Th В матричной игре $\bar{G}_A$ $\exists$ NE в смешанных стратегиях

$\forall A[m \times n]$, $\alpha_{ij} > 0$

$x = (x_1, \dots, x_m)$; $u = (1, \dots, 1) \in R^m$

$y = (y_1, \dots, y_n)$; $w = (1, \dots, 1) \in R^n$

$\min\limits_x xu^T = \min(x_1 + \dots + x_m)$ | $\max\limits_y y \cdot w^T = \max(y_1 + \dots + y_n)$

(1) $\begin{cases} x \cdot A \geqslant w \\ x_i \geqslant 0, \ i = \overline{1,m} \end{cases}$ | $\begin{cases} Ay^T \leqslant u^T \\ y_j \geqslant 0, \ j = \overline{1,n} \end{cases}$ (2)

th двойств. в ЛП $\Rightarrow$ $\bar{x}u^T = \bar{y}w^T = \theta > 0$ (3)

$\downarrow$, что $x^* = \frac{1}{\theta}\bar{x}$ и $y^* = \frac{1}{\theta}\bar{y}$ – оптим. стратегии, при этом $v = 1/\theta$

- (a) x^* и y^* – смешанные стратегии.
- (b) $K(x^*, y^*) = (\bar{x}A\bar{y}^T) \cdot \frac{1}{\theta^2}$

  $\theta = w \cdot \bar{y}^T \underset{(1)}{\leqslant} (\bar{x}A)\bar{y}^T = \bar{x}(A\bar{y}^T) \underset{(2)}{\leqslant} \bar{x}u^T = \theta$

  $\Rightarrow \bar{x}A\bar{y}^T = \theta \Rightarrow K(x^*, y^*) = \frac{1}{\theta} = v$

- (c)

  $\underset{\text{смеш. стр.}}{\forall x} : K(x, y^*) = xAy^{*T} = x(A\bar{y}^T) \cdot \frac{1}{\theta} \underset{(2)}{\leqslant} x \cdot u^T \cdot \frac{1}{\theta} = K(x^*, y^*)$

  $\forall y : K(x^*, y) \geqslant K(x^*, y^*)$