Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

На правах рукописи

Горопашная Анастасия Визвутовна

Методы анализа безопасности сложных технических систем

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель,
заслуженный работник высшей школы РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Жабко А.П.

Санкт-Петербург
2009

Содержание

Введение

К ***«сложным техническим системам»*** относят технические системы, состоящие из огромного числа составных элементов, соединенных между собой нетривиальными связями (самолеты, корабли, ракеты, ГЭС, АЭС и т.п.).

Чем сложнее система, чем больше в ней элементов, чем сложнее связи, тем более сложным является процесс ее анализа и прогнозирования ее состояния, и тем большую потенциальную опасность она в тебе таит. Очевидно, что аварии с кораблями эпохи Петра I, не могут по опасности и последствиям сравниться с возможными авариями на кораблях начала XX века, которые, в свою очередь, значительно уступают в этом вопросе современным надводным кораблям (НК) и подводным лодкам (ПЛ). Пожар на парусной шхуне может привести лишь к гибели всей команды и корабля, потери груза. Аварии же с подводной лодкой могут привести к значительному загрязнению окружающей среды (корабль несет большое количество токсичных и радиоактивных веществ), гибели большого количества людей, разрушениям, что приведет к колоссальным убыткам для государства и может вызвать международный скандал.

Автор занимается вопросами обеспечения безопасности кораблей и судов ВМФ, поэтому, в качестве примеров сложных технических систем в данной работе рассматриваются различные корабли ВМФ, которые, несомненно, являются потенциально-опасными объектами. Вопрос обеспечения безопасности кораблей ВМФ и входящего в его состав оружия, как показывает жизнь, является чрезвычайно важным и ему должно уделяться большое внимание. Поэтому развитие такой науки, как безопасность должно шагать в ногу с развитием техники!

В развитии своей технологической базы общество движется в направлении достижения приемлемого равновесия между пользой и опасностью того или иного вида техники. Корабли ВМФ не являются исключением в этом ряду, и сама актуализация проблемы обеспечения безопасности кораблей является ярким свидетельством в подтверждение этого тезиса. Для рационального развития отрасли военно-морской техники требуется создание научно-обоснованных подходов к оценке безопасности кораблей.

Понятия «надежность» и «безопасность» используются в повседневной жизни довольно часто и встречаются в различных сферах человеческой жизни (надежная конструкция, надежный банк, надежный человек, безопасная конструкция, безопасный вклад, безопасное вещество). Однако, употребление этих понятий, в большинстве случаев, предполагает лишь качественную оценку опасности. Количественные показатели надежности и безопасности получили свое распространение в небольшом кругу отраслей человеческой деятельности: технике, экономике, медицине, экологии.

Поставленная автору задача сформулирована на стыке двух областей математики - алгебры логики и теории вероятностей, в рамках логико-вероятностной теории (см. раздел 2), которая является своеобразным мостиком между данными областями математики. Для перехода от функции алгебры логики (ФАЛ) к вероятностной функции (ВФ) требуется преобразование логической функции, которое обеспечивает применение к ней основных теорем теории вероятностей. Логико-вероятностную теорию следует отличать от известной вероятностной логики, предметом которой является оценка истинности гипотез (высказываний), заключенных в промежутке между ложью и истиной ($0 \le x \le 1$). Предметом логико-вероятностного исчисления (ЛВИ) или логики вероятностей является вычисление вероятности истинности случайных событий (высказываний), принимающих только два значения (0; 1) [31], [32], [35]. Простые структуры (последовательные, параллельные, древовидные) можно анализировать, используя аппарат теории вероятностей, а именно, формулу полной вероятности. Однако решать задачи надежности, живучести и безопасности только с помощью формулы полной вероятности и вербального перебора множества гипотез оказалось практически невозможным. И дело не только в размерах системы, сложные технические системы можно, конечно, свести к описанию через последовательные, параллельные или древовидные структуры, но лишь ценой их принудительного упрощения, что недопустимо при оценке безопасности таких объектов. Реальные системы, как правило, описываются ФАЛ с повторными аргументами, отрицаниями аргументов, что не дает возможности напрямую пользоваться известными методами теории вероятностей.

Близкой по постановке и смыслу задачей является задача расчета ***надежности*** систем, т.е. анализ способности системы сохранять свойства, необходимые для выполнения заданного назначения, при нормальной эксплуатации. В прикладной математике ***теория надежности*** – одно из ее направлений, в котором разрабатываются методы обеспечения эффективной работы систем. Одним из основных в теории надежности является понятие ***отказа*** – потери работоспособности. В этой теории вводятся количественные показатели надежности, разрабатываются рекомендации по обеспечению надежности на этапах проектирования, производства, хранения, эксплуатации и ремонта систем, изучаются процессы возникновения отказов, разрабатываются методы выявления предотказовых состояний. События, определяющие надежность изделий (моменты отказов, длительности ремонта и др.), в теории надежности рассматриваются как случайные, поэтому особое место при оценивании надежности систем занимают методы вероятностной и математической статистики [104]. История возникновения, становления и развития теории надежности насчитывает уже более 40 лет, написаны сотни книг и десятки учебников. Успехи же в области теории безопасности несравненно скромнее и менее известны. Несмотря на солидный возраст теории надежности, и в ней остались «белые пятна», связанные с проблемой получения объективных статистических данных о безотказности элементов, статистическая информация о которых принципиально не может быть достаточной для стандартной обработки (ввиду малого объема выборки).

С математической точки зрения оценивание и надежности и безопасности может осуществляться с помощью идентичных математических аппаратов. Автор теории ЛВИ – И.А.Рябинин доктор технических наук, контр-адмирал, профессор ВМА им. Н.Г.Кузнецова. Он разработал методы оценивания важности элементов технической системы при оценивании ее надежности, которые наиболее полно изложены в [3] и [4]. Эти методы были разработаны для вычисления характеристик важности элементов монотонных логических функций (см. раздел 2.2), описывающих работоспособность (отказ) системы [1]-[6], Для немонотонных функций работоспособности системы (ФРС) проверка справедливости этих методов на данный момент не проводилась.

Все методы, разработанные И.А. Рябининым для оценки надежности, не сложно переформулировать в терминах теории безопасности [3]: вместо отказов элементов рассматриваются события, происходящие с системой, вместо одновременного отказа нескольких элементов, рассматривается одновременное возникновение нескольких событий, приводящее систему в опасное состояние. Однако вопрос о применимости их для немонотонных логических функций здесь также остается.

И.А. Рябинин подтвердил, что в школе ЛВИ для немонотонных ФАЛ указанные методы до настоящего времени не разрабатывались, поскольку немонотонные структуры не принимались в рассмотрение, и работа по изучению вклада отдельного элемента заведомо была направлена на изучение только монотонных систем. Первой работой, которая посвящена рассмотрению именно немонотонных функций следует считать работу ученика И.А.Рябинина А.С.Можаева, изданную в 1994г. [26]. По словам И.А.Рябинина А.С.Можаев единственный специалист в области ЛВИ, работающий с немонотонными ФАЛ.

Проверка ранее разработанных для монотонных ФАЛ методов или разработка для вычисления характеристик важности элементов немонотонных

ФАЛ новых методов необходимы, поскольку, как в теории надежности, так и в теории безопасности существуют примеры, когда ФРС и функция опасного функционирования системы (ФОС) являются немонотонными (см. раздел 2.2).

Авторитетные в области алгебры логики специалисты С.В.Яблонский, О.Б.Лупанов, В.Б.Кудрявцев, Г.П. Гаврилов, А.А.Сапоженко занимались вопросами дискретной математики и не рассматривали понятия важности отдельных элементов логической функции, о чем свидетельствует анализ их работ с 1958 по 2005 год [39] – [73]. В другой литературе по теме диссертации [74] – [99] с 1958 по 2005 год автор также не нашел отражения методов оценки характеристик важности элементов. Это позволяет сделать вывод, что рассмотренная в диссертации задача ранее не исследовалась, поэтому полученные результаты являются новыми.

Понятия «веса» и «значимости» [3], [4], равно как и предложенная тема работы, родились в области военной техники, поэтому, как уже говорилось, иллюстрация методов оценки безопасности в диссертационной работе будет проведена на сложных технических системах, в качестве которых рассматривались различные корабли ВМФ. Однако ниже приведенные рассуждения могут быть использовать в других научных и прикладных областях для оценки безопасности, надежности, живучести различных систем (социальных, экономических, биологических и пр.).

В данной работе описывается системный подход к анализу технической безопасности системы и ее составных элементов, что не имеет отношения к методам и средствам защиты информации и обеспечению информационной безопасности различных объектов.

1 Основные принципы анализа безопасности сложных технических систем

1.1 Понятие безопасности

Система представлений и понятий в области безопасности опирается на следующие основные принципы:

– отправным, базовым понятием, рассматриваемым как смысловой фундамент всей проблемы, является понятие *опасности*;
– представление об опасности является универсальным, всепроникающим; нет ни одного объекта в мире, к которому в том или ином смысле нельзя было бы приложить представление об опасности;
– понятие опасности относится к числу первичных, фундаментальных понятий, которым невозможно дать строгое определение через еще более простые понятия; опасность как понятие может быть лишь разъяснено через цепь близких по смыслу слов.

