ЗАНЯТИЕ № 3. ОБОБЩЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ОТ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ

1. Используя уравнение Эйлера–Пуассона, найти экстремаль функционала:

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx,$$

при условии, что:

$$y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \ldots, y^{n-1}(a) = A_{n-1},$$

$$y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \ldots, y^{n-1}(b) = B_{n-1}.$$

1.1. $F = (y''(x))^2, \quad a = 0, b = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0.$

1.2. $F = (y''(x))^2 - 48y(x), \quad a = 0, b = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = -4,$ $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

1.3. $F = (y''(x))^2 + 3y(x)y'(x), \quad a = 0, b = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0,$ $y(1) = 2$, $y'(1) = 5$.

2. Используя систему уравнений Эйлера, найти экстремали функционала:

$$I(y_1, \ldots, y_n) = \int\limits_a^b F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))dx,$$

при условии, что:

$$y_1(a) = A_1, y_2(a) = A_2, \ldots, y_n(a) = A_n,$$

$$y_1(b) = B_1, y_2(b) = B_2, \ldots, y_n(b) = B_n.$$

2.1. $F = y_1'(x)y_2'(x) - y_1(x)y_2(x), \quad a = 0, b = \pi/2, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0,$ $y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1.$

2.2. $F = 12xy_1(x) + (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2 + 2y_2(x)y_3'(x) + 2y_3(x)y_2'(x),$ $a = 1, b = 2, \quad y_1(1) = 0, y_2(1) = 2, y_3(1) = 0, y_1(2) = 6, y_2(2) = 3, y_3(2) = 2.$

2.3. $F = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 - 2y_1(x)y_2(x), \quad a = 0, b = \pi/2, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1.$