ТЕМА 3. Представление о моделях общего экономического равновесия

Цель и задачи

Цель темы 3 — представить формализацию и аналитическое исследование простейшей модели общего экономического равновесия на рынке "чистого обмена".

Задачи контента темы 3:

- Представить экономико-математическую модель общего экономического равновесия на рынке "чистого обмена"(с двумя товарами и двумя потребителями).
- Определить оптимальное по Парето распределение и контрактную кривую в коробке Эджуорта.
- Определить равновесие Вальраса и привести пример его поиска в случае предпочтений Кобба-Дугласа.
- Сформулировать первую и вторую теоремы экономики благосостояния.

Оглавление

§ 3.1 Простейшая модель общего равновесия на рынке "чистого обмена". Оптимальное по Парето распределение

Анализ частичного равновесия (partial equilibrium ahalysis) связан с проблемой определения равновесной цены на некоторый товар с учётом факторов спроса на него и предложения этого товара в предположении, что цены других товаров заданы экзогенно (см. §2.3).

При проведении анализа *общего равновесия* (general equilibrium ahalysis) необходимо исследовать, каким образом взаимодействие факторов спроса и предложения на нескольких рынках определяет цены многих товаров. В общем случае это достаточно сложная проблема.

Ниже мы проведём анализ простейшей модели общего равновесия при следующих предположениях:

- существует всего два различных товара (или два рынка, на каждом из которых продаётся и покупается товар 1 и товар 2 соответственно);
- два потребителя (потребитель А и потребитель В), имеющие некоторые начальные запасы рассматриваемых товаров, могут обменивать эти товары между собой (так называемая *модель "чистого обмена"*, процесс производства товаров при этом не затрагивается);
- оба участника рынка являются "ценополучателями" (price-takers), т. е. считают, что их поведение не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на цены товаров (условие совершенной конкуренции).

Предположим дополнительно, что предпочтения обоих потребителей удовлетворяют свойствам непрерывности, строгой монотонности, строгой выпуклости, а также свойству "local nonsatiation" (см. §1.1).

Обозначим через ω_1 и ω_2 общее наличное количество товара 1 и товара 2 соответственно, $x^A = (x_1^A, x_2^A)$ и $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ — потребительские наборы потребителя А и потребителя В соответственно.

Вектор $x = (x^A, x^B) = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B) \in R_+^4$, будем называть *распределением* (практически осуществимым или *допустимым распределением* товаров 1 и 2 между потребителями А и В), если

$$\begin{cases} x_1^A + x_1^B = \omega_1 \\ x_2^A + x_2^B = \omega_2. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Исходное распределение или распределение начальных запасов (содержащее те наборы товаров, с которыми каждый потребитель "приходит" на рынок "чистого обмена" с возможностью дальнейшего совершения обменных сделок или торгов) обозначим

$$\omega = (\omega^A, \omega^B) = (\omega_1^A, \omega_2^A, \omega_1^B, \omega_2^B).$$

Для графической иллюстрации введённых понятий и дальнейших разумных сделок между потребителями удобно использовать так называемую *"коробку Эджуорта"* (представлена на рис. 3.1.1, ее ширина — ω_1, высота — ω_2, потребительские наборы потребителя А "отсчитываются" от левого нижнего угла, потребителя В — от правого верхнего угла, кривые безразличия потребителей обозначены γ^A и γ^B соответственно).

