

Санкт-Петербургский государственный университет

Г.И.КУРБАТОВА, В.Б.ФИЛИППОВ

# **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

**ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ДВИЖУЩИХСЯ СПЛОШНЫХ СРЕД**

*Учебное пособие*

Издательство С.-Петербургского университета  
2002

УДК 512.972

ББК 22.25

К 93

## Р е ц е н з е н т ы:

доктор физ.-мат.наук В.А.Павловский

(С.-Петерб. морск. техн. ун-т),

доктор физ.-мат.наук, чл.-корр.РАН В.Г.Дулов

(С.-Петерб. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению**Редакционно-издательского совета**Санкт-Петербургского университета***Курбатова Г.И., Филиппов В.Б.**

К 93 Элементы тензорного исчисления. Основы моделирования движущихся сплошных сред: Учебное пособие. — СПб., Изд-во С.-Петербургского университета. 2002. — 251 с.  
ISBN 5-288-02105-8

Изложен аппарат векторной и тензорной алгебры и анализа, необходимый в физике и механике сплошных сред. Анализ векторных и тензорных полей проведен с использованием многомерного дифференциального исчисления, опирающегося на аппарат тензорной алгебры. Тензоры определены как полилинейные отображения. Наряду с прямым тензорным исчислением рассмотрены положения, зависящие от выбора системы координат. Принятая форма изложения и многочисленные примеры позволят читателю, владеющему основами алгебры и математического анализа, освоить элементы современной полилинейной алгебры и тензорного анализа, необходимые в задачах механики и физики.

Учебное пособие адресовано студентам, аспирантам, преподавателям и научным работникам, специализирующимся в механике, физике и прикладной математике.

ББК 22.25

© Г.И.Курбатова, В.Б.Филиппов, 2002

© А.А.Вакуленко, Дополнение, 2002

© Издательство С.-Петербургского  
университета, 2002

ISBN 5-288-02105-8

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Фундаментальные понятия механики сплошных сред — деформация, скорость деформации, напряжение — являются объективно сложными. Помощь в их формализации оказывает аппарат тензорного исчисления, он позволяет представить операции с этими характеристиками кратко и геометрически наглядно.

Часто в книгах по механике сплошных сред в целях “разумной независимости” необходимые сведения из тензорного исчисления излагаются параллельно основному материалу. Нам представляется, что удобнее выделить их в отдельную часть. Овладение аппаратом тензорного исчисления требует определенных усилий, поэтому возможен вопрос: нельзя ли без него обойтись? Классические результаты можно изложить, не прибегая к понятию тензора, правда, изложение при этом будет громоздким и малонаглядным.

При создании новых реологических моделей и при постановке современных задач аппарат тензорного исчисления незаменим. Выбор реологической модели среды базируется на экспериментальных данных, которые обычно удается получить только для частных вариантов “геометрии”. Обобщение на произвольную “геометрию” — задача тензорного исчисления.

При изложении материала обычно используются два подхода — *компонентный* и *бескомпонентный*, в котором тензор отождествляется с полилинейным отображением. Идеология второго подхода достаточно последовательно представлена в книге А.А.Вакуленко [5].

Заметим, что первоначально понятие тензора было введено в механике (слово *tensor* произошло от слова *tension* — натяжение), однако дальнейшее развитие оно получило в теории линейных (векторных) пространств.

Отбор материала и форма изложения определялись задачами цикла учебных пособий, объединенных темой моделирования движущихся сплошных сред, например [12].

Положения тензорной алгебры и анализа приведены преимущественно в векторной (бескомпонентной) форме. Чтобы материал был доступен более широкому кругу читателей, выбирались подходы, не использующие теорию многообразий и внешние формы. Основанное на них изложение общих вопросов механики и геометрии содержится, например, в книгах В.И.Арнольда [2], Б.Ф.Шутца [22].

Отобранный материал распределен следующим образом. В §1 напоминаются сведения из векторного исчисления. В §2–7 приведены основные положения теории линейных операторов в трехмерном евклидовом пространстве, под словом *тензор* в этих параграфах понимается линейный оператор. Необходимые сведения о билинейных функциях содержатся в §8; §9 посвящен общей теории тензоров любого типа и ранга. В §10 представлена компонентная форма тензорной алгебры в произвольном базисе. §11–14 содержат положения тензорного анализа в трехмерном евклидовом аффинном пространстве. Требования трехмерности и евклидовости позволяют не привлекать аппарат внешних форм, так как в этом случае внешние

формы любого порядка отождествляются с векторами или с числами. Аффинность пространства позволяет говорить о векторе, соединяющем две точки, и трактовать дифференциал как линейную часть приращения, таким образом, рассмотрение только аффинных пространств позволяет обойтись без теории многообразий.

В §15–17 приведена компонентная форма дифференциальных операций в ортогональных криволинейных системах координат.

Моделирование движущихся сплошных сред проводится преимущественно в пространственных (эйлеровых) переменных, а наиболее употребительными являются декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат, поэтому представленного материала оказывается достаточно при постановке и решении широкого круга задач.

Наш приятный долг — поблагодарить профессоров Б.В.Филиппова и Ю.М.Даля за инициирование настоящей работы и постоянное внимание, наших рецензентов — чл.-корр. РАН В.Г.Дулова и профессора В.А.Павловского — за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Мы очень признательны профессору А.А.Вакуленко за плодотворное обсуждение многих затронутых в работе вопросов и за согласие предоставить для учебного пособия Дополнение, написанное по нашей просьбе. Дополнение посвящено использованию тензорного исчисления при создании реологических моделей сплошных сред. Эта тема важна не только в теории упругости и пластичности, но и при моделировании турбулентных течений, движущихся неоднородных сред (смесей, суспензий, кавитирующих жидкостей), а также во многих других разделах механики и физики.

