

**Вопросы к экзамену по геометрии**  
**II семестр 2019–2020 уч. год**

1. Пересечение поверхности второго порядка с прямой, асимптотические направления.
2. Сопряженная диаметральная плоскость.
3. Касательная прямая и касательная плоскость к поверхности второго порядка. Связь касательной плоскости с прямолинейными образующими.
4. Определение вида и расположения поверхности второго порядка.
5. Пучок прямых на плоскости как модель проективной прямой.
6. Связка как модель проективной плоскости.
7. Однородные координаты точек на плоскости и лучей в связке.
8. Уравнение прямой на плоскости в однородных координатах. Координаты прямой.
9. Принцип двойственности на проективной плоскости. Параметрические уравнения прямой.
10. Теорема Дезарга.
11. Проективная система координат в связке и на проективной плоскости.
12. Выражение координат точки относительно “старой” системы координат через ее координаты относительно “новой” системы координат (случай согласованных троек).
13. Выражение координат точки относительно “старой” системы координат через ее координаты относительно “новой” системы координат (случай несогласованных троек).
14. Проективные преобразования. Лемма о проективных преобразованиях.
15. Проективные преобразования. Основная теорема о проективных преобразованиях.
16. Проективно-аффинные преобразования.
17. Проективная прямая. Двойное отношение четырех точек на прямой.
18. Кривые второго порядка на проективной плоскости.
19. Вектор-функция скалярного аргумента. Определение вектор-функции, предел, непрерывность.
20. Производная и дифференциал вектор-функции скалярного аргумента.
21. Координаты вектор-функции. Формула Тейлора. Интеграл. Годограф.
22. Частные производные и дифференциал вектор-функции от двух переменных.
23. Понятие кривой (топологическое отображение, элементарная кривая, простая кривая, общая кривая).
24. Регулярная кривая.
25. Особые точки регулярных плоских кривых. Лемма.
26. Теоремы об особых точках аналитических кривых.
27. Касательная к кривой.
28. Теорема о неявной функции и теоремы о регулярной элементарной кривой.
29. Касательная к кривой, заданной неявными уравнениями.
30. Соприкасающаяся плоскость кривой.
31. Уравнения соприкасающейся плоскости. Нормаль.
32. Соприкосновение кривых. Дискриминантная кривая.
33. Огибающая семейства кривых, зависящего от одного параметра.
34. Длина дуги кривой.
35. Формулы для длины дуги кривой. Естественная параметризация кривой.
36. Кривизна кривой (естественная параметризация). Механический смысл кривизны.
37. Кривизна кривой (произвольная параметризация).
38. Кривизна плоской кривой в полярных координатах.
39. Крочение кривой (естественная параметризация).
40. Крочение кривой (произвольная параметризация).
41. Формулы Френе. Уравнение кривой, отнесенное к осям естественного трехгранника.
42. Натуральные уравнения кривой.
43. Эволюта плоской кривой.

44. Радиус кривизны.
45. Эвольвента плоской кривой.
46. Элементарная поверхность. Простая поверхность. Общая поверхность.
47. Регулярная поверхность. Аналитическое задание поверхности.
48. Особые точки регулярной поверхности.
49. Касательная плоскость к поверхности.
50. Касательная плоскость к поверхности, заданной неявным уравнением. Нормаль к поверхности.
51. Огибающая семейства поверхностей, зависящего от одного или двух параметров.
52. Огибающая семейства плоскостей, зависящего от одного параметра.
53. Первая квадратичная форма поверхности. Длина кривой на поверхности.
54. Угол между кривыми на поверхности.
55. Площадь поверхности.
56. Конформные отображения.
57. Конформное отображение сферы на плоскость.
58. Вторая квадратичная форма поверхности.
59. Кривизна кривой, лежащей на поверхности.
60. Индикатриса кривизны.
61. Асимптотические направления. Асимптотические линии. Сопряженные направления.
62. Главные кривизны. Теорема Родрига.
63. Связь между главными кривизнами поверхности и нормальной кривизной. Уравнение для главных кривизн.
64. Средняя и гауссова кривизны.
65. Линейчатые поверхности.
66. Поверхности вращения.