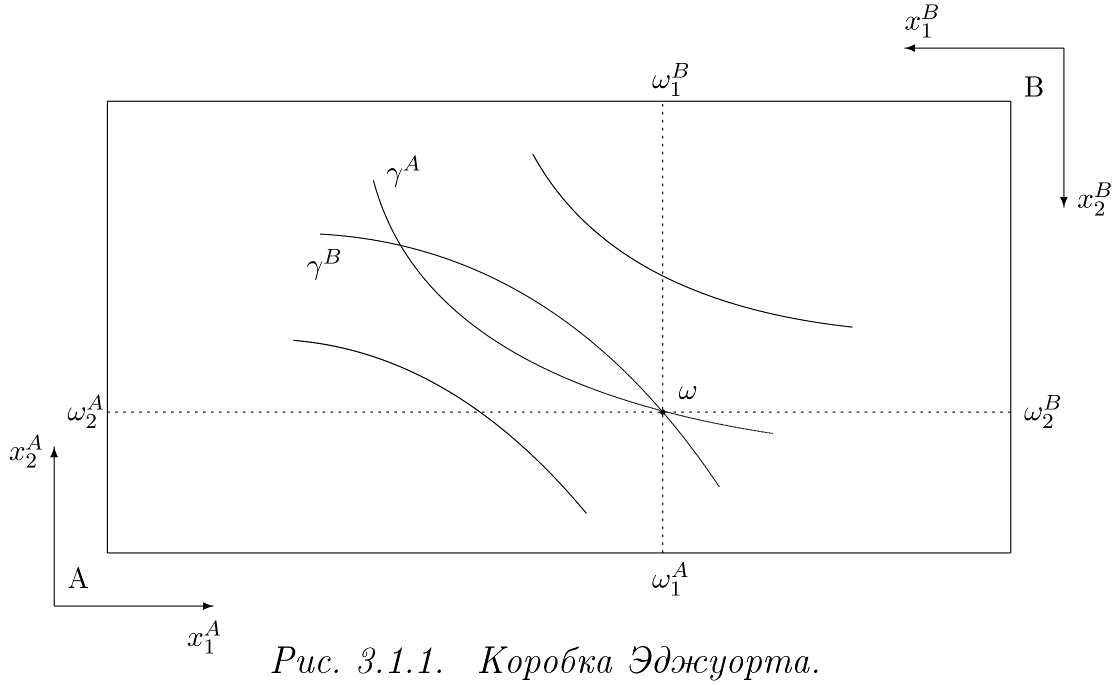

Рис. 3.1.1. Коробка Эджуорта.

Переход от одного распределения товаров между потребителями к другому распределению (когда некоторое количество товаров переходит от одного потребителя к другому) называют *обменной сделкой*.

Распределение $\overline{x}$ называют *слабо-оптимальным по Парето* (weak Pareto-optimal), если не существует другого распределения x, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} (x_1^A, x_2^A) \overset{A}{\succ} (\overline{x}_1^A, \overline{x}_2^A) \\ (x_1^B, x_2^B) \overset{B}{\succ} (\overline{x}_1^B, \overline{x}_2^B). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Слабо-оптимальное по Парето распределение $\overline{x}$ допускает следующие содержательные интерпретации:

- не существует другого распределения, более предпочтительного для каждого потребителя;
- любое распределение, более предпочтительное, чем $\overline{x}$, для одного потребителя, не является более предпочтительным для другого;
- отсутствует возможность совершения взаимовыгодных обменных сделок.

Распределение $\overline{x}$ называют *оптимальным по Парето* (Pareto-optimal) или эффективным, если не существует другого распределения x, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} (x_1^A, x_2^A) \overset{A}{\succsim} (\overline{x}_1^A, \overline{x}_2^A) \\ (x_1^B, x_2^B) \overset{B}{\succsim} (\overline{x}_1^B, \overline{x}_2^B), \end{cases} \tag{3.1.3}$$

причём, по крайней мере, одно из отношений предпочтения выполнено в строгом смысле.

Если распределение $\overline{x}$ оптимально по Парето, то любое распределение, лучшее, чем $\overline{x}$, для одного потребителя, обязательно будет хуже, чем $\overline{x}$, для другого. В общем случае, любое оптимальное по Парето распределение является также слабо-оптимальным по Парето, а обратное утверждение верно не всегда. Однако, при сделанных выше предположениях относительно предпочтений потребителей, условие оптимальности по Парето и слабой оптимальности по Парето эквивалентны. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем мы будем говорить об оптимальных по Парето распределениях, используя для их характеристики условия (3.1.2).

Считается, что только оптимальное по Парето распределение может быть окончательным (по результатам проведённых обменных сделок между потребителями).

На рис. 3.1.1 каждое распределение из области в форме линзы, расположенной выше γ^A и ниже γ^B, является более предпочтительным, чем исходное распределение ω, для обоих потребителей.

С геометрической точки зрения, распределение x (при котором каждый потребитель получает положительное количество каждого товара) является оптимальным по Парето, если в точке x кривые безразличия потребителей касаются друг друга (см. рис. 3.2.2). Кроме того, распределения $(\omega_1, \omega_2, 0, 0)$ и $(0, 0, \omega_1, \omega_2)$ также оптимальны по Парето.

