Практикум по теме 1

Методические указания по выполнению практикума.

Целью практикума является более глубокое усвоение материала контента темы 1, а также развитие следующих умений и навыков:

- Построение кривых безразличия по заданной функции полезности потребителя, вычисление предельных полезностей и предельной нормы замещения MRS;
- Построение функции спроса потребителя для различных типов предпочтений;
- Проведение сравнительно-статического анализа (анализа на чувствительность) в модели потребительского выбора, построение кривой "доход–потребление", "цена–потребление" и кривой спроса.

Перед решением заданий практикума рекомендуется внимательно изучить материал контента темы 1 и провести самостоятельный анализ всех разобранных примеров.

Решение типовых задач

ТЗ 1.1.Построим функцию спроса в случае предпочтений Кобба-Дугласа $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$, $c > 0$, $d > 0$.

Решение: Нетрудно проверить, что оптимальный потребительский набор лежит на бюджетной линии, поэтому задача примет вид:

$$\begin{cases} u(x^*) = \max x_1^c x_2^d \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m,\ x \in R_+^2 \end{cases}$$

Используем функцию Лагранжа (см. § 1.3)

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^c x_2^d - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

и необходимые условия оптимальности (теорема 1.3.1):

$$\begin{cases} cx_1^{c-1}x_2^d - \lambda p_1 x_1 = 0 \\ dx_1^c x_2^{d-1} - \lambda p_2 x_2 = 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 - m = 0. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на dx_1, а второе – на cx_2, получим:

$$cdx_1^c x_2^d = \lambda p_1 dx_1,$$

$$c d x_1^c x_2^d = \lambda p_2 c x_2.$$

Поэтому компоненты x_1 и x_2 оптимального потребительского набора связаны прямо пропорциональной зависимостью:

$$x_2 = \frac{p_1 d}{p_2 c} x_1.$$

Поставим последнее выражение в уравнение бюджетной линии:

$$p_1 x_1 + p_2 \cdot \frac{p_1 d}{p_2 c} x_2 = m \Leftrightarrow x_1 = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{m}{p_1}.$$

Окончательно функция спроса для предпочтений Кобба-Дугласа $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$ примет вид:

$$\begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, m) = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{m}{p_1} \\ \\ x_2^*(p_1, p_2, m) = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{m}{p_2} \end{cases}$$

ТЗ 1.2. Построим функцию спроса в случае квазилинейных предпочтений $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$.

Решение: Нетрудно проверить, что оптимальный потребительский набор лежит на бюджетной линии, поэтому задача примет вид:

$$\begin{cases} u(x^*) = \max(\sqrt{x_1} + x_2) \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

Выразим x_2 из ограничения:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1, \;\; x_1 \in [0, \frac{m}{p_1}]$$

и подставим в целевую функцию:

$$u(x_1) = \sqrt{x_1} + \frac{1}{p_2}(m - p_1 x_1).$$

Отметим,что

$$u'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{p_1}{p_2},$$

и $x_1 = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$ – точка максимума функции $u(x_1)$.

Полученная задача поиска наибольшего значения дифференцируемой функции $u(x_1)$ одной переменной на отрезке $[0, \frac{m}{p_1}]$ имеет следующее решение:

- $u_{max} = u\left(\frac{m}{p_1}\right)$, если $\frac{m}{p_1} \leq \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$
- $u_{max} = u\left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$, если $\frac{m}{p_1} > \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$

Окончательно функция спроса для квазилинейных предпочтений $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ примет вид:

- $\begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} \\ \\ x_2^*(p_1, p_2, m) = 0 \end{cases}$, если $m \leq \frac{p_2^2}{4p_1}$
- $\begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, m) = (\frac{p_2}{2p_1})^2 \\ \\ x_2^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1} \end{cases}$, если $m > \frac{p_2^2}{4p_1}$

<u>ТЗ 1.3.</u> Пусть $\bar{p}_1 = 2$ и $\bar{p}_2 = 4$ – фиксированные цены товаров, $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ – функция полезности потребителя. Зададим аналитически и построим кривую "доход–потребление", а также кривые Энгеля, используя функцию спроса, выведенную в ТЗ 1.2.

<u>Решение:</u> Отметим,что "пороговое" значение дохода $\bar{m} = \frac{\bar{p}_2^2}{4\bar{p}_1} = 2$.