Под ***опасностью*** понимается угроза, возможность, вероятность ущерба, бедствия, несчастья, катастрофы. Опасность отражает представление о потенциальной реализуемости ущерба в определенных условиях и ситуациях. Понятие опасности обладает двумя важнейшими свойствами:

– опасность можно характеризовать упорядоченным множеством определений, т.е. говорить о большей или меньшей опасности, что в соответствии с общей теорией измерений свидетельствует об *измеримости* этого понятия в количественных характеристиках, которые могут быть как вещественными числами (или группами чисел), так и натуральными числами (ранговые характеристики или классы опасности);
– понятие опасности имеет *вероятностную природу*, т.е. среди характеристик опасности обязательно должны содержаться параметры, определяющие вероятность или частоту реализации ущерба.

Смысловая структура понятия опасности включает в себя три составляющие:

– представление об *источнике* (носителе, субъекте) опасности; по отношению к субъекту опасность выступает как его свойство, проявляющееся в определенных состояниях и состоящее в способности нанесения ущерба в этих состояниях;

– представление об *объекте* опасности, на который направлено вредоносное воздействие субъекта опасности; объект в результате такого воздействия может претерпевать ущерб, реализация которого зависит от неблагоприятных обстоятельств, условий или ситуаций; по отношению к объекту опасность выступает как *угроза* (ожидание, возможность, вероятность) ущерба;

– понятие опасности всегда используется в таком контексте, из которого можно выделить целостную группу явлений, воздействий, процессов, ситуаций, благоприятствующих реализации ожидаемого ущерба объекту опасности со стороны субъекта опасности; эта группа формирует представление о взаимосвязи, взаимодействии, особом отношении, в котором находятся между собой субъект и объект опасности; это отношение уместно назвать *отношением опасности*.

Таким образом, смысловая структура понятия опасности выражается следующей схемой:

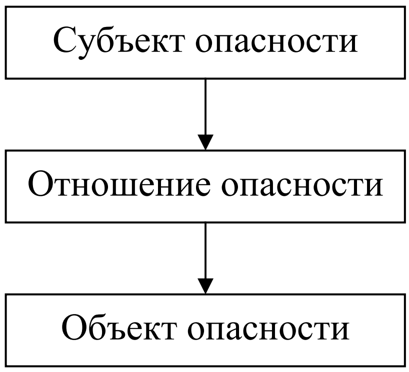

Рис. 1.1. Смысловая структура понятия опасности

Понятие *безопасности* является производным от понятия опасности и требует для своего определения представления о допустимом уровне опасности, который признается приемлемым. Субъекты опасности, уровень опасности которых ниже допустимого, признаются безопасными (по отношению к тем объектам опасности, которые подлежат защите в рамках поставленной задачи обеспечения безопасности). Таким образом, ***безопасность*** определяется как допустимая (приемлемая, незначительная) опасность.

Сам допустимый уровень опасности выступает в качестве составной части *критерия безопасности*, использование которого позволяет производить оценки безопасности и выносить суждения о безопасности субъекта (носителя) опасности для объектов опасности, подлежащих защите от вредных воздействий со стороны этого субъекта.

Основные производные понятия в области безопасности:

- *показатель безопасности* – количественная (ранговая) величина, характеризующая уровень безопасности; в частности, показателем безопасности могут быть: масштаб ущерба объектам опасности, вероятность реализации ущерба, риск как произведение ущерба на вероятность, отнесенный к определенному промежутку времени;
- *параметр безопасности* – вспомогательная численная величина, расчет или оценка которой необходимы для определения показателей безопасности;
- *критерий безопасности* – правило, алгоритм, способ ответа на вопрос, обеспечена или нет безопасность (в частности, критерием безопасности является совокупность следующих операций: оценка показателей безопасности, назначение нормативных значений этих показателей, указывающих на предельно допустимый уровень опасности, сравнение оцененных показателей с этими нормативами);
- *обеспечение безопасности* – деятельность по снижению опасности до приемлемого уровня.

1.2 Понятие риска

Наиболее широкой используемой количественной характеристикой опасности (уровня, степени опасности) является ***риск.*** В связи с этим, оценка безопасности требует значительного объема вероятностных расчетов.

Явления, связанные с понятием риска, постоянно встречаются в обыденной жизни, при производственной, финансово-экономической и страховой деятельности, в сфере принятия военных и политических решений, при выборе и осуществлении проектов различного характера и назначения, и.т.д. Многообразие ситуаций, в которых используются тесно связанные со словом «риск» понятия употребляемым в различных контекстах, приводит к тому, что существует многообразие толкования этого слова [105]. Порядка полутора десятка определения риска имеются только в финансово-экономической литературе [105], [106].

Оценка риска требует расчета вероятностей возникновения ущерба, понимаемого в самом широком смысле, причем абстрагируются от конкретного понятия содержания ущерба. При этом риск приобретает смысл количественного показателя угрозы ущерба. В частности, при анализе безопасности сложных технических систем понятие риска используется как мера степени безопасности сложных систем. Риск обычно понимается как математическое ожидание ущерба в единицу времени, однако в различных задачах, связанных с обеспечением безопасности, это общее определение риска может использоваться в различных модификациях. Применительно к человеку, например, используется понятие *индивидуального риска* – вероятность гибели или тяжкого (смертельного) заболевания человека в единицу времени (обычно в течение года). Также применяются коллективный риск, риск смерти, риск материальных и/или финансовых потерь и т.п., часто под *риском* понимают «шанс плохих последствий» [107].

1.2.1. Концепция приемлемого риска как методологическая основа для установления показателей и критериев безопасности

Оценки риска в различных областях человеческой деятельности неоднократно были предметом специальных исследований [103, 107]. В результате этих исследований была разработана ориентировочная шкала рисков в современном обществе, представленная в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Ориентировочная шкала рисков в современном обществе.

Оценка приемлемости риска	Уровень риска (1/год)
Исключительно высокий уровень риска. Необходимо применение мер защиты.	$\geq 10^{-2}$
Относительно высокий уровень риска. Необходимо применение мер обеспечения безопасности.	$10^{-3} - 10^{-2}$
Относительно невысокий уровень риска. Избирательное применение мер безопасности.	$10^{-4} - 10^{-3}$
Достаточно малый, приемлемый в профессиональной деятельности, но учитываемый уровень риска.	$10^{-5} - 10^{-4}$
Пренебрежимо малый, но еще признаваемый обществом уровень риска.	$10^{-6} - 10^{-5}$ *)
Уровень риска, актуально не признаваемый человеком, если он не совершает необдуманных поступков. Уровень риска от большинства природных катастроф.	$10^{-8} - 10^{-6}$

*) величина риска 10^{-6} 1/год представляет собой верхнюю границу риска от естественных (природных) катастроф.

Из представленного краткого обзора можно сделать ряд заключений, лежащих в основе концепции приемлемого риска как основы нормирования опасности в любой области человеческой деятельности:

1. С любым видом человеческой деятельности связана определенная степень риска.
2. Уровни риска в различных областях деятельности человека носят относительно устойчивый характер и могут рассматриваться как

отражение объективных закономерностей в проявлении присущих этим областям деятельности опасностей и, соответственно, их принятии обществом.

3. Уровни риска изменяются в очень широких пределах – от минимально обнаружимого риска 10^{-8} 1/год до 10^{-2} 1/год и выше.
4. Виды деятельности, связанные с уровнем риска выше 10^{-2} 1/год, рассматриваются современным обществом как социально неприемлемые в массовом масштабе (исключая редкие виды профессиональной деятельности– автогонщики, каскадеры и т.п.).
5. Поскольку общество в целом достаточно осведомлено об опасностях, сопряженных с различными видами человеческой деятельности, и, тем не менее, признает их в качестве социально приемлемых, то тем самым оно признает и уровни риска, связанного с этими областями деятельности.
6. За верхний предел приемлемого профессионального риска при отсутствии необходимости применять какие-либо специальные меры безопасности принимается уровень риска 10^{-4} 1/год.
7. Уровень приемлемого риска для населения, т.е. лиц, профессионально не связанных с осуществлением опасной деятельности оценивается в диапазоне $10^{-8} – 10^{-6}$ 1/год.

1.2.2. Предложения по показателям безопасности системы

Для каждой системы предложения по показателям безопасности разрабатываются с учетом их задач, структурных особенностей и условий функционирования. Для кораблей, например, показателем безопасности может являться риск гибели экипажа, населения, затопления и пр.

В технике показатели безопасности разделены на два класса: показатели высшего уровня (интегральные показатели для всех видов опасности системы) и частные показатели для каждого вида опасности. Однако более адекватными представляются такие показатели, которые являются сочетаниями определенных технических параметров и характеристик системы. Однако установление таких показателей безопасности предусматривает хорошо разработанную научно-теоретическую базу анализа «отношения опасности» между субъектами и объектами опасности, т. е. наличие методик:

- прогнозирования путей развития аварий в системе;
- оценки вероятности реализации каждого из прогнозируемых путей;
- расчета аварийных и поражающих воздействий на объекты опасности;
- оценки последствий этих воздействий и аварий.

Системы, такие как корабли ВМФ, являются организационно-техническими системами высшего уровня. Поэтому в условиях, когда мы не можем с достаточной степенью достоверности проследить связь между элементами системы и воздействием на объекты опасности, наиболее надежной оценкой их безопасности будет оценка по показателям безопасности этих объектов.

1.3 Принцип анализа безопасности. Два подхода к анализу безопасности

Фундаментальным понятием в теории безопасности является понятие аварийной ситуации (опасного состояния) системы и соответствующей логической функции опасности системы. По аналогии с теорией надежности, где основным понятием является отказ и все начинается с уяснения понятия работоспособности системы, в теории безопасности требуется в каждом конкретном случае дать аналитическое описание того опасного состояния системы, которое может привести к гибели людей или иному ущербу в больших масштабах. Такое опасное состояние в физических и математических моделях называется негативным событием, заранее оговариваемым как неприемлемое в данном случае.