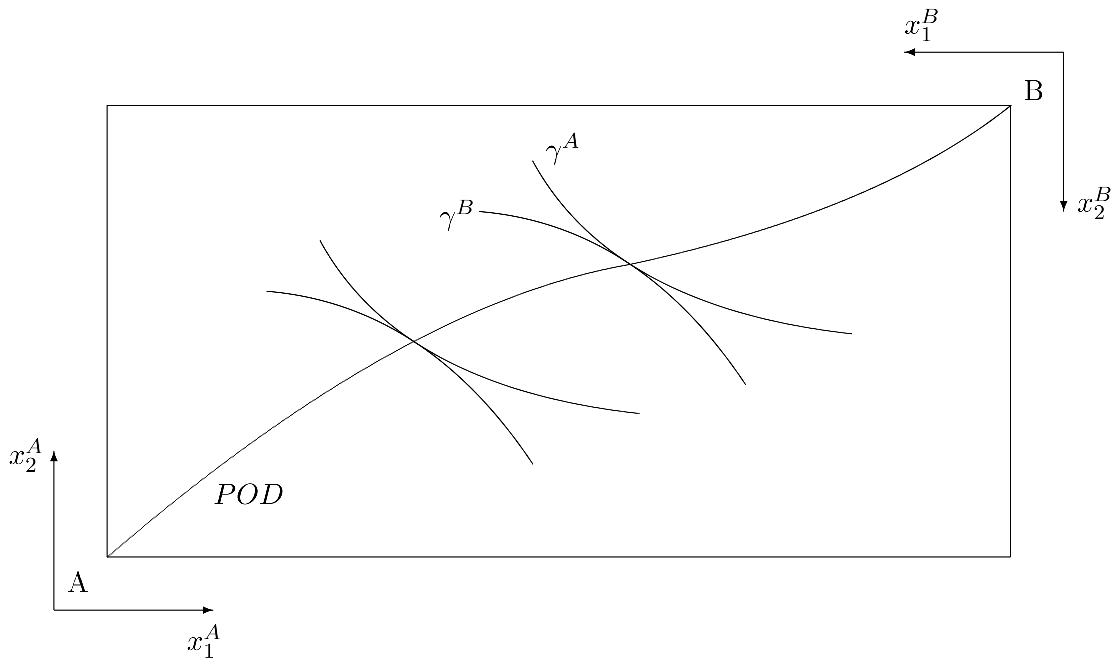

Рис. 3.1.2. Контрактная кривая содержит все Парето-оптимальные распределения.

Все Парето-оптимальные распределения лежат на так называемой *контрактной кривой* POD в коробке Эджуорта. Только точки этой кривой рассматриваются в качестве возможных окончательных распределений.

§ 3.2 Равновесие Вальраса. Первая и вторая теоремы экономики благосостояния

Предположим, что положительные цены товаров p_1 и p_2 заданы экзогенно, $p = (p_1, p_2)$. В соответствии с основными предположениями теории потребительского выбора (см. контент темы 1), оптимальный потребительский набор $(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A)$ потребителя A является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u^A(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A) = \max u^A(x_1^A, x_2^A) \\ p_1 x_1^A + p_2 x_2^A \leq p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A = p\omega^A, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

где $u^A(\cdot)$ — функция полезности потребителя A, (x_1^A, x_2^A) — компоненты распределения, а в роли "дохода" m^A потребителя A выступает стоимость $p\omega^A$ его начальных запасов.

При сделанных в §3.1 предположениях, решение задачи (3.2.1) определяется единственным образом для каждого вектора $(p_1, p_2, p\omega^A)$ и лежит на бюджетной линии, т. е. ограничение задачи становится связывающим.

Обозначим через

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^A = x_1^A(p_1, p_2, p\omega^A) \\ \widetilde{x}_2^A = x_2^A(p_1, p_2, p\omega^A) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

функцию спроса потребителя A.

Соответственно, оптимальный потребительский набор $(\widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B)$ потребителя B является решением задачи:

$$\begin{cases} u^B(\widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = \max u^B(x_1^B, x_2^B) \\ p_1 x_1^B + p_2 x_2^B \leq p_1 \omega_1^B + p_2 \omega_2^B = p\omega^B. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Функция спроса потребителя B:

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^B = x_1^B(p_1, p_2, p\omega^B) \\ \widetilde{x}_2^B = x_2^B(p_1, p_2, p\omega^B). \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Вектор цен $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ и соответствующее распределение называют *равновесием Вальраса* (Walrasian Equilibria), если выполнены условия:

$$\begin{cases} x_1^A(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}\omega^A) + x_1^B(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}\omega^B) = \omega_1^A + \omega_1^B \\ x_2^A(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}\omega^A) + x_2^B(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}\omega^B) = \omega_2^A + \omega_2^B. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Здесь через $x_1^A(\cdot)$ и $x_2^A(\cdot)$ обозначены компоненты функции спроса потребителя A, аналогичные обозначения использованы для потребителя B.