Если $0 \leq m \leq 2$ (см. участки OA кривых на рис. 1.1):

$$\begin{cases} x_1^*(m) = \frac{m}{\bar{p}_1} = \frac{m}{2} \\ x_2^*(m) = 0. \end{cases}$$

Если $m > 2$:

$$\begin{cases} x_1^*(m) = (\frac{\bar{p}_2}{2\bar{p}_1})^2 = 1 \\ x_2^*(m) = \frac{m}{\bar{p}_2} - \frac{\bar{p}_2}{4\bar{p}_1} = \frac{m}{4} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

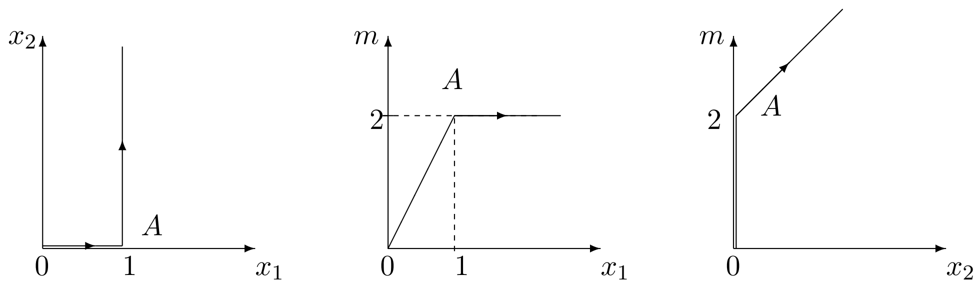

Рис. 1.1 Кривая "доход – потребление" и кривые Энгеля для предпочтений $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$, $\bar{p}_1 = 2$, $\bar{p}_2 = 4$.

<u>ТЗ 1.4.</u> Пусть $\bar{p}_2 = 6$ – фиксированная цена товара 2, $m = 30$ – фиксированное значение дохода потребителя,

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 = x_1 + 2x_2$$

– линейная функция полезности. Зададим аналитически и построим кривую "цена p_1 – потребление" и кривую спроса на товар 1.

<u>Решение:</u> Используем функцию спроса в случае совершенных заменителей (см. § 1.2):

- если $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{\bar{p}_2}$ (то есть $\frac{1}{2} > \frac{p_1}{6}$), то $x_1^* = \frac{m}{p_1} = \frac{30}{p_1}$, $x_2^* = 0$.
- если $\frac{a}{b} < \frac{p_1}{\bar{p}_2}$ (то есть $\frac{1}{2} < \frac{p_1}{6}$), то $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{m}{\bar{p}_2} = 5$.
- если $\frac{a}{b} = \frac{p_1}{\bar{p}_2}$ (то есть $\frac{1}{2} = \frac{p_1}{6}$), то любая точка бюджетной линии является оптимальным потребительским набором.

Таким образом,

- если $0 \leq p_1 < 3 : x_1^* = \frac{30}{p_1}, x_2^* = 0$;
- $p_1 = 3 :\ x_2^* = 5 - \frac{x_1^*}{2}$, $x_1^* \in [0, 10]$ (см. участки AB кривых на рис. 1.2);
- при $p_1 > 3 :\ x_1^* = 0, x_2^* = 5$.

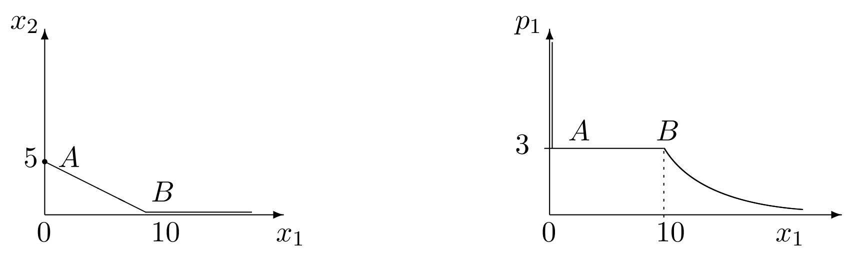

Рис. 1.2. Кривая "цена p_1 – потребление" и кривая спроса $x_1(p_1)$ для линейной функции полезности $u = x_1 + 2x_1$, $\bar{p}_2 = 6$, $m = 30$.