Первый подход представляет собой анализ аварии «с конца в начало». После определения опасного состояния системы (ущерба большого масштаба, негативного события) анализируются первопричины (события, сочетание нескольких событий), которые приводят систему в данное опасное состояние [24]. В процессе анализа строится логическая схема, содержащая все возможные сочетания событий (сценарии), приводящие к ущербу большого масштаба. По логической схеме строится логическая функция, аргументами которой являются события, являющиеся исходными, т.е. присутствующие в сценарии. ФАЛ удобно представить в дизъюнктивно-нормальной форме (ДНФ). Каждая конъюнкция ДНФ представляет путь аварии, приводящей к опасному состоянию системы. Далее, если не оговаривается отдельно, ФАЛ подразумеваются в ДНФ.

Следующий пример иллюстрирует применение первого подхода для анализа безопасности ПЛ [2], [3], [27].

Пример. Пусть для затопления ПЛ достаточно затопления одного из отсеков. Поступление воды может происходить вследствие пробоины. Пусть в каждом отсеке ПЛ имеется свой насос (Н1, Н2), кроме того, между насосами установлена перемычка (П), позволяющая откачивать воду с помощью насоса смежного отсека (рис. 1.2).

Схема, представленная на рис. 1.3. иллюстрирует первопричины возникновения события «Затопление ПЛ». ФАЛ в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$y = z_1 \,\&\, (z_3 \,\&\, (z_4 \vee z_5)) \vee z_2 \,\&\, (z_4 \,\&\, (z_3 \vee z_5)).$$

Здесь и далее символ $\&$ имеет смысл логического умножения – операция «И», в аналогичном смысле употребляется символ $\wedge$. Данную функцию можно переписать в виде

$$y = z_1 z_3 (z_4 \vee z_5) \vee z_2 z_4 (z_3 \vee z_5) = \left| \begin{array}{l} z_1 z_3 \left| \begin{array}{l} z_4 \\ z_5 \end{array} \right| \\ z_2 z_4 \left| \begin{array}{l} z_3 \\ z_5 \end{array} \right| \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} z_1 z_3 z_4 \\ z_1 z_3 z_5 \\ z_2 z_4 z_3 \\ z_2 z_4 z_5 \end{array} \right| .$$

Здесь и далее знаки конъюнкции опущены, дизъюнкция записывается в виде матрицы, строками которой являются присутствующие в ней конъюнкции.

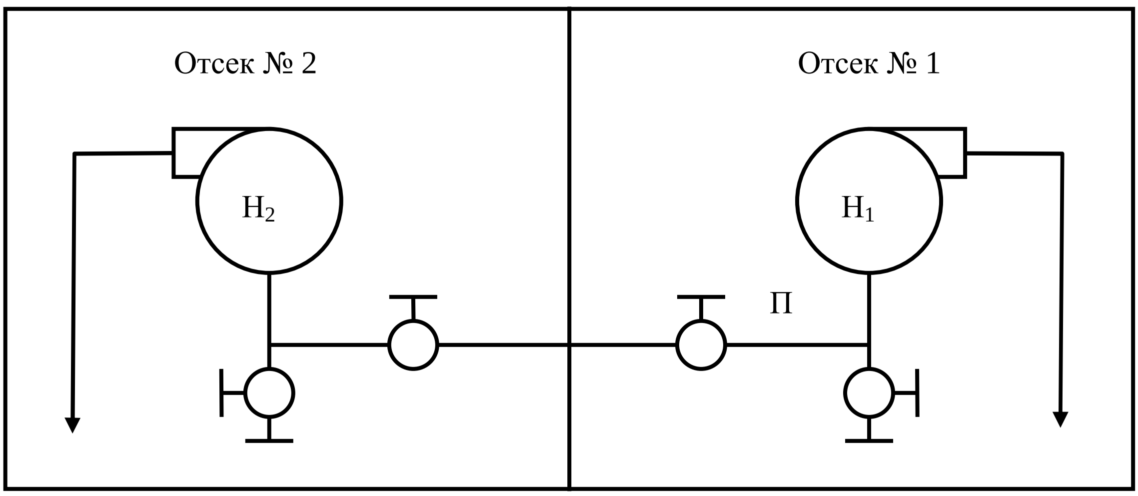

Рис. 1.2. Схематичное представление ПЛ

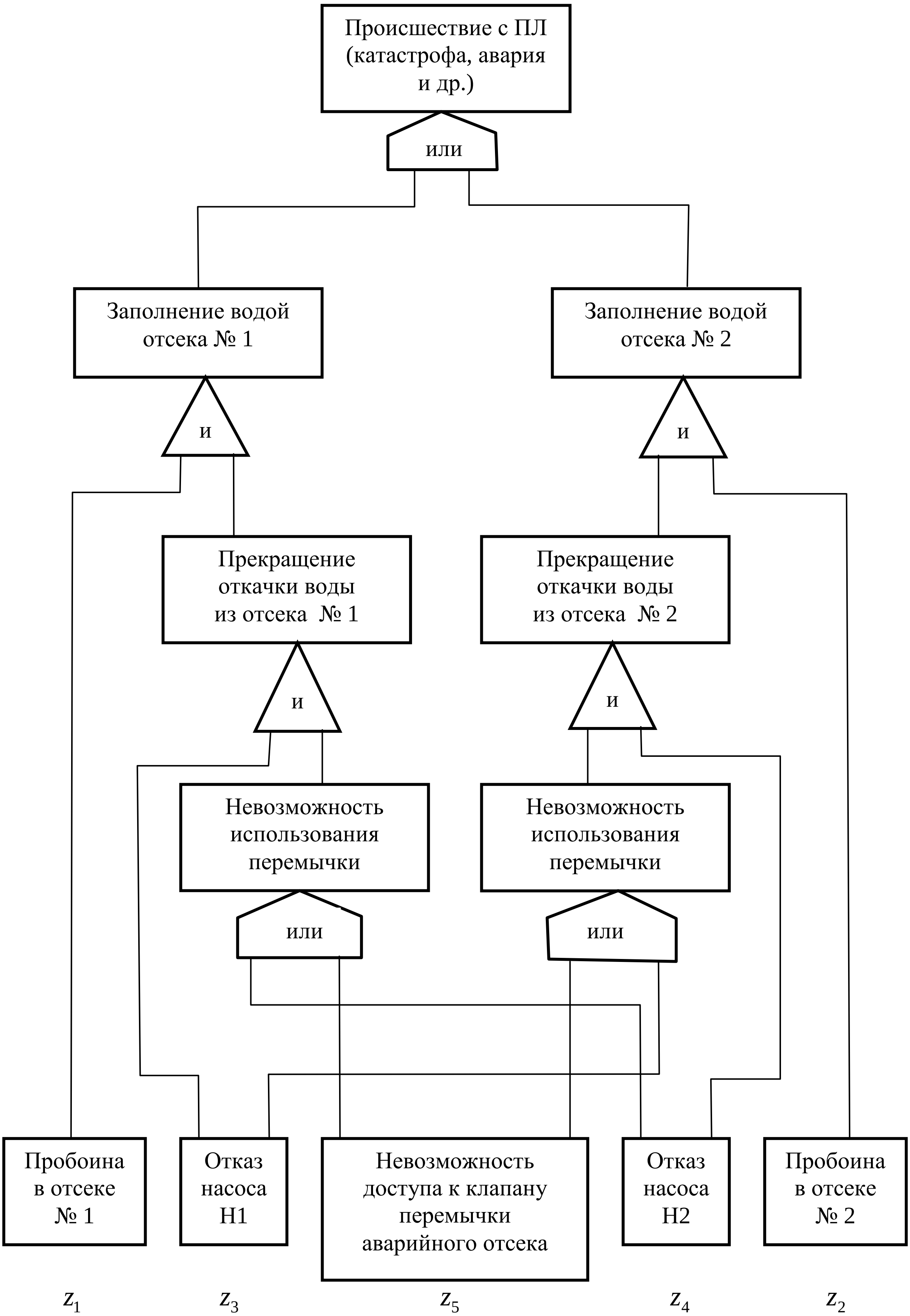

Рис.1.3. Сценарий опасного состояния, приводящего к катастрофе подводной лодки

С помощью ***второго подхода*** решается задача поиска путей прихода системы в опасное состояние при условии возникновения какого-либо инициирующего события (ИС), т.о. он представляет собой анализ аварии «с начала в конец».

Рассматривается наступление интересующего нас ИС, выводящего систему из равновесия. Для кораблей такими событиями могут быть пожар в помещении, короткое замыкание, поступление воды, шторм и т.д.

Практика анализа безопасности сложных объектов показала, что удобнее прослеживать их реакцию на ИС, чем определять пути успешного развития событий. Поэтому анализ безопасности с помощью второго подхода заключается в выявлении сценариев опасного функционирования системы, возникновения негативного события, которое может привести к ущербу большого масштаба. В связи с таким методом решения задачи, данный процесс правильнее было бы назвать процессом анализа *опасности*.

После того как ИС, его ещё называют аварийной ситуацией (АС), определено, формируются пути развития (распространения) аварии внутри системы как следствие этого ИС. Таким образом, составляется сценарий развития аварии в системе, который может иметь вид «дерева событий», цикла, сетевой вид. Сценарий представляет собой логическую схему, на которой наглядно видно, как протекает авария, в каких подсистемах, и какое оборудование она затрагивает. Такая схема строится, начиная с АС, и прослеживается как отклик системы. Задача аналитика состоит в установлении этого отклика в хронологической последовательности. Хронология должна быть соблюдена даже в тех случаях, когда события происходят почти одновременно. При этом необходимо учитывать возможность срабатывания соответствующих подсистем в той обстановке, которая складывается к моменту подключения подсистемы.

