

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО КУРСУ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Задачи с закрепленными концами. Для интегрального функционала:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

при условиях  $y(a) = A, y(b) = B$  решить следующие задачи:

1. Найти экстремаль.
2. Проверить условие Якоби включения в центральное поле экстремалей.
3. Проверить достаточные условия Вейерштрасса и Лежандра.

**Вариант 1.**  $F = e^x (y^2 + \frac{1}{2}y'^2), \quad a = 0, b = 1, \quad A = 1, B = e.$

**Вариант 2.**  $F = e^y y'^2, \quad a = 0, b = 1, \quad A = 0, B = \ln(4).$

**Вариант 3.**  $F = x^3/y'^2, \quad a = 1, b = 2, \quad A = 1, B = 4.$

**Вариант 4.**  $F = 1/y', \quad a = 0, b = \alpha, \quad A = 0, B = \beta.$

**Вариант 5.**  $F = (1+x)y'^2, \quad a = 0, b = 1, \quad A = 0, B = 1.$

**Вариант 6.**  $F = y^2 - y'^2, \quad a = 0, b = \pi/2, \quad A = 1, B = 1.$

**Вариант 7.**  $F = y'(1+x^2y'), \quad a = -1, b = 2, \quad A = 1, B = 4.$

**Вариант 8.**  $F = y'^3 + y'^2, \quad a = -1, b = 1, \quad A = -1, B = 3.$

**Вариант 9.**  $F = y^2 - y'^2, \quad a = 0, b = \alpha, \quad A = 0, B = 0.$

**Вариант 10.**  $F = y'^2 - y^2, \quad a = 0, b = \pi, \quad A = 1, B = -1.$

**Вариант 11.**  $F = y'^2 - y^2, \quad a = 0, b = \pi/4, \quad A = 1, B = \sqrt{2}/2.$

**Вариант 12.**  $F = y'^2 + x, \quad a = 0, b = 1, \quad A = 1, B = 2.$

**Вариант 13.**  $F = xy' + e^y, \quad a = 0, b = 1, \quad A = 1, B = \alpha.$

**Вариант 14.**  $F = 2e^y - y^2, \quad a = 0, b = 1, \quad A = 1, B = e.$

**Вариант 15.**  $F = y'^2 + xy', \quad a = 0, b = 2, \quad A = 1, B = -1.$

2. Задачи со свободными концами.

**Вариант 1.**  $I(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \psi(x, y) = y + x + 1.$

**Вариант 2.**  $I(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \psi(x, y) = y - 2/(1-x).$

**Вариант 3.**  $I(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(0) = 0, \psi(x, y) = y - 1/x^2.$

**Вариант 4.**  $I(y) = \int_0^{x_1} (y'^2 + x^2) dx, \quad y(0) = 0, \psi(x, y) = y - 1.$

**Вариант 5.**  $I(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(0) = 1, \psi(x, y) = y - x + 1.$

**Вариант 6.** Найти минимальное расстояние от точки  $(-1, 5)$  до параболы  $x = y^2$ .

**Вариант 7.** Найти минимальное расстояние от точки  $(1, 0)$  до эллипса  $4x^2 + 9y^2 =$

36.

**Вариант 8.** Найти минимальное расстояние между точками параболы  $y = x^2$  и прямой  $x - y = 5$ .

**Вариант 9.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $x + y = 4$  и окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Вариант 10.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $y = 4$  и прямой  $y = 1$ .

**Вариант 11.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $x = -2$  и прямой  $x = 1$ .

**Вариант 12.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $y = 4$  и параболы  $y = x^2$ .

**Вариант 13.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $y = 0$  и параболы  $y = -x^2$ .

**Вариант 14.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $y = 0$  и параболы  $y = -x^2 - 1$ .

**Вариант 15.** Найти минимальное расстояние между точками прямой  $y = x$  и параболы  $y = -x^2$ .