Часто под равновесием Вальраса (общим равновесием, конкурентным равновесием, рыночным равновесием) подразумевают только вектор цен $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$, удовлетворяющий (3.2.5). Эта пара цен "уравновешивает" объёмы совокупного спроса и совокупного предложения каждого товара на рассматриваемом рынке чистого обмена.

Геометрический смысл равновесия Вальраса раскрывает рис. 3.2.1. Бюджетная линия каждого потребителя $b = b(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \omega)$ проходит через исходное распределение ω и в системе координат потребителя A задаётся уравнением:

$$\widetilde{p}_1 x_1^A + \widetilde{p}_2 x_2^A = \widetilde{p}_1 \omega_1^A + \widetilde{p}_2 \omega_2^A, \tag{3.2.6}$$

а в системе координат потребителя B:

$$\widetilde{p}_1 x_1^B + \widetilde{p}_2 x_2^B = \widetilde{p}_1 \omega_1^B + \widetilde{p}_2 \omega_2^B. \tag{3.2.7}$$

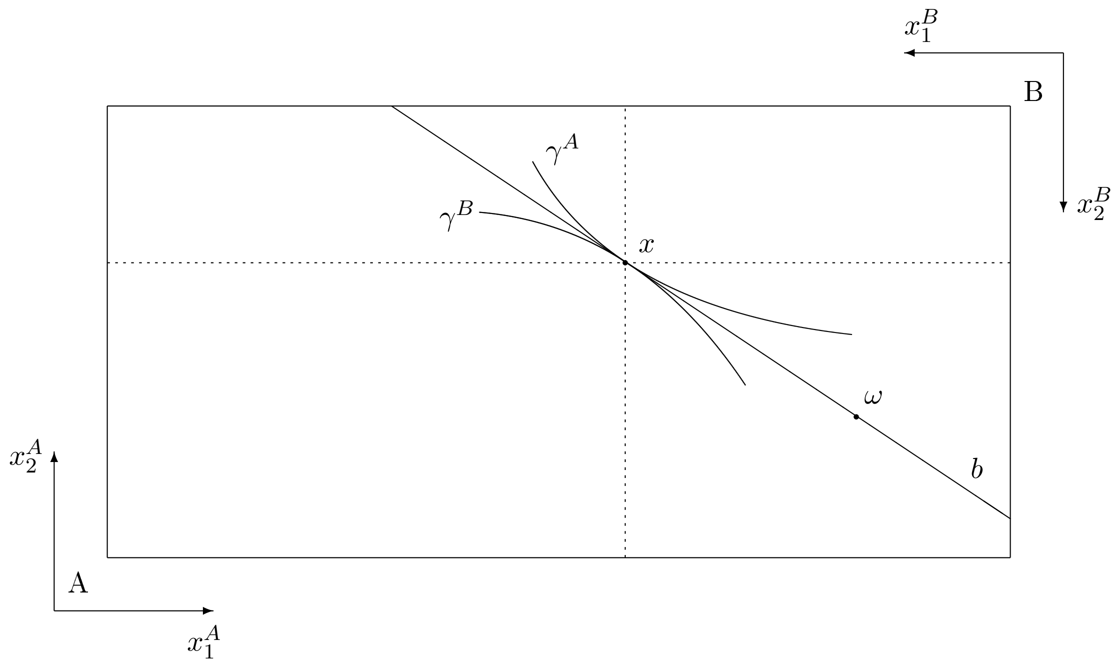

Рис. 3.2.1. Равновесное распределение x, отвечающее заданному вектору цен и распределению начальных запасов ω.

Несложно заметить, что равновесное распределение $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ — это точка в коробке Эджуорта, в которой кривые безразличия потребителей γ^A и γ^B имеют общую касательную — бюджетную линию $b(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \omega)$. Следовательно, равновесное распределение обязательно лежит на контрактной кривой и является оптимальным по Парето.

