

Санкт-Петербургский государственный университет

Г.И.КУРБАТОВА, В.Б.ФИЛИПОВ

КИНЕМАТИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

**ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДВИЖУЩИХСЯ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Издательство С.-Петербургского университета
1999

УДК 512.972

ББК 22.25

К93

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физ.-мат.наук В.А.Павловский
(С.-Петербур. морск. тех. ун-т),

доктор физ.-мат.наук, чл.-корр.РАН В.Г.Дулов
(С.-Петербур.ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского университета*

Курбатова Г.И., Филиппов В.Б.

К93 Кинематика сплошных сред. — СПб., Изд-во С.-Петербур-
бургского университета. 1999. — 213 с.

В монографии предложен современный математический подход к моделированию движения и деформации сплошных сред. Кинематика деформируемой среды и нелинейная теория деформации изложены на языке аффинных пространств и гладких отображений. Приведены математически корректные определения основных понятий и характеристик деформируемых движущихся сред, среди которых деформация, скорость деформаций, совместность деформаций, материальная производная, объемная и массовая плотности распределения характеристик среды, скорость их изменения в различных областях.

Книга адресована научным работникам, студентам, аспирантам и преподавателям, занимающимся механикой, физикой и прикладной математикой.

ББК 22.25

© Г.И.Курбатова, В.Б.Филиппов, 1999

© Издательство С.-Петербур-
бургского университета, 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография является продолжением работ по теории моделирования движущихся сплошных сред [11,12], она посвящена движению и деформации, т.е. кинематике сплошных сред. Этот раздел механики во многом может рассматриваться как часть математики, поэтому по мере ее развития он приобретает все более элегантные формы. Подобно геометрии, здесь возможно аксиоматическое построение теории на основе нескольких фундаментальных гипотез. Сравнительно небольшой, этот раздел механики играет важную роль, так как именно здесь вводятся основные понятия и математический аппарат, используемый как в теории упругости, так и в гидромеханике, в газовой динамике, в реологии и в любом другом разделе механики. Мы стремились изложить кинематику сплошных сред на языке естественного для нее математического аппарата, не поднимая, однако, планку выше уровня изложения математических дисциплин на отделениях механики математико–механических факультетов университетов. Результатом этого компромисса явилось изложение кинематики на языке аффинных пространств и гладких отображений. Предполагается знакомство читателя с векторными алгеброй и анализом, необходимые сведения из которых составили материал учебного пособия [12], ссылки на него облегчили текст.

В кинематике деформируемых сред вводятся такие основные понятия, как: сплошная среда; материальная частица; объемная и массовая плотности распределения характеристик среды; скорость их изменения в материальных частицах и областях, а также в точках и областях пространства; локальные деформация и поворот среды; локальные скорость деформации и скорость поворота. Все эти понятия никак не связаны с базисом. Поэтому их математические характеристики, такие как: отображения, дифференциалы отображений, поле скорости, материальная производная, тензоры деформации и поворота, тензоры скоростей деформации и скорости поворота — естественнее всего определить инвариантным образом. При этом все положения теории становятся прозрачнее и устраняются трудности, связанные с введением того или иного базиса. Следует заметить, что решение конкретной задачи чаще всего требует введения системы координат. Поэтому наряду с инвариантной формой приведены выражения компонент всех характеристик в декартовой системе координат и указаны ссылки, по которым можно найти эти компоненты в других системах координат. Материал изложен подробно и таким образом, чтобы монография могла использоваться для самостоятельного изучения.

Практика преподавания механики сплошных сред позволила выявить ряд непростых в кинематике вопросов, на которые мы приве-