Однако определение спектра опасных состояний системы недостаточно для конечной оценки ее безопасности. Этот спектр нужно «наложить» на аварийные состояния, поскольку в результате развития аварии в системе могут возникнуть новые поражающие воздействия. Эти воздействия становятся инициаторами нового «витка» развития аварии уже в условиях сформировавшейся «аварийной среды», в которую оказываются «погруженными» объекты опасности. В связи с этим процедура построения сценария опасного поведения системы является итерационным процессом, в ходе которого проводится более тщательный анализ системы и определяются меры, способные эффективно повысить уровень безопасности. Такая итерационная схема развития аварии показана на рис. 1.4.

После завершения всех описанных выше работ, так же, как и в первом подходе строится логическая схема, содержащая все возможные сценарии, приводящие к ущербу большого масштаба. По логической схеме строится логическая функция, аргументами которой являются события, являющиеся исходными, т.е. присутствующие в сценарии.

Таким образом, проведение расчетно-аналитических исследований развития каждой АС по второму подходу можно разбить на последовательные этапы:

1. Этап анализа путей развития АС.
2. Этап формирования сценария аварии, являющейся следствием этой АС (сценарий состоит из событий, происходящих с системой).
3. Этап разработки логических схем развития этой аварии (в качестве элементов схемы выступают события из сценария, т.е. происходящие с системой при развитии аварии).
4. Этап построения ФАЛ на основании построенных логических схем. Элементами (аргументами, переменными) ФАЛ являются элементы логических схем, т.е. события, происходящие с системой при развитии аварии.

На первых двух этапах составляется физическая модель развития аварии, и следствием этих этапов является сценарий аварии. После того, как сценарий аварии составлен, необходимо определить математическую модель этого процесса. Для этого строится логическая схема развития аварии. По логической схеме выписывается логическая функция, аргументами которой являются события, присутствующие в логической схеме. Здесь аналогично ФАЛ удобно представить в ДНФ, каждая конъюнкция которой представляет собой путь аварии.

После выявления всех сценариев возможных аварий (построения ФАЛ) ***любым из подходов*** производится оценка вероятности их реализации. Далее проводится оценка воздействий факторов опасности на объекты опасности для каждого из возможных сценариев и всех их совокупности путем перевода ФАЛ в ВФ, аргументами (переменными) которой являются вероятности событий, входящих в логические схемы (аргументы ФАЛ). Это самый сложный с математической точки зрения этап оценки риска. В конце, подставляя в ВФ значения входящих в нее вероятностей, вычисляется вероятность возникновения конечного события.

В итоге данный показатель вероятности сравнивается с допустимым уровнем риска и делается вывод о достаточности принятых мер обеспечения безопасности. Если эти меры неудовлетворительны, выявляются те места, которые отвечают за высокий уровень риска. Вырабатываются предложения по усовершенствованию принятых мер, и проводится переоценка уровня риска.

Рис. 1.4. Итерационная логическая схема развития аварии в системе

2 Логико-вероятностная теория и ее использование при исследовании безопасности сложных систем

2.1 Общие положения

Прародителем логико-вероятностной теории можно считать, и это признает И.А.Рябинин [3], Платона Сергеевича Порецкого, опубликовавшего в 1887 году работу [19], в которой установил связь между событийной теорией вероятностей и алгеброй логики.

Как сказано во введении, логико-вероятностная теория является своеобразным мостиком между алгеброй логики и теорией вероятностей. Она представляет собой основные знания по расчетам риска возникновения аварий и катастроф структурно-сложных систем, базирующиеся на логическом представлении развития опасных состояний и математических методах вычисления истинности ФАЛ, представляющей сценарии развития аварии [27].

Такой вероятностный анализ безопасности обеспечивает решение следующих задач:

– позволяет оценить целесообразность модернизации существующих конструкций с точки зрения уменьшения риска;
– позволяет объективно выявлять наиболее опасные места, причины и инициирующие опасность условия [27];
– обеспечивает обучение персонала действиям в аварийных ситуациях, адекватным складывающейся обстановке;
– позволяет разработать требования к оборудованию и выполняемым процедурам, обеспечивающие систематическое снижение уровня риска;
– позволяет устанавливать приоритеты будущих исследований в сфере обеспечения безопасности системы;
– позволяет оценивать уровень риска персонала и населения, определять оптимальную стратегию страхования ответственности организации,

эксплуатирующей систему, за причинение ущерба, выявлять направления вложения средств, предназначенных для снижения риска.

Единственным практически реальным и доступным путем для проектирования систем является моделирование. Это делается на ЭВМ вместе с соответствующим математическим обеспечением. Поскольку компьютерные технологии непрерывно развиваются, то этот путь оказывается весьма перспективным. Созданные на основе логико-вероятностной теории методы для практического использования являются наиболее привлекательными, поскольку они исключительно четки, однозначны и удобны для анализа влияния любого элемента на безопасность всей системы. Это методы расчета показателей безопасности системы, при которых сценарий поведения системы (сценарий аварии) описывается средствами математической логики, а оценка ее безопасности производится с помощью теории вероятности. ЛВМ включают в себя математический аппарат преобразовывающий ФАЛ в ВФ. Из-за невозможности проведения полноценных натурных экспериментов, проигрывают все возможные варианты развития аварийной ситуации на математических моделях (см. раздел 1.3). Препятствием на пути решения этой задачи является представление о практической невозможности перебора всех ситуаций, которые могут привести систему в опасное состояние. Для решения задач безопасности в первую очередь необходимо провести системный анализ исследуемого объекта, в ходе которого:

– максимально конкретизировать и четко представлять суть опасного состояния, что существенно сужает множество возможных состояний системы;
– ограничить объект исследования разумными пределами: пространственные границы, дробление системы на элементы;
– необходима строгая логика перебора возможных ситуаций при составлении сценария развития событий.

2.2 Понятие монотонности функции алгебры логики

2.2.1. Общие понятия

Пусть $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_m)$ – двоичные наборы. Говорят, что α ***предшествует*** β, если для всех $i = \overline{1,m}$ $\alpha_i \le \beta_i$, причем, по крайней мере, для одного i имеет место строгое неравенство. Обозначается $\alpha \prec \beta$ [3], [74], [75].

Функция алгебры логики $f(X_m)$, где $X_m = (x_1,...,x_m)$, называется ***монотонной,*** если для любых наборов $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_m)$ таких, что $\alpha \prec \beta$, имеет место неравенство [3], [74], [75]

$$f(\alpha_1,...,\alpha_m) \le f(\beta_1,...,\beta_m). \qquad (2.1)$$

Функции, которые являются константами, или допускают представление в ДНФ, не содержащих отрицаний аргументов, будут монотонными.

В теории надежности в монотонных системах отсутствуют «вредные элементы», для которых улучшение характеристик работоспособности непременно ухудшает характеристики работоспособности всей исследуемой системы в целом [26].

Немонотонными же логическими функциями называют функции, для которых существует хотя бы одна пара наборов, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_m)$ таких, что $\alpha \prec \beta$, для которых неравенство (2.1) не выполняется.

Множество монотонных и немонотонных логических функций схематично представлено на рис. 2.1.

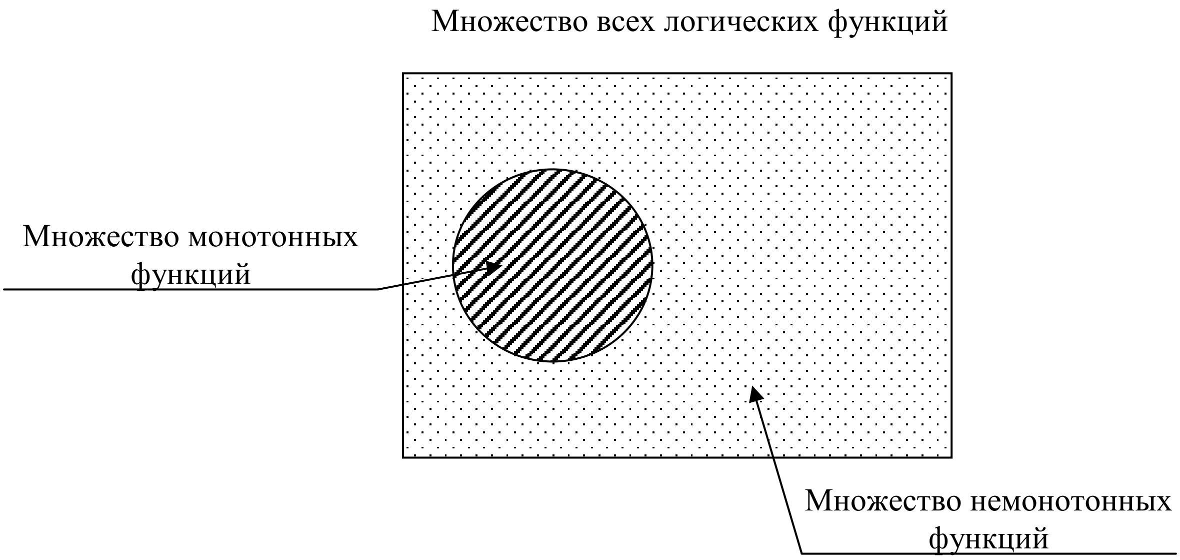

Рис. 2.1. Представление множества монотонных и немонотонных логических функций

2.2.2. Два вида немонотонных логических функций

Поскольку монотонные функции представимы в ДНФ без отрицаний аргументов, то логично предположить, что ДНФ, в которых присутствуют отрицания, будут немонотонными.