## Определения

1. Определение вида и расположения поверхности второго порядка.
2. Пучок прямых как модель проективной прямой. Связка как модель проективной плоскости. Однородные координаты.
3. Проективная система координат. Связь координат в “старой” и “новой” системах координат.
4. Вектор-функция. Годограф. Координаты. Предел, непрерывность, дифференцируемость, формула Тейлора, интеграл.
5. Кривая, параметризация кривой. Гладкость, регулярность. Касательная к кривой, соприкасающаяся плоскость, нормаль и бинормаль, их нахождение.
6. Вычисление длины дуги кривой. Естественная параметризация.
7. Кривизна кривой и ее вычисление.
8. Кручение кривой и его вычисление.
9. Поверхность, регулярная поверхность. Касательная плоскость к поверхности, нормаль, их нахождение.
10. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины кривой на поверхности, угла между кривыми на поверхности, площади поверхности.
11. Вторая квадратичная форма поверхности. Вычисление кривизны кривой, лежащей на поверхности. Вид поверхности в окрестности точки на ней в зависимости от второй квадратичной формы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Незнание любого из последних одиннадцати вопросов равносильно неудовлетворительной оценке на экзамене.

## Задачи

### Проективная геометрия

1. Проективная система координат на проективной плоскости задана базисными прямыми  $a_1 = \{1 : 0 : 0\}$ ,  $a_2 = \{0 : 1 : 0\}$ ,  $a_3 = \{0 : 0 : 1\}$  и единичной прямой  $e = \{1 : 1 : 1\}$ .

а) Найти координаты точек  $F_1, F_2, F_3$  пересечения единичной прямой  $e$  с базисными прямыми.

б) Найти координаты прямых  $A_1F_1, A_2F_2, A_3F_3$ , где  $A_1, A_2, A_3$  — вершины базисного треугольника.

2. На проективной плоскости заданы четыре точки  $A = (1 : 1 : 2)$ ,  $B = (3 : -1 : 2)$ ,  $C = (11 : -1 : 10)$ ,  $D = (6 : 4 : 10)$ . Доказать, что эти точки лежат на одной прямой и найти двойное отношение  $(ABCD)$ .

3. Найти проективное преобразование проективно-аффинной плоскости, переводящее начало аффинной системы координат в точку  $(-7, 4)$ , несобственную точку  $Ox$  — в точку  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ , несобственную точку оси ординат — в точку  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$ , точку  $(1, 1)$  — в несобственную точку прямой  $x + y = 0$ .

4. В проективно-аффинном пространстве заданы своими координатами две точки  $A = (1 : 0 : -1 : 2)$  и  $B = (1 : -1 : 0 : -2)$ . Найти несобственную точку прямой  $AB$ .

### Дифференциальная геометрия

1. Движение электрона в постоянном магнитном поле определяется уравнением

$$\mathbf{r}'' = [\mathbf{r}', \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \text{const.}$$

Найти траекторию движения электрона.

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  вокруг оси  $Ox$  (катеноид).

3. Найти огибающую семейства окружностей, построенных как на диаметрах, на параллельных хордах некоторой окружности.

4. Найти эволюту, эвольвенту и радиус кривизны кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$  в полярной системе координат.

5. Найти асимптотические линии поверхности

$$(3u + 3v, 3u^2 + 3v^2, 2u^3 + 2v^3).$$

6. Доказать, что линия  $x^2 = 2az, y^2 = 2bz$  является плоской.

7. На поверхности  $(u \cos v, u \sin v, av)$  (геликоид) найти угол между пересекающимися кривыми

$$u + v = 0, u - v = 0.$$