ТЕМА 4. Экономико-математические модели теории производства

Цель и задачи

Цель контента темы 4 — представить простейшие экономико-математические модели теории производства и методы их исследования.

Задачи контента темы 4:

- Ввести понятие производственной функции (в частности производственной функции Кобба-Дугласа) и научить считать такие числовые характеристики технологии производства, как предельный продукт, предельная норма технического замещения, эластичность.
- Формализовать задачу максимизации выпуска при заданном уровне переменных издержек, привести условия для равновесия производителя (в случае внутреннего решения).
- Найти равновесие производителя и оптимальный путь роста в случае производственной функции Кобба-Дугласа.
- Формализовать задачу минимизации переменных издержек при заданном уровне выпуска, определить функции условного спроса на ресурсы и функцию затрат.
- Найти функции условного спроса на ресурсы и функцию затрат в случае технологии Кобба-Дугласа частного вида.

Оглавление

§ 4.1 Производственная функция и ее характеристики

Простейшая экономико-математическая модель теории производства в постановочном плане и с точки зрения применяемых математических методов исследования аналогична модели потребительского выбора, рассмотренной в теме 1.

Пусть x_1 и x_2 — неотрицательные количества факторов производства (или ресурсов), используемых фирмой в производстве. Обычно эти факторы производства интерпретируются как труд (L) и капитал (K), хотя эта трактовка не является единственно возможной и никак не влияет на справедливость дальнейших результатов исследования.

Через $y \in R^+$ обозначим объем выпуска готовой продукции фирмы. Функция $y = f(x_1, x_2)$, показывающая максимально возможный выпуск при использовании ресурсов в количестве x_1 и x_2 соответственно, называется *производственной функцией* и является важнейшей характеристикой используемой технологии производства.

Наиболее известной является *производственная функция Кобба-Дугласа*:

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}, \tag{4.1.1}$$

или

$$y = f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

где A, α и β — положительные параметры.

Линиии уровня γ_c производственной функции в пространстве факторов производства Ox_1x_2 называют *изоквантами*. Различные точки на одной и той же изокванте γ_c показывают различные комбинации ресурсов, позволяющие получить (при оптимальном их использовании) одинаковый объем выпуска $y = c$.

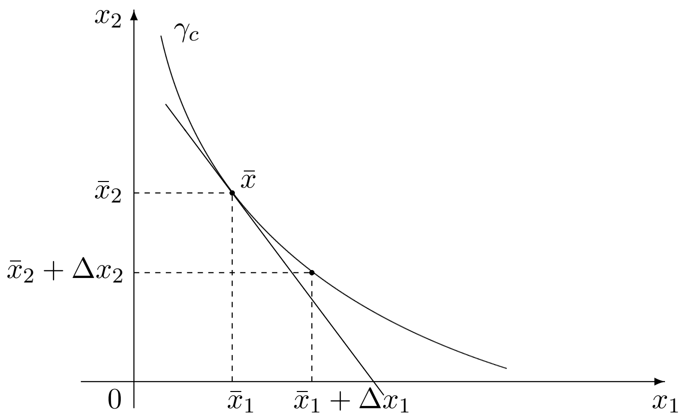

Рис. 4.1.1. К определению MRTS.

Предельный продукт MP_1 первого фактора производства определяется формулой

$$MP_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

и приближенно показывает приращение выпуска при использовании одной дополнительной единицы первого ресурса. Например, для производственной функции Кобба-Дугласа $y = f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$ предельные продукты труда и капитала равны соответственно

$$
\begin{aligned}
MP_L &= \frac{\partial f}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} \\
MP_K &= \frac{\partial f}{\partial K} = A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}
\end{aligned}
\qquad (4.1.2)
$$

Предельная норма технического замещения $MRTS$ (marginal rate of technical substitution) для производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ в точке $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ равна тангенсу угла наклона касательной к изокванте, проведенной в точке $\bar{x}$ (см. рис. 4.1.1):

$$
MRTS = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\Big|_{x \in \gamma_c}. \qquad (4.1.3)
$$

$MRTS$ приближенно показывает на сколько можно снизить количество второго ресурса при использовании одной дополнительной единицы первого ресурса и сохранении выпуска неизменным (содержательно аналогичная числовая характеристика в теме 1 — предельная норма замещения MRS).

С использованием теоремы о производной неявной функции легко получить связь между $MRTS$ и предельными продуктами:

$$
MRTS = -\frac{MP_1}{MP_2}. \qquad (4.1.4)
$$

В частности, для производственной функции Кобба-Дугласа формула (4.1.4) примет вид

$$
MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_L}{x_K}. \qquad (4.1.5)
$$

Если производственная функция $y = f(x_1, x_2)$ при всех $t > 1$ удовлетворяет условию

$$
f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2), \qquad (4.1.6)
$$

говорят, что соответствующая технология производства характеризуется *постоянной отдачей от масштаба.* Условию

$$
f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)
$$

отвечает *возрастающая отдача от масштаба*, а неравенству с противоположным знаком — убывающая.