Немонотонные функции можно разделить на два типа:

1. ФАЛ в наиболее краткой ДНФ (которую невозможно упростить), которые для любого номера аргумента i содержат только отрицание i-го аргумента, сам аргумент x_i в функцию не входит, т.е. функция представима в следующем виде
$$f(X_m) = (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q), \qquad (2.2)$$
где $(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i', $(\vee_q K_q)$ – конъюнкции, не содержащие x_i'.
2. ФАЛ в ДНФ, в которую хотя бы для одного номера аргумента i входят как события x_i, так и отрицания этих событий x_i', т.е. функция представима в следующем виде

$$f(X_m) = (\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q), \tag{2.3}$$

где $(\vee_j K_j)$ конъюнкции, содержащие x_i, $(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i', $(\vee_q K_q)$ – конъюнкции, не содержащие x_i и x_i'.

Следует заметить, что немонотонные ФАЛ, получаемые при оценке безопасности с помощью первого подхода (см. раздел 1.3) будут иметь вид (2.2), а немонотонные ФАЛ, получаемые при оценке безопасности с помощью второго подхода (см. раздел 1.3) могут иметь вид как (2.2), так и (2.3).

В теории надежности ФАЛ строятся, в основном, с помощью первого подхода, поэтому, если модель надежности немонотонная, то в ней обязательно должен быть хотя бы один элемент, увеличение вероятности безотказной работы которого обязательно уменьшает вероятности безотказной работы всего объекта [26].

2.2.3. Особенности рассмотрения немонотонных функций первого типа (формула (2.2))

Из немонотонной логической функции данного типа $f(X_m)$ путем замены переменных можно получить монотонную. Пусть $x_i, i = \overline{1,k}$ – те аргументы, которые входят в ФАЛ с отрицанием, тогда производится замена следующего типа:

Для аргументов, входящих с отрицаниями–

$$z_i = x_i', i = \overline{1,k}. \tag{2.4.1}$$

Для всех остальных аргументов, входящих без отрицаний–

$$z_j = x_j, j \neq i = \overline{1,k}. \tag{2.4.2}$$

Далее к полученной ФАЛ можно применять аппарат, разработанный ранее И.А.Рябининым для монотонных функций. Следует только внимательно отслеживать номера аргументов, которые заменяются как $z_i = x_i', i = \overline{1,k}$, поскольку вероятности новых переменных $z_i, i=\overline{1,k}$, вычисляются следующим образом: $P(z_i)=1-P(x_i), i=\overline{1,k}$, в отличие от $P(z_j)=P(x_j),\ j\neq i=\overline{1,k}$.

2.2.4. Особенности рассмотрения немонотонных функций второго типа (формула (2.3))

Из немонотонных логических функций данного типа $f(X_m)$, в отличие от рассмотренных в п. 2.2.3, путем замены переменных нельзя получить монотонные. В функцию $f(X_m)$ входят как события x_i, так и x_i', и при любой замене невозможно избавиться от отрицания элемента. Таким образом, нельзя воспользоваться математическим аппаратом для монотонных функций, значит, для функций подобного вида необходимо разрабатывать новые методы оценки важности входящих в них аргументов.

2.2.5. Проверка функции на монотонность

Если ФАЛ представима в ДНФ без аргументов с отрицаниями, то, как было сказано выше, такая функция является монотонной.

Если же ФАЛ в ДНФ содержит аргументы с отрицаниями и не преобразовывается к ДНФ без отрицаний, то она будет немонотонной.

Т.о. для проверки монотонности логической функции достаточно убедиться, что она приводится к ДНФ без отрицаний. Если же это сделать невозможно, что она является немонотонной. Приведение ФАЛ, записанной в произвольном виде, к ДНФ, не простая задача, тем более когда функция имеет большую размерности и/или сложную структуру.

Другой способ проверки ФАЛ, состоящей из n аргументов, на монотонности – по определению. Для этого необходимо найти значения функции на всех 2^m наборах, а затем провести проверку выполнения неравенства (2.1) для всех пар наборов $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_m)$ таких, что $\alpha \prec \beta$. Данная проверка тоже нетривиальна, особенно для ФАЛ с большим числом аргументов.

Далее в тексте идут ссылки на немонотонные функции обоих видов, как «функции типа (вида) (2.2)» и «функции типа (вида) (2.3)».

2.3 Понятие важности элементов функции алгебры логики. Возникновение проблемы

Все рассмотренные в диссертационной работе показатели важности изначально были разработаны касательно исследования надежности и в приведенных источниках формулируются в терминах теории надежности. В работе автор формулирует все показатели уже в терминах безопасности.

При рассмотрении сценариев двух структур: два события происходят последовательно или два события происходят параллельно, интуитивно понятно, что для реализации сценария вторая структура предпочтительнее. Эту интуитивно-качественную характеристику можно выразить количественно в ходе логико-вероятностного анализа ФАЛ.

При анализе безопасности используются статистические данные по вероятностям реализации тех или иных событий (пожар, поступление воды, короткое замыкание и пр.). Однако для объектов морской военной техники такая информация зачастую либо вообще отсутствует, либо труднодоступна. В таком случае построить сценарий развития аварии и соответствующую ему ФАЛ возможно, однако оценить вероятность реализации негативного события и риск нельзя. В таком случае было бы полезно определить, какие события в аварии более *весомые* по сравнению с другими.

Для вычисления веса события не требуется знание вероятностей наступления входящих в сценарий событий. Анализируя и сравнивая различные веса, мы можем выделить перечень событий, на которые стоит обратить первостепенное внимание, и определить, с каким элементом технической системы (корабля) они связаны.

Если же вероятности событий, входящих в сценарий, каким-либо образом найдены, в конечном итоге определен показатель безопасности системы, и он превышает допустимый уровень (см. таблицу 1.1), то необходимо определить, какое событие в ходе развития аварии наиболее *значимо*. Значимость, в отличие от веса определяется не только расположением события в сценарии, но и вероятностями возникновения всех других событий. Вероятностная трактовка критерия значимости позволяет определить значимость как условную вероятность реализации сценария аварии при условии, что данное событие произошло.

Определение важности отдельных элементов ФАЛ необходимо еще и с точки зрения очередности осмотров, диагностирования и ремонтов, для решения таких задач, как поиск неисправностей, разработка стратегии оптимального резервирования и др.

Эти вопросы возникали и ранее. Еще в начале становления теории надежности проф. В.И.Нечипоренко писал [36, с33]:«…Решая вопрос относительно распределения усилий по обеспечению надежности отдельных элементов в целях достижения заданной надежности системы, иногда необходимо знать, какой элемент наиболее значимый, какой – менее значимый. Иначе говоря, необходимо знать, какое влияние оказывает на общую надежность системы выход из строя того или иного элемента».

В 1969 году проф. Бирнинбаум в статье [18] определил надежностную значимость аргумента в системе как частную производную вероятности безотказной работы системы по вероятности безотказной работы рассматриваемого элемента. Однако только И.А.Рябинин четко сформулировал эти понятия и дал им развитие в применении в области военной техники. Круг ученых во главе с И.А.Рябининым, получивший название научной школы логико-вероятностных методов исследования надежности, живучести и безопасности структурно-сложных систем, исследовал и развивал понятия «веса» и «значимости». Результаты приведены в работах [3], [4].

Однако все эти результаты разработаны для монотонных функций (см. раздел 2.2), описывающих надежность (живучесть, безопасность) системы. Правомерность же использования этих методов для немонотонных ФАЛ не доказана, а разработка новых не проведена, поскольку длительное время системы с немонотонными структурами не принимались в рассмотрение.

Тем не менее, в инженерной науке существуют примеры, когда ФАЛ, описывающая сценарии развития аварии будет немонотонной. Например, А.С.Можаев первый обратил внимание на немонотонные функции. В своей работе [26] он рассмотрел следующий пример.

Пример. Исследуемая организационно-техническая система (рис. 2.2) состоит из двух элементов x_1 и x_2. Событием x_3 представлено возможное возникновение поражающего фактора (пуск ракеты, возгорание, радиоэлектронная помеха, недопустимое повышение давления, авария ядерного реактора). События x_5 и x_4 представляют разрушения воздействием поражающего фактора первого и второго элементов соответственно.

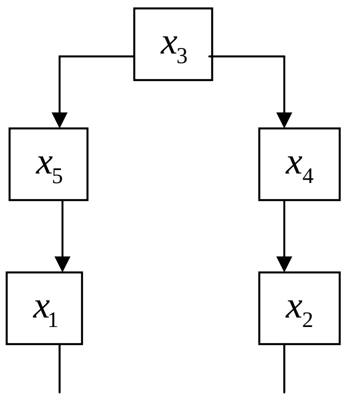

Рис. 2.2. Пример организационно-технической системы

В данной модели рассматриваются инверсные выходы из вершин x_5 и x_4. Они определяют в реализации *неразрушения* элементов x_1 и x_2 при возникновении поражающего воздействия. Требуется определить устойчивость данной системы по критерию выполнения своих функций хотя бы одним элементом x_1 или x_2.

Логическая функция в этом случае выглядит следующим образом:

$$y = x_1 x_3' \vee x_1 x_5' \vee x_2 x_3' \vee x_2 x_4' = \begin{vmatrix} x_1 x_3' \\ x_1 x_5' \\ x_2 x_3' \\ x_2 x_4' \end{vmatrix}$$

Данная функция является немонотонной (см. раздел 2.2).

