = \langle N,v \rangle$ $C(\Gamma) \neq \varnothing$ и $L(\Gamma) \neq \varnothing$, то $C(\Gamma) \subset L(\Gamma)$.

§12.6. Вектор Шепли

Множественность С-ядра и НМ-решения в кооперативных играх, а также жесткие условия существования недоминируемых дележей не решают в общем случае проблемы выбора единственного дележа в кооперативной игре. Одним из наиболее известных кооперативных принципов оптимальности в игре $\Gamma = \langle N,v \rangle$, лишенных отмеченных недостатков, является так называемый *вектор Шепли*.

Для игры $\Gamma = \langle N,v \rangle$ вектор $\Phi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_n(v))$ с компонентами

$$\varphi_i(v) = \sum_{\{S \mid i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right), \qquad (12.6.1)$$

где $s = |S|$, называют вектором Шепли.

Вектору Шепли можно дать следующее содержательное истолкование:

1. Предположим, что игроки решили встретиться в определенном месте и в определенное время с целью переговоров по дележу выигрыша максимальной коалиции. Естественно, что из-за случайных отклонений все они будут прибывать в различные моменты времени.

2. Предположим, что все порядки прибытия игроков (т. е. все их перестановки) равновероятны, т. е. имеют одну и ту же вероятность $1/n!$. Далее предположим, что если игрок i, прибывая, застает на месте только членов коалиции $S \setminus \{i\}$ (остальные игроки еще не подошли), то он получает выигрыш $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Иначе говоря, его выигрышем является тот вклад, который он вносит в гарантированный выигрыш новой коалиции.

3. Тогда компонента вектора Шепли $\varphi_i(v)$, являясь по определению дележа долей выигрыша игрока i от суммарного выигрыша максимальной коалиции, представляет собой математическое ожидание выигрыша игрока i в соответствии с данной схемой.

Пример 12.6.1. Найдем вектор Шепли для игры «Джаз-оркестр» (см. пример 12.4.1).

Вычислим компоненты вектора Шепли $\Phi(v)$ в соответствии с формулой Шепли:

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{3}20 + \frac{1}{6}50 + \frac{1}{6}50 + \frac{1}{3}35 = 35;$$
$$\varphi_2(v) = \frac{1}{3}30 + \frac{1}{6}60 + \frac{1}{6}65 + \frac{1}{3}50 = 47,5;$$
$$\varphi_3(v) = \frac{1}{3}0 + \frac{1}{6}30 + \frac{1}{6}35 + \frac{1}{3}20 = 17,5;$$

Таким образом, вектор Шепли имеет вид $\Phi(v) = (35;\ 47,5;\ 17,5)$ и в данном примере принадлежит С-ядру кооперативной игры.

Выводы

- Игры, в которых допускаются совместные действия игроков и перераспределение выигрыша, можно формализовать как игры в форме характеристической функции.
- Основным понятием для игры в форме характеристической функции является понятие дележа.
- Принципами оптимального распределения максимального суммарного выигрыша между игроками в кооперативной игре являются С-ядро и НМ-решение, которые обладают рядом недостатков (множественность и возможная пустота).
- Вектор Шепли предлагает единственный дележ в качестве решения любой кооперативной игры.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите понятие характеристической функции кооперативной игры.
2. Что такое дележ кооперативной игры?
3. Запишите условия индивидуальной и коллективной рациональности дележа?
4. Когда один дележ доминирует другой дележ по коалиции?
5. Может ли один дележ доминировать другой по максимальной коалиции?
6. Может ли один дележ доминировать другой по одноэлементной коалиции?
7. Как называется множество недоминируемых дележей?
8. Сформулируйте критерий принадлежности дележа С-ядру.
9. Как вычисляются компоненты вектора Шепли?
10. Какую содержательную интерпретацию можно дать вектору Шепли?

Библиография

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.1985.
2. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998.
3. *Петросян Л.А., Кузютин Д.В*. Игры в развернутой форме: Оптимальность и устойчивость. Изд. СПбГУ, 2000.
4. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир,1985.
5. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. Изд. дом «Вильямс», М., 2005.
6. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н*. Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.
7. *Зенкевич Н.А., Марченко И.В.* Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь №3. СПб, изд-во МБИ, 2005.