Отметим, что технология Кобба-Дугласа (4.1.1) характеризуется постоянной отдачей от масштаба, если $\alpha+\beta = 1$, возрастающей — если $\alpha+\beta > 1$, и убывающей — если $\alpha + \beta < 1$.

Эластичность дифференцируемой *производственной функции* $y = f(x_1, x_2)$ *по первому фактору производства* определяется формулой

$$E_{x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x_1, x_2)}, \tag{4.1.7}$$

и приближенно показывает, на сколько процентов увеличится выпуск при увеличении использования первого ресурса на 1%.

Нетрудно проверить, что эластичность производственной функции Кобба-Дугласа (4.1.1) по первому ресурсу (труду) равна α, а по второму ресурсу (капиталу) — β. Таким образом, числовые параметры производственной функции Кобба-Дугласа $y = f(L, K) = AL^\alpha K^\beta$ имеют вполне конкретный экономический смысл:

- A — объем выпуска при использовании каждого ресурса в количестве единица;
- α — эластичность выпуска по труду;
- β — эластичность выпуска по капиталу.

§ 4.2 Затраты (издержки). Максимизация выпуска при заданном уровне переменных издержек. Равновесие производителя

Будем использовать следующие принятые в экономической литературе обозначения для различных видов затрат (издержек) фирмы:

- $TC(y) = FC + TVC(y)$ — общие издержки, необходимые для производства y единиц готовой продукции;
- FC — постоянные издержки;
- $TVC(y)$ — общие переменные издержки;
- $AC(y) = \dfrac{TC(y)}{y}$ — средние издержки;
- $MC(y) = TC'(y) = TVC'(y)$ — предельные издержки.

Известные свойства различных кривых издержек достаточно легко строго обосновать математически, если соответствующие функции дифференцируемы. Покажем, например, что кривая предельных издержек $MC(y)$ пересекает кривую средних издержек $AC(y)$ "снизу вверх" в точке y^*, отвечающей минимуму средних издержек (см. рис. 4.2.1).

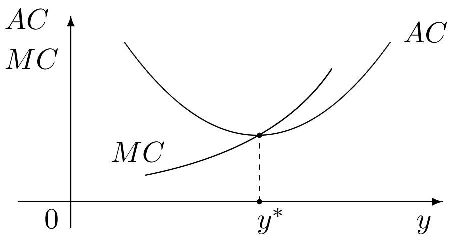

Рис. 4.2.1.

Действительно,

$$\frac{d}{dy}(AC(y)) = \frac{d}{dy}\left(\frac{TC(y)}{y}\right) = \frac{yMC(y) - TC(y)}{y^2} = \frac{1}{y}(MC(y) - AC(y)).$$

Следовательно, при значениях выпуска y, удовлетворяющих условию $MC(y) < AC(y)$, функция средних издержек $AC(y)$ убывает, при значениях y, удовлетворяющих условию $MC(y) > AC(y)$, функция $AC(y)$ возрастает, а точка y^*, определяемая условием $MC(y) = AC(y)$, отвечает минимуму средних издержек.

Одна из простейших оптимизационных задач, обычно рассматриваемых в микроэкономике при изучении модели производства, заключается в следующем: определить комбинацию ресурсов, позволяющую произвести максимальный объем готовой продукции при заданной технологии, ценах ресурсов ω_1 и ω_2 и ограничения c на объем переменных издержек:

$$\begin{cases} y = f(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = c. \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Отметим, что ограничение задачи (4.2.1) определяет в пространстве ресурсов Ox_1x_2 прямую, называемую *изокостой*, а решение этой задачи $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ определяет оптимальную, то есть максимизирующую выпуск комбинацию ресурсов.

Конечно, решение x^* зависит от параметров ω_1, ω_2 и c:

$$\begin{cases} x_1^*(\omega_1, \omega_2, c) \\ x_2^*(\omega_1, \omega_2, c). \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

В экономической литературе решение (x_1^*, x_2^*) задачи (4.2.1) часто называют *равновесием производителя*, а годограф вектор-функции

$(x_1^*(\omega_1, \omega_2, c), x_2^*(\omega_1, \omega_2, c))$ при фиксированных ценах ω_1 и ω_2 — *путем развития фирмы* или *оптимальным путем роста.*

Задача (4.2.1) математически не отличается от задачи поиска оптимального потребительского набора, подробно рассмотренной в теме 1. Приведем, например, условия для внутреннего ($x_1^* > 0, x_2^* > 0$) решения x^* (см. рис. 4.2.2.):