Задания практикума

В заданиях 1.1 – 1.12 по заданной функции полезности нарисуйте карту безразличия, найдите предельные полезности MU_1 и MU_2 и MRS:

1.1. $\upsilon(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$

1.2. $\upsilon(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$

1.3. $\upsilon(x) = 2x_1$

1.4. $\upsilon(x_1, x_2) = 2\ln x_1 + x_2$

1.5. $\upsilon(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$

1.6. $\upsilon(x_1, x_2) = x_1^{2/3} x_2^{1/3}$

1.7. $\upsilon(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$

1.8. $\upsilon(x_1, x_2) = 2x_1^2\sqrt{x_2}$

1.9. $\upsilon(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$

1.10. $\upsilon(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

1.11. $\upsilon(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$

1.12. $\upsilon(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$

1.13. Отвар готовится из ромашки и шалфея. Максимальный терапевтический эффект для рассматриваемого потребителя достигается, если травы смешиваются в пропорции 2 к 3.

- какая из трав в потребительском наборе $\overline{x} = (6, 8)$ является безразличным благом?
- постройте кривую безразличия через $\overline{x}$, определите MRS в каждой точке этой кривой;
- постройте карту безразличия и задайте предпочтения потребителя на множестве R_+^2 с помощью функции полезности;
- сравните потребительские наборы (10,6) и (4,12).

1.14. Потребитель всегда кладёт в чашку кофе два пакетика сахара. Цена чашки кофе в бистро равна p_1, пакетика сахара — p_2, потребитель может потратить на заказ не более m рублей. Спрогнозируйте заказ потребителя (для всех возможных p_1, p_2, и m).

1.15. В какой пропорции распределяет свой доход потребитель на приобретение товаров 1 и 2, если функция полезности, представляющая его предпочтения, имеет вид:

- $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$;
- $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{4}{5}} x_2^{\frac{1}{5}}$;
- $u(x_1, x_2) = 3\ln x_1 + 4\ln x_2$;
- $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2^3}$.

В заданиях 1.16–1.26 найдите оптимальный потребительский набор:

1.16. $p_1 = 2, \ p_2 = 1, \ m = 40, \ u(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2.$

1.17. $p_1 = 2, \ p_2 = 3, \ m = 36, \ u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$

1.18. $p_1 = 6, \ p_2 = 8, \ m = 120, \ u(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2.$

1.19. $p_1 = 1, \ p_2 = 2, \ m = 24, \ u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2.$

1.20. $p_1 = 3, \ p_2 = 4, \ m = 30, \ u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}.$

1.21. $p_1 = 4, \ p_2 = 6, \ m = 48, \ u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, 3x_2\}.$

1.22. $p_1 = 3, \ p_2 = 4, \ m = 30, \ u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3.$

1.23. $p_1 = 2, \ p_2 = 1, \ m = 24, \ u(x_1, x_2) = 2\ln x_1 + 3\ln x_2.$

1.24. $p_1 = 2, \ p_2 = 3, \ m = 24, \ u(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}.$

1.25. $p_1 = 2, \ p_2 = 4, \ m = 1, \ u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$

1.26. $p_1 = 2, \ p_2 = 4, \ m = 6, \ u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$

1.27. Независимо от уровня дохода m потребитель приобретает только два товара. Могут ли оба этих товара относиться к группе товаров низшей категории?

1.28. Найдите функции спроса $x_1(p_1)$ и $x_2(p_2)$ в случае предпочтений, представленных функцией полезности $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$.

В заданиях 1.29–1.32 по заданной функции полезности при $m = 24, \ p_1 = 3, \ p_2 = 4$ найдите оптимальные потребительские наборы, а также задайте аналитически и нарисуйте кривые "доход–потребление", кривые Энгеля, кривые "цена p_1–потребление", "цена p_2–потребление" и соответствующие кривые спроса:

1.29. $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2.$

1.30. $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$

1.31. $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, 3x_2\}.$

1.32. $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2.$

1.33. При $m = 80$, $p_1 = 4$, $p_2 = 5$, $p_3 = 2$ найдите оптимальный потребительский набор $x^* \in R^3_+$, а также нарисуйте кривые Энгеля (для товара 1), кривые спроса $x_1(p_1)$ в случае следующих функций полезности потребителя:

- $u(x_1, x_2, x_3) = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3$;
- $u(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 5x_2 + 4x_3$;
- $u(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 10x_2 + 4x_3$;
- $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$.

1.34. Пусть функция полезности потребителя $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, доход $m = 216$, цена товара 1 меняется от исходного значения p_1^o до конечного значения p_1^T.

Разложите общий эффект изменения спроса (на товар 1) на эффект замещения и эффект дохода при следующих значениях параметров модели:

- $p_2 = 3$, $p_1^o = 3$, $p_1^T = 2$;
- $p_2 = 3$, $p_1^o = 2$, $p_1^T = 4$;
- $p_2 = 2$, $p_1^o = 2$, $p_1^T = 3$.