Величину $x_1^A(p_1, p_2, p\omega) - \omega_1^A$ называют *избыточным спросом* потребителя А на товар 1. Аналогично определяется избыточный спрос каждого потребителя на каждый товар. *Совокупный избыточный спрос* на товар 1 $z_1(p_1, p_2)$ и товар 2 $z_2(p_1, p_2)$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} z_1(p_1, p_2, \omega) = x_1^A(p_1, p_2, \omega^A) - \omega_1^A + x_1^B(p_1, p_2, \omega^B) - \omega_1^B \\ z_2(p_1, p_2, \omega) = x_2^A(p_1, p_2, \omega^A) - \omega_2^A + x_2^B(p_1, p_2, \omega^B) - \omega_2^B. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Эквивалентное (3.2.5) условие для равновесия Вальраса $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ с использованием понятий совокупного избыточного спроса можно записать в виде

$$\begin{cases} z_1(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \omega) = 0 \\ z_2(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \omega) = 0. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Закон Вальраса: Стоимость совокупного избыточного спроса на все товары равна нулю для любого вектора цен:

$$p_1 z_1(p_1, p_2, \omega) + p_2 z_2(p_1, p_2, \omega) \equiv 0 \tag{3.2.10}$$

Следствие из закона Вальраса: Пусть $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$. Если $z_1(p_1, p_2, \omega) = 0$, то обязательно $z_2(p_1, p_2, \omega) = 0$, и наоборот. Иными словами, равенство нулю совокупного избыточного спроса на один товар гарантирует равенство нулю совокупного избыточного спроса и на другой товар.[1]

Таким образом, для поиска равновесия Вальраса нужно использовать только одно уравнение из (3.2.9) или из (3.2.5), а равновесные цены определяются с точностью до постоянного множителя (см. понятие цены-измерителя в §1.1).

Пример 3.2.1. *(поиск равновесия Вальраса в случае предпочтений Кобба-Дугласа).*

Пусть предпочтения потребителей А и В заданы следующими функциями полезности Кобба-Дугласа:

$$\begin{cases} u^A(x_1^A, x_2^A) = (x_1^A)^\alpha (x_2^A)^{1-\alpha} \\ u^B(x_1^B, x_2^B) = (x_1^B)^\beta (x_2^B)^{1-\beta}, \end{cases} \tag{3.2.11}$$

где $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, а исходное распределение $\omega = (\omega_1^A, \omega_2^A, \omega_1^B, \omega_2^B) = (1, 0, 0, 1)$.

Сформулируем задачи оптимального потребительского выбора (см. (3.2.1) и (3.2.3)) для функций полезности (3.2.11) и выбранного исходного распределения:

$$\begin{cases} u^A(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A) = \max\left((x_1^A)^{\frac{3}{4}} (x_2^A)^{\frac{1}{4}}\right) \\ p_1 x_1^A + p_2 x_2^A \le p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = p_1 \end{cases}$$

[1] В более общей постановке из закона Вальраса следует: Если некоторый вектор цен уравновешивает спрос и предложение на всех рынках, кроме одного, то он будет уравновешивать спрос и предложение и на последнем рынке.

$$\begin{cases} u^B(\widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = \max\left((x_1^B)^{\frac{1}{2}}(x_2^B)^{\frac{1}{2}}\right) \\ p_1 x_1^B + p_2 x_2^B \le p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 1 = p_2 \end{cases}$$

Найдем решение (3.2.2) и (3.2.4) этих задач, используя выведенные в теме 1 функции спроса (1.2.4) для предпочтений Кобба-Дугласа:

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^A(p_1,p_2) = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot \dfrac{p_1}{p_1} \\ \widetilde{x}_2^A(p_1,p_2) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widetilde{x}_1^A(p_1,p_2) = \dfrac{3}{4} \\ \widetilde{x}_2^A(p_1,p_2) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \tag{3.2.12}$$

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^B(p_1,p_2) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{p_2}{p_1} \\ \widetilde{x}_2^B(p_1,p_2) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{p_2}{p_2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widetilde{x}_1^B(p_1,p_2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{p_2}{p_1} \\ \widetilde{x}_2^B(p_1,p_2) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Найдем равновесие Вальраса, используя, например, первое из условий (3.2.5):

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 1 \implies 3p_1 + 2p_2 = 4p_1 \implies p_1 = 2p_2, \quad p_2 > 0. \tag{3.2.14}$$

Следовательно, в любом равновесном по Вальрасу векторе цен $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$, цена на первый товар должна быть в два раза больше цены на второй товар.

Подставим (3.2.14) в (3.2.12) и (3.2.13), чтобы найти равновесное распределение $(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B)$:

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^A = \dfrac{3}{4} \\ \widetilde{x}_2^A = \dfrac{1}{4} \cdot 2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \widetilde{x}_1^B = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \\ \widetilde{x}_2^B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом, равновесие по Вальрасу в рассмотренной модели общего равновесия примет вид:

$$(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = \left(2p_2, p_2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

где p_2 — произвольное положительное значение цены второго товара.