- $MRTS = -\dfrac{\omega_1}{\omega_2},$ (4.2.3)

- $\dfrac{MP_1}{\omega_1} = \dfrac{MP_2}{\omega_2}.$ (4.2.4)

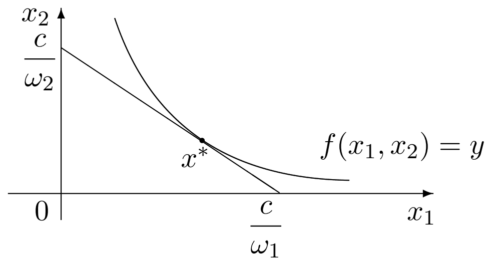

Рис. 4.2.2. Равновесие производителя ($x_1^* > 0, x_2^* > 0$)

В рассмотренном случае равновесие производителя x^* геометрически определяется точкой касания изокосты с наиболее удаленной от начала координат изоквантой.

Приведем аналитическое решение задачи (4.2.1) методом Лагранжа для технологии Кобба-Дугласа.

$$\begin{cases} y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \longrightarrow \max \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = c \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} - \lambda(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - c),$$

а необходимые условия оптимальности представляют собой следующую систему уравнений (относительно x_1, x_2 и λ):

$$\begin{cases} \alpha A x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - \lambda\omega_1 = 0 \\ \beta A x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - \lambda\omega_2 = 0 \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = c \end{cases} \tag{4.2.6.}$$

Умножив первое уравнение на βx_1, а второе на αx_2, получим прямо пропорциональную зависимость между компонентами x_1 и x_2 оптимального решения:

$$x_2 = \frac{\beta\omega_1}{\alpha\omega_2}x_1. \tag{4.2.7}$$

Подставив (4.2.7) в последнее уравнение системы (4.2.6), получим следующие компоненты равновесия производителя:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{c}{\omega_1} \\ x_2^* = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{c}{\omega_2} \end{cases} \tag{4.2.8.}$$

Естественно, найденное равновесие производителя (4.2.8), то есть решение задачи (4.2.5) аналогично по структуре решению задачи поиска оптимального набора потребителя в случае предпочтений Кобба-Дугласа (см. контент темы 1).

Кроме того, луч, заданный уравнением

$$x_2^* = \frac{\beta\omega_1}{\alpha\omega_2} x_1^*, \quad x_1^* > 0$$

в пространстве ресурсов Ox_1x_2 определяет оптимальный путь роста или путь развития фирмы.

§ 4.3 Минимизация переменных издержек при заданном уровне выпуска. Функция затрат.

Рассмотрим далее задачу, двойственную к рассмотренной в предыдущем параграфе задаче максимизации выпуска. А именно, определим минимально необходимые переменные издержки C при условии выпуска y единиц готовой продукции по заданной технологии и при заданных ценах ресурсов ω_1 и ω_2:

$$\begin{cases} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \longrightarrow \min \\ f(x_1, x_2) = y \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Решение этой задачи $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ также зависит от параметров ω_1, ω_2 и y, а функции

$$\begin{cases} \bar{x}_1(\omega_1, \omega_2, y) \\ \bar{x}_2(\omega_1, \omega_2, y) \end{cases} \tag{4.3.2}$$

принято называть *функциями условного спроса на ресурсы* (conditional factor demand functions).

При подстановке функций условного спроса на ресурсы (4.3.2) в целевую функцию задачи (4.3.1) получается известная в микроэкономике *функция затрат* (cost function)

$$C(\omega_1, \omega_2, y) = \omega_1 \cdot \bar{x}_1(\omega_1, \omega_2, y) + \omega_2 \cdot \bar{x}_2(\omega_1, \omega_2, y). \tag{4.3.3}$$

Функция затрат определяет минимальные переменные издержки, необходимые для производства y единиц готовой продукции при заданной технологии производства и ценах ресурсов ω_1 и ω_2.

Приведем решение задачи (4.3.1) методом Лагранжа в случае технологии Кобба-Дугласа частного вида $\left(A = 1, \alpha = \beta = \dfrac{1}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \min\limits_{(x_1,x_2)} (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) = C(\omega_1, \omega_2, y) \\ f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = y \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - \lambda(x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - y),$$

а необходимые условия оптимальности представляют собой следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1 - \dfrac{1}{2}\lambda x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = 0 \\ \omega_2 - \dfrac{1}{2}\lambda x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = 0 \\ x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = y \end{cases} \tag{4.3.5}$$

Умножив первое уравнение на x_1, а второе на x_2, получим прямо пропорциональную зависимость между компонентами x_1 и x_2 оптимального решения:

$$x_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} x_1. \tag{4.3.6}$$

Подставив (4.3.6) в последнее уравнение системы (4.3.5), получим следующие функции условного спроса на ресурсы:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(\omega_1, \omega_2, y) = \sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_1}} y \\ \bar{x}_2(\omega_1, \omega_2, y) = \sqrt{\dfrac{\omega_1}{\omega_2}} y \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Функция затрат для рассмотренной технологии производства примет вид

$$C(\omega_1, \omega_2, y) = 2 \cdot \omega_1^{\frac{1}{2}} \cdot \omega_2^{\frac{1}{2}} \cdot y. \tag{4.3.8}$$

Полезно сравнить структуру полученной функции затрат и структуру исходной производственной функции.