Кроме того, развитие любой аварии само по себе не однозначный процесс, каждое событие сценария имеет вероятность реализации и может произойти и не произойти, что также приводит к немонотонности ФАЛ.

3 Постановка задачи

Как уже говорилось ранее, понятия «веса» и «значимости» [3], [4] родились в области военной техники, однако данные понятия исследовались только для структур, описываемых монотонными функциями.

В связи с этим, мне была поставлена задача, разработать методы вычисления характеристик важности элементов логических структур, описываемых немонотонными функциями алгебры логики.

Как сказано во введении, рассмотренная в диссертации задача в школе ЛВМ не решалась а анализ работ специалистов в области алгебры логики позволяет сделать вывод о новизне полученных результатов.

В качестве наиболее полного источника информации, касающейся таких понятий, как вес, значимость, активность, вклад элементов была взята книга И.А. Рябинина Ю.М. Парфенова «Надежность, живучесть и безопасность корабельных электроэнергетических систем», изданная в ВМА в 1997 году [4].

Разработать методы вычисления характеристик важности элементов логических структур, описываемых немонотонными функциями алгебры логики.

4 Характеристики важности для одного события немонотонной функции алгебры логики

Полученные в разделе 4 результаты, за исключением леммы 4.1.2 и теоремы 4.1.2, опубликованы в [114] и [115].

4.1 Определения и теоремы

Вес логической функции, состоящей из m элементов, есть относительная доля наборов элементов, на которых функция равна 1, среди всех 2^{m} наборов возможных значений элементов [4].

Булева разность любой функции $y(X_m)$ по аргументу x_i есть результат сложения по модулю два функции $y(X_m)$ и симметричной с ней функцией $y_{x_i'}(X_m) = y(x_1,...,x_i',...,x_m)$

$$\Delta_{x_i} y(X_m) = y(X_m) \oplus y_{x_i'}(X_m) = y(x_1,...,x_i,...,x_m) \oplus y(x_1,...,x_i',...,x_m) = \\ = y \,\&\, y'_{x_i'} \vee y' \,\&\, y_{x_i'} = \left| \begin{matrix} y \,\&\, y'_{x_i'} \\ y' \,\&\, y_{x_i'} \end{matrix} \right|. \qquad (4.1)$$

В формуле (4.1) приняты обозначения, принятые в логико-вероятностном анализе: знаки конъюнкции опущены, дизъюнкция записывается в виде матрицы, строками которой являются присутствующие в ней конъюнкции [4].

Лемма 4.1.1: *Монотонная логическая функция* $y(X_m)$ *является импликантой ее единичной функции* $y_1^{(i)}(X_m) = y(x_1,...,1,...,x_m)$, *а нулевая функция* $y_0^{(i)}(X_m) = y(x_1,...,0,...,x_m)$ *есть импликанта исходной функции* $y(X_m)$, *т.е., обозначив через [y(x)] множество наборов* X_m, *на которых y(x)=1, получаем включение:*

$$[y_0^{(i)}(X_m)] \subseteq [y(X_m)] \subseteq [y_1^{(i)}(X_m)]. \qquad (4.2.1)$$

Для немонотонных ФАЛ вида (2.3) формула (4.2.1) не верна.

Д о к а з а т е л ь с т в о невыполнения леммы 4.1 для немонотонных ФАЛ типа (2.3):

Функцию $y(X_m)$ можно представить в ДНФ: $y(X_m) = (\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q)$, где $(\vee_j K_j)$ конъюнкции, содержащие x_i, $(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i', $(\vee_q K_q)$ – конъюнкции, не содержащие x_i и x_i'.

Из того, что $[y_0^{(i)}(X_m)] \subseteq [y(X_m)]$, следует $[(\vee_L K_{L0})] \subseteq [(\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L)]$. Так как $[(\vee_L K_{L0})] \supseteq [(\vee_L K_L)]$, то часть или все $K_{L0} = K_L(x_1,...,0,...,x_m)$ принадлежат $(\vee_j K_j)$, а это выполняется не для всех логических функций.

Аналогично, из того, что $[y(X_m)] \subseteq [y_1^{(i)}(X_m)]$, следует $[(\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L)] \subseteq [(\vee_{j1} K_{j1})]$, значит, $[(\vee_L K_L)] \subseteq [(\vee_{j1} K_{j1})]$, где $K_{j1} = K_j(x_1,...,1,...,x_m)$. Это также выполняется не для всех логических функций, удовлетворяющих определенным ограничениям.

Утверждение доказано.

Лемма 4.1.2: *Немонотонная логическая функция* $y(X_m)$ *<u>типа (2.2)</u> является импликантой ее нулевой функции* $y_0^{(i)}(X_m) = y(x_1,...,0,...,x_m)$, *а единичная функция* $y_1^{(i)}(X_m) = y(x_1,...,1,...,x_m)$ *есть импликанта исходной функции* $y(X_m)$, *т.е., обозначив через [y(x)] множество наборов* X_m, *на которых y(x)=1, получаем включение:*

$$[\mathrm{y}_1^{(\mathrm{i})}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}_0^{(\mathrm{i})}(X_m)]. \qquad (4.2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функцию $y(X_m)$ можно представить в ДНФ: $y(X_m) = (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q)$, где $(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i', $(\vee_q K_q)$ – конъюнкции, не содержащие x_i'. Тогда $y_1^{(i)}(X_m) = \vee_q K_q$, значит $[\mathrm{y}_1^{(\mathrm{i})}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}(X_m)]$.

Поскольку $y_0^{(i)}(X_m) = (\vee_L K_{L0}) \vee (\vee_q K_q)$, а $[(\vee_L K_{L0})] \supseteq [(\vee_L K_L)]$, где $K_{L0} = K_L(x_1,...,0,...,x_m)$, то $[\mathrm{y}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}_0^{(\mathrm{i})}(X_m)]$.

Утверждение доказано.

Вес аргумента x_i в ФАЛ есть вес булевой разности монотонной логической функции по аргументу x_i [4]:

$$g_{x_i} = g(\Delta_{x_i} y(X_m)). \tag{4.3}$$

Значимость аргумента x_i есть частная производная от вероятности опасного функционирования всей системы $P_c = P(y(X_m) = 1)$ по вероятности опасности данного события $P_i = P(x_i = 1)$ [4]:

$$\xi_i = \frac{\partial P_c}{\partial P_i}. \tag{4.4}$$

Под записью $P(a)$ понимаем вероятность истинности a, т. е. $P(a = 1)$.

Теорема 4.1.1: *Значимость аргумента* x_i *в монотонной логической функции численно равна вероятности истинности булевой разности ФАЛ по аргументу* x_i*:*

$$\xi_i = P(\Delta_{x_i} y(X_m)). \tag{4.5.1}$$

<u>Для немонотонных функций вида (2.3) данная теорема (4.5.1) не выполняется, поскольку в ходе доказательства используется лемма 4.1.1, которая не справедлива для данного типа функций [4].</u>

Теорема 4.1.2: *Значимость аргумента* x_i *в немонотонной логической функции типа (2.2) численно равна вероятности истинности булевой разности ФАЛ по аргументу* x_i *со знаком минус:*

$$\xi_i = -P(\Delta_{x_i} y(X_m)). \qquad (4.5.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По свойству булевой разности $\Delta_{x_i} y(X_m) = y_1^{(i)}(X_m) \oplus y_0^{(i)}(X_m)$, тогда

$$P(\Delta_{x_i} y(X_m)) = P(y_1^{(i)}(X_m) \oplus y_0^{(i)}(X_m)) = P(y_1^{(i)}(X_m)) + P(y_0^{(i)}(X_m)) -$$
$$- 2P(y_1^{(i)}(X_m) \,\&\, y_0^{(i)}(X_m))$$

Согласно лемме 4.1.2, $y_1^{(i)}(X_m) \,\&\, y_0^{(i)}(X_m) = y_1^{(i)}(X_m)$, тогда

$$P(\Delta_{x_i} y(X_m)) = P(y_1^{(i)}(X_m)) + P(y_0^{(i)}(X_m)) - 2P(y_1^{(i)}(X_m)) =$$
$$= P(y_0^{(i)}(X_m)) - P(y_1^{(i)}(X_m)) = P_{c0}^i - P_{c1}^i, \quad P_{c1}^i = P(y_1^{(i)}(X_m)), \quad P_{c0}^i = P(y_0^{(i)}(X_m)).$$

Любую ФАЛ по любому аргументу можно разложить как

$$y = y_1^i x_i \vee y_0^i x_i',$$

тогда безопасность всей системы будет определяться как:

$$P_c = P(y_1^i x_i) + P(y_0^i x_i') = P_{c1}^i P_i + P_{c0}^i (1 - P_i).$$

Следовательно $\xi_i = \dfrac{\partial P_c}{\partial P_i} = \dfrac{\partial (P_{c1}^i P_i + P_{c0}^i (1 - P_i))}{\partial P_i} = P_{c1}^i - P_{c0}^i$.

Утверждение доказано.

Вкладом события x_i в безопасность системы назовем полную вероятность опасного функционирования системы, определяемую данным событием [4]:

$$B_i = P_i \cdot \xi_i. \qquad (4.6)$$

Относительный вклад [4]

$$v_i = \frac{B_i}{P_c}. \qquad (4.7)$$

4.2 Смысл определений веса, значимости и вклада элементов для немонотонных функций

Для вышеприведенных характеристик существуют формулы для их вычисления.