Теорема 3.2.1. (*первая теорема экономики благосостояния*).

Пусть $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ — равновесие Вальраса, а $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ — соответствующее равновесное распределение товаров между потребителями в модели чистого обмена. Тогда распределение x оптимально по Парето.

Теорема 3.2.2. (*вторая теорема экономики благосостояния).*

Пусть $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ — оптимальное по Парето распределение, согласно которому каждый потребитель располагает положительным количеством каждого товара. Тогда (при выполнении предположений §3.1) существует такой вектор положительных цен $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$, что $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ является равновесием Вальраса при некотором распределении[1] начальных запасов ω.

Выводы:

- Для графического представления модели чистого обмена (в случае двух товаров и двух потребителей) используется коробка Эджуорта.
- Только оптимальное по Парето распределение товаров может быть окончательным (по результатам проведенных обменных сделок между потребителями)
- Все Парето-оптимальные распределения лежат на контрактной кривой в коробке Эджуорта.
- Равновесное по Вальрасу распределение — это точка в коробке Эджуорта, в которой кривые безразличия потребителей имеют общую касательную.
- Если некоторый вектор цен уравновешивает спрос и предложение на всех рынках, кроме одного, то он будет уравновешивать спрос и предложение и на последнем рынке (закон Вальраса).
- Первая и вторая теоремы экономики благосостояния взаимно обратны.

Вопросы для самопроверки

1. В чем разница между моделями частичного и общего равновесия?
2. Перечислите основные предположения простейшей модели общего равновесия (модели чистого обмена).
3. Что называют распределением товаров в модели чистого обмена?
4. Приведите описание коробки Эджуорта.

[1]В частности, таким распределением будет $\omega = x$.

5. Что называют обменной сделкой в модели чистого обмена?
6. В каком случае распределение называют слабо-оптимальным по Парето?
7. В каком случае распределение называют оптимальным по Парето?
8. Докажите, что любое оптимальное по Парето распределение является также слабо-оптимальным по Парето.
9. Почему любое распределение из области в форме линзы (расположенной выше γ^A и ниже γ^B) на рис. 3.1.1 является более предпочтительным, чем исходное распределение ω, для обоих потребителей?
10. Почему распределения $(\omega_1, \omega_2, 0, 0)$ и $(0, 0, \omega_1, \omega_2)$ оптимальны по Парето?
11. Что называют контрактной кривой?
12. Какие точки на рис. 3.1.1 отвечают возможным окончательным распределениям при заданном распределении начальных запасов ω?
13. Что выступает в роли дохода потребителя B в задаче (3.2.3)?
14. Приведите определение равновесия Вальраса в модели чистого обмена.
15. Используя (3.1.1), докажите, что уравнения (3.2.6) и (3.2.7) задают одну и ту же прямую в коробке Эджуорта.
16. В чем геометрический смысл равновесия Вальраса?
17. Сформулируйте закон Вальраса (для двух и для n рынков).
18. Докажите справедливость тождества (3.2.10).
19. Найдите равновесие Вальраса в примере 3.2.1, используя не первое, а второе условие из (3.2.5).
20. Сформулируйте первую теорему экономики благосостояния.
21. Сформулируйте вторую теорему экономики благосостояния. Предложите способ доказательства этой теоремы, используя рис. 3.1.2.

Библиография

[1] Хэл Р.Вэриан. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М., ЮНИТИ, 1997 (перевод книги Hal R.Varian. Intermediate Microeconomics (A Modern Approach, 3$^{\text{rd}}$ Edition) W.W.Norton & Company, 1992).

[2] Л.Г.Симкина, Б.В.Корнейчук. Микроэкономика (2-е издание). СПб., Питер, 2003.

[3] Л. С. Тарасевич, П. И. Гребенников, А. И. Леусский. Микроэкономика. М., Юрайт-Издат, 2006.

[4] A.Mas-Colell, M.D.Winston, J.R.Green. Microeconomic Theory. Oxford Univ. Press, 1995.

[5] Hal R.Varian. Microeconomic Analysis, 3rd Ed. W.W.Norton & Company, 1992.

[6] В.М.Гальперин, С.М.Игнатьев, В.И.Моргунов. Микроэкономика. СПб., Экономическая школа, 1998.