В заключение приведем две формулы, непосредственно вытекающие из определений различных видов издержек фирмы:

$$TVC(y) = \int_0^y MC(y)dy, \qquad (4.3.9)$$

$$TC(y) = \int_0^y MC(y)dy + FC. \qquad (4.3.9)$$

Выводы:

- При аналитическом описании применяемой технологии производства используют производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, показывающую максимально возможный выпуск при использовании ресурсов в количестве x_1 и x_2 соответственно.
- Простейшая экономико-математическая модель теории производства в постановочном плане и с точки зрения применяемых математических методов исследования аналогична модели потребительского выбора, рассмотренной в теме 1.
- Известные в экономической теории свойства различных кривых издержек достаточно легко строго обосновать математически, если соответствующие функции издержек дифференцируемы.
- Задача минимизации переменных издержек при заданном уровне выпуска (4.3.1) является двойственной к задаче максимизации выпуска при ограничении на размер переменных издержек (4.2.1).
- Для исследования простейших оптимизационных экономико-математических моделей теории производства применяют метод множителей Лагранжа.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите строгое определение производственной функции.
2. Сформулируйте определение изокванты. Нарисуйте несколько изоквант производственной функции Кобба-Дугласа $y = \sqrt{x_1} \cdot x_2$.
3. Сформулируйте экономический смысл понятия "предельный продукт". Найдите предельный продукт труда и капитала для производственной функции $y = f(L, K) = 2L^3\sqrt{K}$ в точке (2,9).

4. Сформулируйте экономический смысл понятия "предельная норма технического замещения". Найдите MRTS для производственной функции $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^3\sqrt{x_2}$ в точке (2,9).

5. Докажите справедливость формулы (4.1.4).

6. Используя формулу (4.1.5), проверьте справедливость Вашего ответа на вопрос 4.

7. Приведите строгое определение и экономический смысл понятия "убывающая отдача от масштаба производства".

8. При каких значениях параметров A и β технология Кобба-Дугласа $y = A\sqrt{x_1}x_2^\beta$ характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

9. Приведите строгое определение эластичности производственной функции по второму ресурсу, поясните экономический смысл этого понятия.

10. Найдите эластичность производственной функции $y = \sqrt{x_1^3x_2}$ по первому и второму фактору производства в точке (1,4) и (4,3).

11. Сформулируйте экономический смысл числовых параметров в производственной функции Кобба-Дугласа.

12. Какие свойства различных кривых издержек, помимо рассмотренного в § 4.2, Вам известны?

13. Приведите определение изокосты.

14. Что такое равновесие производителя?

15. В каком пространстве можно нарисовать оптимальный путь роста фирмы?

16. Что представляет собой с геометрической точки зрения равновесие производителя в случае внутреннего решения $(x_1^* > 0, x_2^* > 0)$?

17. Запишите подробное решение системы (4.2.6).

18. Нарисуйте оптимальный путь роста фирмы при следующих значениях параметров в задаче (4.2.5): $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 2$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 4$.

19. Как определяются функции условного спроса на ресурсы?

20. Запишите определение функции затрат (cost function). От каких аргументов она зависит?

21. Запишите подробное решение системы (4.3.5).

22. Что общего в структуре функции затрат (4.3.8) и структуре исходной производственной функции Кобба-Дугласа?

23. Обоснуйте аналитически формулы (4.3.9) и (4.3.10) и предложите их графическое толкование.

Библиография

1. Hal R.Varian. Microeconomic Analysis, 3rd Ed. W.W.Norton & Company, 1992.

2. Вэриан. Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М., ЮНИТИ, 1997 (перевод книги Hal R.Varian. Intermediate Microeconomics (A Modern Approach, 3rd Edition) W.W.Norton & Company, 1992).

3. A.Mas-Colell, M.D.Winston, J.R.Green. Microeconomic Theory. Oxford Univ. Press, 1995.

4. Л. С. Тарасевич, П. И. Гребенников, А. И. Леусский. Микроэкономика. М., Юрайт-Издат, 2006.

5. Л.Г.Симкина, Б.В.Корнейчук. Микроэкономика (2-е издание). СПб., Питер, 2003.