

## **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

(направление «010900: Прикладные математика и физика», 4 курс, 8 семестр)

Составитель: к.ф.-м.н., доцент кафедры МЭКС Г. В. Кривовичев

### **Основная литература:**

1. Бахвалов Н. С., Корнев А. А., Чижонков Е. В. – Численные методы. Решения задач и упражнения. – М.: «Дрофа», 2009 г. 393 с. (Главы 2, 7, 9).
2. Вабищевич П. Н. – Вычислительные методы математической физики. Стационарные задачи. – М.: «Вузовская книга», 2008 г. 196 с.
3. Вабищевич П. Н. – Вычислительные методы математической физики. Нестационарные задачи. – М.: «Вузовская книга», 2008 г. 228 с.
4. Вержбицкий В. М. – Основы численных методов. – М.: «Высшая школа», 2002 г. 840 с. (Главы 2, 3, 17, 19, 20, 21).
5. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. – Приближенные методы математической физики. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004 г. 704 с.
6. Зализняк В. Е. – Основы вычислительной физики. Часть 1: Введение в конечно-разностные методы. – М.: «Техносфера», 2008 г. 224 с.
8. Калиткин Н. Н. – Численные методы. – М.: «Наука», 1978 г. 508 с. (Главы 9–13).
9. Киреев В. И., Пантелеев А. В. – Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004 г., 480 с. (Часть 4)
10. Петров И. Б., Лобанов А. И. – Лекции по вычислительной математике. – М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2006 г. 525 с. (Лекции 2, 10-13, 16-17).
11. Рябенский В.С. – Введение в вычислительную математику. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000 г. 296 с. Главы 4, 5, 9, 10, 11.
12. Самарский А. А., Гулин А. В. – Численные методы математической физики. – М.: «Научный мир», 2003 г. 316 с.
13. Самарский А. А., Николаев Е. С. – Методы решения сеточных уравнений. – М.: «Наука», 1978 г. 592 с.
14. Федоренко Р. П. – Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994 г. 528 с. (Часть 1, параграфы 11-14).
15. Яненко Н. Н. – Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967 г.

### Дополнительная литература:

1. Демченко В. В. Уравнения и системы уравнений с частными производными первого порядка. М.: МФТИ, 2004 г. 116 с
2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1972.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. - Аддитивные схемы для задач математической физики. - М.: Наука, 2001 г. 319 с.
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. – Вычислительная теплопередача. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009 г. 784 с. (Главы 4-6)
6. Самарский А. А., Попов Ю. П. – Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009 г. 424 с. (Главы 3, 5).

### Введение

Постановка краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Примеры: краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка; задача для уравнения переноса; задача для уравнения колебаний струны; задача для уравнения теплопроводности; задача Дирихле для уравнения Пуассона.

Общая схема решения задач численными методами, основанными на дискретизации. Сетка, сеточная функция, сужение, пространство сеточных функций, сеточные нормы, согласованность. Примеры сеточных норм и пространств сеточных функций. Сеточные операторы. Шаблон. Сеточный аналог дифференциального оператора.

Основная идея метода конечных разностей. Понятие о разностной схеме начально-краевой задачи.

### Глава 1. Методы построения разностных схем

1.1. Метод непосредственной разностной аппроксимации. Канонические сеточные операторы: правая, левая и центральная разностные производные. Разностные производные высших порядков. Частные разностные производные. Построение разностной схемы краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Аппроксимация граничных условий. Метод трехдиагональной прогонки. Условие устойчивости метода прогонки.

1.2. Интегро-интерполяционный метод (метод баланса). Понятие о консервативной разностной схеме. Применение интегральной записи законов сохранения для построения разностных схем. Построение консервативных разностных схем для уравнения теплопроводности в стационарном и нестационарном случаях.

1.3. Метод неопределенных коэффициентов. Аппроксимация дифференциальных операторов сеточными. Аппроксимация с порядком. Погрешность аппроксимации. Исследование свойств аппроксимации с помощью метода

дифференциального приближения. Порядки разностных аппроксимаций первой производной функции одного переменного. Аппроксимация частных производных. Задание разностной схемы на шаблоне как линейной комбинации значений искомой сеточной функции в его узлах. Фиксирование порядка аппроксимации. Применение метода неопределенных коэффициентов к построению разностных схем для уравнения переноса.

## **Глава 2. Проблема сходимости**

Определение сходимости решения разностной схемы к решению поставленной задачи. Сходимость с порядком. Достаточно ли обеспечить только аппроксимацию для сходимости? Пример применения трех трехточечных разностных схем для уравнения переноса как отрицательный ответ на поставленный вопрос.

2.1. Устойчивость. Общее определение устойчивости разностной схемы. Устойчивость двухслойных разностных схем по начальным данным. Метод фон Неймана. Спектральный признак устойчивости. Исследование разностных схем для уравнения переноса и системы уравнений с помощью метода фон Неймана. Критерий Куранта–Фридрихса–Леви. Равномерная устойчивость. Принцип максимума. Теорема Лакса–Филиппова–Рябенского.

## **Глава 3. Численное решение начально-краевых задач математической физики**

3.1. Уравнение переноса. Постановка задач для уравнения переноса. Разностные схемы на трехточечных и четырехточечных шаблонах. Исследование устойчивости разностных схем для уравнения переноса. Геометрическая интерпретация устойчивости по начальным условиям. Проблема расчета задач с разрывными решениями. Понятие о численной дисперсии. Искусственная вязкость, численная диссипация. Метод первого дифференциального приближения для исследования устойчивости.

3.2. Уравнение теплопроводности. Постановка задач для уравнения теплопроводности. Исследование устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности. Неявные схемы. Явная и неявная схемы для двумерного уравнения. Методы дробных шагов.

3.3. Уравнение колебаний струны. Постановка задач для уравнения колебаний струны. Явная разностная схема на пятиточечном шаблоне («крест»). Аппроксимация начальных и граничных условий. Метод фиктивной точки. Неявная разностная схема (на девятиточечном шаблоне).

## **Глава 4. Численное решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона**

Разностная схема на пятиточечном шаблоне. Устойчивость разностной схемы для уравнения Лапласа по граничным условиям. Сеточный принцип максимума. Нумерация узлов и структура матрицы. Итерационные методы — простых итераций, Якоби (Либмана), Гаусса — Зейделя. Метод матричной прогонки.