ли обстоятельные ответы. В частности, объясняется, почему материальная частица сплошной среды не может обладать конечной массой, конечной энергией, но обладает конечной скоростью; почему деформация материального отрезка, трансформирующегося в общем случае в кривую, может быть исследована с помощью линейных отображений, задающих преобразование вектора в вектор (в подтверждение актуальности этого вопроса, сошлемся на выражение “кривой вектор”, встречающееся и поныне); почему неверно часто приводимое утверждение “для существования обратного отображения необходимо и достаточно, чтобы якобиан прямого отображения был отличен от нуля во всех точках...”; как связаны тензор поворота и вектор поворота в общем случае и почему вектор поворота не характеризует поворот среды при конечных деформациях; почему вектор вихря скорости чаще всего нельзя ассоциировать с угловой скоростью вращения жидкости; как связаны тензор скоростей деформации и материальная производная от метрического тензора; в чем смысл условий совместности деформаций. Математические формулировки основных положений теории деформации и кинематики призваны помочь читателю глубже понять механику сплошных сред. Для ряда важных понятий (материальная производная, деформация, совместность деформации, скорость деформации) наряду с обычно используемыми приведены нетрадиционные определения, более удобные с математической точки зрения.

Мы сознательно пошли в некоторых случаях на использование громоздких обозначений, так как это позволило избежать двусмысленности, что при первом знакомстве с предметом избавит читателя от возможных ошибок. Например, равенство, связывающее материальную производную от якобиана J с дивергенцией поля скорости, обычно записывается в изящной форме $\dot{J} = J \operatorname{div} \bar{v}$, в которой, однако, расстановка аргументов сама по себе не очевидна. Поэтому отдано предпочтение громоздкой, но не допускающей разночтений записи (II.3.3):

$$\left. \frac{d' J(a, t, t + \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\lambda} = J(a, t, t + \lambda) \operatorname{div}_{\xi} \bar{v}_{(t+\lambda)},$$

ξ — образ точки a при отображении $R_{t,t+\lambda}: D_t \rightarrow D_{t+\lambda}$, $J(a, t, t + \lambda)$ — якобиан этого отображения, \bar{v}_t — мгновенное поле скорости, $\lambda \in [0, \tau]$.

В монографии решения конкретных задач носят иллюстративный характер. Рекомендуем двухтомник “Механика сплошных сред в задачах” [15], написанный коллективом авторов Московского государственного университета, в нем приведено более 1000 задач с решениями по всем основным разделам механики сплошных сред. Подробная библиография отсутствует, так как в большинстве случаев ее можно найти в цитируемых работах.

Мы признательны всем нашим учителям, коллегам и оппонентам, среди которых особенно хотели бы поблагодарить профессоров Санкт-Петербургского государственного университета А.А.Вакуленко и Б.В.Филиппова. Помощь в техническом оформлении нам оказали И.И.Рыжакова, С.Ю.Веселков и А.В.Дорош, за что им огромное спасибо.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Общие понятия	
§1. Модель сплошной среды	9
§2. Конфигурация тела, закон движения, траектория, поле скорости	21
§3. Способы описания процессов в сплошных средах; материальная и локальная производные	35
Глава 2. Характеристики движения и деформации твердых тел	
§1. Определение деформации твердого тела	51
§2. Тензоры деформации (квадратичные формы)	58
§3. Тензоры деформации Коши—Грина и Грина	65
§4. Тензор кратности удлинений, тензор поворота и вектор поворота	68
§5. Деформация как изменение метрики	78
§6. Деформационные характеристики в актуальной конфигурации	81
§7. Геометрический смысл компонент тензора деформации	89
§8. Связь свойств отображения $R:D \rightarrow \Omega$ со свойствами якобиана; коэффициент объемного расширения	96
§9. Свойство отображения $R:D \rightarrow \Omega$ для модели абсолютно твердого тела	106
§10. Поле перемещений	108
§11. Приближение геометрически линейных задач	114
§12. Уравнения совместности деформаций	123
Глава 3. Деформационные характеристики движущихся жидких сред	
§1. Деформация и скорость деформации	138
§2. Связь тензора скоростей деформации с дифференциалом мгновенного поля скорости	144
§3. Связь дивергенции мгновенного поля скорости с якобианом отображения $R_{t,t+\tau}:D_t \rightarrow D_{t+\tau}$	150
§4. Поле скорости абсолютно твердого тела	160
§5. Теорема Коши—Гельмгольца	164
§6. Кинематика переноса в движущихся средах	172
§7. Закон сохранения массы	177
§8. О задаче восстановления поля скорости по полю вихря и дивергенции	183

Приложение	190
Литература	204
Предметный указатель	206
Оглавление	212