Значимость

$$\xi_i = P_{c1}^i - P_{c0}^i, \tag{4.8}$$

здесь $P_{c1}^i = P(y_1^i = 1), P_{c0}^i = P(y_0^i = 1)$ [4].

Вклад [4]

$$B_i = P_i \cdot \xi_i = P_c - P_{c0}^i. \tag{4.9}$$

Относительный вклад [4]

$$v_i = \frac{B_i}{P_c} = 1 - \frac{P_{c0}^i}{P_c} = \frac{\xi_i P_i}{P_c}. \tag{4.10}$$

Выражения (4.8) – (4.10) были выведены для монотонных функций, но их вывод не зависит от монотонности функции, поэтому они имеют место и для немонотонных ФАЛ. А именно, любую ФАЛ по любому аргументу можно разложить как

$$y = y_1^i x_i \vee y_0^i x_i',$$

тогда безопасность всей системы будет определяться как:

$$P_c = P(y_1^i x_i) + P(y_0^i x_i') = P_{c1}^i P_i + P_{c0}^i (1 - P_i).$$

Учитывая формулу (4.4), получаем (4.8), из чего следуют (4.9) и (4.10).

Для монотонных структур смысл формул (4.8)-(4.10) достаточно прозрачен. Вклад характеризует вероятностную добавку в безопасность системы, которую она получает при возникновении (не возникновении) данного события. При замене в монотонной логической функции x_i на 0, из

ФАЛ удаляются те конъюнкции, которые содержат i-ый элемент. Таким образом, из значения безопасности всей системы вычитается значение безопасности системы, которая была получена без учета путей развития аварии с i-ым событием.

Однако для немонотонных ФАЛ формулы (4.8)-(4.10) не столь очевидны. Замена i-ого элемента на 0 в некоторых конъюнкциях приведет к замене x_i' на единицу, и не «очистит» структуру от путей, содержащих i-ое событие. Аналогичные рассуждения относятся и к вычислению значимости.

4.3 Активность элементов немонотонных структур

Полученные в разделе 4.3 результаты опубликованы в [113].

И. А. Рябинин и Ю. М. Парфенов в работе [4] ссылаются на книгу J.Henley и H.Kumamoto [17], в которой приведен показатель, характеризующий активность в смысле отказа

$$I_i^{FV} = \frac{Q(S_i)}{Q_c} \equiv a_i(Q). \qquad (4.11)$$

Если условия работоспособности системы записаны через логическую функцию в ДНФ, то показатель идентичный (4.11) выразится соотношением

$$a_i(P) = \frac{P(\vee_j K_j)}{P_c}, \qquad (4.12)$$

где $P(\vee_j K_j)$ – вероятность безотказной работы системы, вычисленная только по тем конъюнкциям, которые содержат i-ый элемент. Активность (4.12) в книге [4] названа ***активностью элемента в смысле безотказности***. Это может быть легко переформулировано в терминах безопасности (элемент – событие, работоспособность – безопасность), но математическая форма не изменится.

Определения веса, значимости и вклада, приведенные выше, верны как для монотонных, так и для немонотонных ФАЛ, поскольку учитывают элементы, входящие в ФАЛ с отрицаниями. Активность же в таком определении учитывает только события без отрицания. Поэтому это определение не отражает реальной активности аргументов немонотонных функций, входящих с отрицаниями.

Более объективной, по мнению автора, будет следующая формула активности для немонотонных функций

$$a_i = \frac{P((\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L))}{P_c}, \qquad (4.13)$$

здесь $(\vee_j K_j)$ – конъюнкции, которые содержат x_i; $(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i'; $P((\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) = 1)$ – вероятность опасной работы системы, вычисленная по конъюнкциям, содержащих x_i и x_i'. При этом, формула (4.13) имеет смысл не только для немонотонных ФАЛ типа (2.3), но и для немонотонных функций типа (2.2), в которых конъюнкций $(\vee_j K_j)$ нет. Кроме того, (4.13) справедлива для монотонных ФАЛ, поскольку последние не содержат конъюнкции $(\vee_L K_L)$, и формула (4.13) превращается в (4.12).

Теорема 4.2: *Для активности, вычисленной по формуле (4.13), верно соотношение*

$$v_i \le a_i, \tag{4.14}$$

где v_i – относительный вклад i-го аргумента, а a_i – его активность.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

В общем виде любую немонотонную функцию алгебры логики можно представить в ДНФ:

$$y(X_m) = (\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q),$$

в которой $(\vee_j K_j)$ – конъюнкции, содержащие x_i (для ФАЛ типа (2.2.) таких конъюнкций не будет), $(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i', $(\vee_q K_q)$ – конъюнкции, не содержащие x_i и x_i'. Это можно записать в более удобной форме:

$$y = \begin{vmatrix} \vee_j\ K_j \\ \vee_L\ K_L \\ \vee_q\ K_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vee_j\ (K_{j1} \,\&\, x_i) \\ \vee_L\ (K_{L1} \,\&\, x_i') \\ \vee_q\ K_q \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$y_{x_i'}(X_m)=\begin{vmatrix}\vee_j\ K_{jx_i'}\\ \vee_L\ K_{Lx_i}\\ \vee_q\ K_q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vee_j\ (K_{j1}\ \&\ x_i')\\ \vee_L\ (K_{L1}\ \&\ x_i)\\ \vee_q\ K_q\end{vmatrix};\quad y_0^i=\begin{vmatrix}\vee_L\ K_{L1}\\ \vee_q\ K_q\end{vmatrix};\quad y_1^i=,\begin{vmatrix}\vee_j\ K_{j1}\\ \vee_q\ K_q\end{vmatrix},$$

где $(\vee_j K_{jx_i'})$, $(\vee_j K_{j1})$ – конъюнкции, в которых аргумент x_i заменен на x_i' и единицу соответственно; $(\vee_L K_{Lx_i})$, $(\vee_L K_{L1})$ – конъюнкции, в которых аргумент x_i' заменен на x_i и единицу соответственно.

Тогда вероятность истинности логической функции будет вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned}&P_c=P(y(X_m)=1)=P(((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))+P(\underset{q}{\vee}K_q)-\\&-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))).\end{aligned}$$

После раскрытия скобок имеем:

$$\begin{aligned}&P_c=P(((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))+P(\underset{q}{\vee}K_q)-\\&-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i')).\end{aligned}$$

Учитывая, что элемент x_i уже исключен из указанных конъюнкций и рассматривается отдельно, получаем

$$\begin{aligned}&P_c=P(((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))+P(\underset{q}{\vee}K_q)-\\&-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i))-P(((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i')).\end{aligned}$$

Поскольку $P(x_i)=P_i, P(x_i')=(1-P_i)$, то

$$\begin{aligned}&P_c=P(((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))+P(\underset{q}{\vee}K_q)-\\&-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{j}{\vee}K_{j1}))P_i-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1}))P(x_i')=\\&=P(((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))+\underline{P(\underset{q}{\vee}K_q)}-\\&-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{j}{\vee}K_{j1}))P_i-\underline{P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1}))}+P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1}))P_i.\end{aligned}$$

Так как $P_{c0}=P(y_0^i=1)=P(\underset{L}{\vee}K_{L1})+P(\underset{q}{\vee}K_q)-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1}))$,

$$\begin{aligned}&P_c=P(((\underset{j}{\vee}K_{j1})\ \&\ x_i)\vee((\underset{L}{\vee}K_{L1})\ \&\ x_i'))-P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{j}{\vee}K_{j1}))P_i+\\&\underline{+P((\underset{q}{\vee}K_q)\ \&\ (\underset{L}{\vee}K_{L1}))}P_i+P_{c0}-P((\underset{L}{\vee}K_{L1})).\end{aligned}$$

Учитывая, что $P((\underset{q}{\vee} K_q) \& (\underset{L}{\vee} K_{L1})) = P(\underset{L}{\vee} K_{L1})P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1}))$, находим:

$$P_c = P(((\underset{j}{\vee} K_{j1}) \& x_i) \vee ((\underset{L}{\vee} K_{L1}) \& x_i')) + P_{c0}^i -$$
$$- P((\underset{q}{\vee} K_q) \& (\underset{j}{\vee} K_{j1}))P_i + P_i P(\underset{L}{\vee} K_{L1})P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1})) - P(\underset{L}{\vee} K_{L1}).$$

Приводя подобные члены, получаем

$$P_c = P(((\underset{j}{\vee} K_{j1}) \& x_i) \vee ((\underset{L}{\vee} K_{L1}) \& x_i')) + P_{c0}^i -$$
$$- P((\underset{q}{\vee} K_q) \& (\underset{j}{\vee} K_{j1}))P_i + P(\underset{L}{\vee} K_{L1})[P_i P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1})) - 1] =$$
$$= P(((\underset{j}{\vee} K_{j1}) \& x_i) \vee ((\underset{L}{\vee} K_{L1}) \& x_i')) + P_{c0}^i -$$
$$- P((\underset{q}{\vee} K_q) \& (\underset{j}{\vee} K_{j1}))P_i - P(\underset{L}{\vee} K_{L1})[1 - P_i P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1}))] =$$
$$= P(((\underset{j}{\vee} K_{j1}) \& x_i) \vee ((\underset{L}{\vee} K_{L1}) \& x_i')) + P_{c0}^i -$$
$$- [P((\underset{q}{\vee} K_q) \& (\underset{j}{\vee} K_{j1}))P_i + P(\underset{L}{\vee} K_{L1})[1 - P_i P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1}))]].$$

Так как $[1 - P_i P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1}))] \geq 0$, то

$$[P((\underset{q}{\vee} K_q) \& (\underset{j}{\vee} K_{j1}))P_i + P(\underset{L}{\vee} K_{L1})[1 - P_i P((\underset{q}{\vee} K_q) | (\underset{L}{\vee} K_{L1}))]] \geq 0,$$

следовательно, $P_c - P_{c0}^i \leq P(((\underset{j}{\vee} K_{j1}) \& x_i) \vee ((\underset{L}{\vee} K_{L1}) \& x_i'))$, тогда справедливо следующее неравенство:

$$v_i = \frac{P_c - P_{c0}^i}{P_c} \leq \frac{P(((\underset{j}{\vee} K_{j1}) \& x_i) \vee ((\underset{L}{\vee} K_{L1}) \& x_i'))}{P_c} = a_i \Rightarrow v_i \leq a_i.$$

Теорема доказана.