Помощь в техническом оформлении нам оказали Н.А.Никольская и И.И.Рыжакова, за что мы им искренне благодарны.

### Предисловие ко второму изданию

Во втором издании исправлены замеченные опечатки и добавлен §18, в котором методами линейной алгебры получен общий вид инвариантных отображений симметричных линейных операторов. Схема решения этой задачи методами теории групп содержится в Дополнении, написанном в 1998 г. выдающимся математиком и механиком А.А.Вакуленко, которое стало одной из последних его работ.

Санкт-Петербург, май 2002 г. *Г.И.Курбатова, В.Б.Филиппов*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Замечание о символах .....	5
§1. Векторная алгебра. Операции со скалярными и векторными полями .....	6
1. Линейное пространство; аффинное пространство; базис; координаты; евклидово пространство .....	6
2. Алгебраические операции со свободными векторами в трехмерном евклидовом пространстве .....	10
3. Операции со скалярными и векторными полями .....	14
4. Скалярные функции векторного аргумента .....	17
5. Векторные функции векторного аргумента .....	22
6. Интегральные теоремы векторного анализа .....	28
§2. Определение тензора. Специальные тензоры .....	31
§3. Элементы тензорной алгебры .....	34
1. Равенство тензоров .....	34
2. Сумма (разность) тензоров .....	34
3. Умножение тензора на число .....	35
4. Композиция (внутреннее произведение) тензоров .....	35
5. Вырожденный тензор .....	37
6. Обратный тензор .....	37
7. Сопряженный (транспонированный) тензор .....	39
8. Симметричный (самосопряженный) тензор .....	40
9. Антисимметричный тензор .....	41
10. Представление произвольного тензора в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров .....	42
11. Ортогональный тензор .....	43
12. Ориентированный объем .....	44
13. Определитель (детерминант) тензора .....	46
14. Норма тензора .....	49
15. Изотропный тензор .....	51
16. Векторное произведение тензора и постоянного вектора .....	52
17. Сопутствующий вектор тензора .....	52
§4. Матричное представление тензоров .....	53

§5. Компонентная форма тензорной алгебры .....	59
§6. Собственные значения, собственные векторы, главные оси и скалярные инварианты тензора .....	69
1. Определение собственных значений тензора .....	69
2. Свертка тензоров .....	71
3. След тензора .....	72
4. Связь величин собственных значений тензора с его свойствами .....	73
5. Определение главных осей тензора .....	75
6. Теорема Гамильтона–Кэли .....	79
§7. Различные представления тензора. Геометрическая интерпретация симметричных, антисимметричных и ортогональных тензоров .....	81
1. Полярное разложение тензора .....	81
2. Разложение тензора на симметричный и антисимметричный; девиатор .....	84
3. Тензорная поверхность .....	86
4. Геометрическая интерпретация симметричного тензора .....	89
5. Геометрическая интерпретация ортогонального тензора .....	91
6. Связь ортогонального и антисимметричного тензоров .....	94
§8. Сопряженное пространство; билинейные функции; скалярное произведение .....	97
1. Линейные функции. Сопряженное пространство. Взаимный (дуальный) базис .....	97
2. Декартово произведение линейных пространств. Билинейные функции; квадратичные формы .....	100
3. Скалярное произведение .....	109
§9. Общее определение тензора. Метрический тензор .....	112
1. Полилинейные отображения; общее определение тензора, понятия типа и ранга тензора .....	113
2. Метрический тензор. Связь билинейных функций и линейных операторов в евклидовых пространствах .....	123
§10. Ковариантный и контравариантный базисы; разложение вектора и тензор; матрицы тензора .....	128

1. Ковариантный базис. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора .....	128
2. Четыре варианта диадных базисов в евклидовом пространстве тензоров второго ранга. Матрицы линейного оператора .....	134
3. Компонентное задание билинейного оператора (тензора третьего ранга) .....	142
4. Компонентная форма векторного произведения векторов в произвольном базисе .....	144
§11. Тензорное поле .....	147
§12. Дифференциал векторного поля .....	148
1. Дифференциал функции одной переменной .....	149
2. Дифференциал скалярной функции векторного аргумента...	150
3. Дифференциал векторной функции векторного аргумента...	151
4. Поле дифференциала .....	154
5. Приближение гладкой векторной функции с помощью дифференциала .....	155
§13. Дивергенция тензорного поля. Обобщение теоремы Гаусса–Остроградского .....	158
1. Дивергенция тензорного поля .....	159
2. Компонентная форма дивергенции тензорного поля в декартовом базисе .....	161
3. Обобщение теоремы Гаусса–Остроградского .....	163
§14. Дифференциальные операции с тензорными полями .....	164
§15. Ортогональные криволинейные системы координат .....	171
§16. Дифференциальные операции в ортогональных криволинейных системах координат .....	177
§17. Модель движущейся сплошной среды в цилиндрической и сферической системах координат .....	182
§18. Инвариантные отображения линейных операторов .....	195
Литература .....	213
<i>Вакуленко А.А.</i> Дополнение. Тензорные функции .....	215
1. Общее понятие тензорной функции .....	215
2. Первые примеры .....	216

3. Еще о тождестве Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен .....	217
4. Элементарные аналитические тензорные функции .....	221
5. Группы симметрии тензоров и тензорных функций .....	225
6. Некоторые основные теоремы о группах симметрии тензорных функций .....	231
7. Функции на множестве симметричных тензоров второго ранга .....	233
8. Связь антисимметричных и ортогональных тензоров второго ранга .....	237
Литература .....	240
Предметный указатель .....	241