4.4 Основные результаты

В данном разделе показано, что все основные определения показателей важности для одного аргумента монотонных ФАЛ, за исключением определения активности, могут применяться и для оценки важности аргументов любых немонотонных ФАЛ. Показано, что ряд утверждений, справедливых для монотонных ФАЛ, не распространяются на немонотонные ФАЛ типа (2.3): лемма 4.1.1, теорема 4.1.1. Для немонотонных функций типа (2.2) предложена альтернативная лемма 4.1.2 и доказанная на ее основе теорема 4.1.2. Новым результатом является предложенное определение активности, справедливое для любых ФАЛ, и доказанная для него теорема о связи с относительным вкладом.

5 Характеристики важности для двух событий немонотонной функции алгебры логики

Полученные в разделе 5 результаты, за исключением леммы 5.2.2, опубликованы в [114] и [115].

5.1 Определения и теоремы

Двукратная булева разность <u>любой</u> функции $y(X_m)$ по аргументам x_i и x_j есть выражение [4]

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \Delta_{x_i}[\Delta_{x_j} y(X_m)]. \tag{5.1}$$

Двойная булева разность <u>любой</u> функции $y(X_m)$ по аргументам x_i и x_j есть результат сложения по модулю два исходной функции $y(X_m)$ и симметричной с ней функции $y_{x_i' x_j'}(X_m) = y(x_1,...,x_{i-1},x_i',x_{i+1},...,x_{j-1},x_j',x_{j+1},...,x_m)$ [4]:

$$\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = y(X_m) \oplus y_{x_i' x_j'}(X_m) = y \,\&\, y'_{x_i' x_j'} \vee y' \,\&\, y_{x_i' x_j'} = \begin{vmatrix} y & y'_{x_i' x_j'} \\ y' & y_{x_i' x_j'} \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Лемма 5.1: *Двукратная булева разность <u>любой</u> ФАЛ не зависит от порядка аргументов, по которым она вычисляется, т. е.*

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \Delta\Delta_{x_j x_i} y(X_m). \tag{5.3}$$

Доказательство данной леммы одинаково для монотонных и немонотонных ФАЛ и приведено в [4].

Лемма 5.2.1: *Двойная нулевая функция по аргументам x_i и x_j является импликантой нулевой единичной (единичной нулевой) функции по тем же* *аргументам, которая, в свою очередь, является импликантой двойной единичной функции для всех монотонных ФАЛ, т. е. имеют место включения*

$$\begin{aligned}&[y_{00}^{i,j}] \subseteq [y_{01}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{11}^{i,j}];\\&[y_{00}^{i,j}] \subseteq [y_{10}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{11}^{i,j}].\end{aligned} \qquad (5.4.1)$$

Для немонотонных функций типа (2.3) данная лемма (5.4.1) не выполняется.

Доказательство невыполнения леммы 5.2.1 для немонотонных ФАЛ типа (2.3):

Представим логическую функцию в виде $y(X_m) = П_i \vee П_{i'} \vee П_j \vee П_{j'} \vee П_{ij} \vee П_{i'j} \vee П_{ij'} \vee П_{i'j'} \vee K_m$, где $П_i, П_{i'}, П_j, П_{j'}, П_{ij}, П_{i'j}, П_{ij'}, П_{i'j'}, K_m$ - конъюнкции, содержащие элементы соответственно x_i, x_i', x_j, x_j', $(x_i,\ x_j)$, $(x_i',\ x_j)$, $(x_i,\ x_j')$, $(x_i',\ x_j')$, не содержащие $(x_i,\ x_i',\ x_j,\ x_j')$. Рассмотрим функции $y_{00}, y_{01}, y_{10}, y_{11}$ конъюнкции (далее в обозначениях $y_{00}^{i,j}, y_{01}^{i,j}, y_{10}^{i,j}, y_{11}^{i,j}$ верхние индексы опущены). Схематично присутствие аргументов x_i, x_i', x_j, x_j' в данных функциях можно представить следующим образом:

	y	y_{00}	y_{10}	y_{01}	y_{11}
$П_i$	x_i	–	1	–	1
$П_{i'}$	x_i'	1	–	1	–
$П_j$	x_j	–	–	1	1
$П_{j'}$	x_j'	1	1	–	–
$П_{ij}$	$x_i x_j$	–	–	–	1,1
$П_{i'j}$	$x_i' x_j$	–	–	1,1	–
$П_{ij'}$	$x_i x_j'$	–	1,1	–	–
$П_{i'j'}$	$x_i' x_j'$	1, 1	–	–	–
K_m	K_m	K_m	K_m	K_m	K_m

Для удобства в функциях обозначено только присутствие элементов x_i, x_i', x_j, x_j'. В конъюнкциях $П_i, П_{i'}, П_j, П_{j'}, П_{ij}, П_{i'j}, П_{ij'}, П_{i'j'}, K_m$ на соответствующих местах стоят нули или единицы. Конъюнкции, в которых аргумент принимает значение ноль, обнуляются, поэтому на их месте стоят прочерки. При таком представлении наглядно видно, что ни одна из рассматриваемых функций не может быть включена ни в другую, ни в объединение нескольких функций, поскольку конъюнкции $\Pi_{ij}, \Pi_{i'j}, \Pi_{ij'}, \Pi_{i'j'}$ для них имеются только в одном экземпляре.

Утверждение доказано.

Лемма 5.2.2: *Двойная единичая функция по аргументам* x_i *и* x_j *является импликантой нулевой единичной (единичной нулевой) функции по тем же аргументам, которая, в свою очередь, является импликантой двойной нулеой функции для всех немонотонных ФАЛ* *типа (2.2)*, *т. е. имеют место включения*

$$\begin{aligned} &[y_{11}^{i,j}] \subseteq [y_{01}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{00}^{i,j}]; \\ &[y_{11}^{i,j}] \subseteq [y_{10}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{00}^{i,j}]. \end{aligned} \qquad (5.4.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Представим логическую функцию в виде $y(X_m) = \Pi_{i'} \vee \Pi_{j'} \vee \Pi_{i'j'} \vee K_m$, где $\Pi_{i'}, \Pi_{j'}, \Pi_{i'j'}, K_m$ - конъюнкции, содержащие элементы соответственно x_i', x_j', (x_i', x_j'), не содержащие (x_i', x_j'). Рассмотрим функции $y_{00}, y_{01}, y_{10}, y_{11}$ конъюнкции (далее в обозначениях $y_{00}^{i,j}, y_{01}^{i,j}, y_{10}^{i,j}, y_{11}^{i,j}$ верхние индексы опущены). Схематично присутствие аргументов x_i, x_i', x_j, x_j' в данных функциях можно представить следующим образом:

	y	y_{00}	y_{10}	y_{01}	y_{11}
$\Pi_{i'}$	x_i'	1	–	1	–
$\Pi_{j'}$	x_j'	1	1	–	–
$\Pi_{i'j'}$	$x_i'x_j'$	1,1	–	–	–
K_m	K_m	K_m	K_m	K_m	K_m

Для удобства в функциях обозначено только присутствие элементов x_i', x_j'. В конъюнкциях $\Pi_{i'}, \Pi_{j'}, \Pi_{i'j'}, K_m$ на соответствующих местах стоят нули или единицы. Конъюнкции, в которых аргумент принимает значение ноль, обнуляются, поэтому на их месте стоят прочерки. При таком представлении наглядно видно, что включение (5.4.2) имеет место.

Утверждение доказано.

Лемма 5.3: *Двукратная булева разность <u>любой</u> ФАЛ по аргументам x_i и x_j может быть вычислена по формуле*

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{l} y_{11}y'_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{01}y_{00} \\ y_{11}y_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \end{array} \right| \qquad (5.5)$$

(для монотонных ФАЛ указанные конъюнкции равны нулю, и

$$y'_{10}y'_{00} = y'_{10}, y_{11}y_{10} = y_{10}$$

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{l} y_{11}y'_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{01}y_{00} \\ y_{11}y_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \end{array} \right| \begin{array}{c} = y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ = y_{10}y_{01}y'_{00} \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} = \left| \begin{array}{l} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y_{10}y_{01}y'_{00} \end{array} \right|,$$

следовательно, получаем формулу (5.110) из [4])

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = y_{11} \oplus y_{10} \oplus y_{01} \oplus y_{00} = (y_{11} \oplus y_{00}) \oplus (y_{10} \oplus y_{01}) =$$
$$= (y_{11} \,\&\, y'_{00} \vee y'_{11} \,\&\, y_{00}) \oplus (y_{10} \,\&\, y'_{01} \vee y'_{10} \,\&\, y_{01}) = ab' \vee a'b =$$

$$
= a\begin{vmatrix} y'_{10} \\ y_{01} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_{10} \\ y'_{01} \end{vmatrix} \vee b\begin{vmatrix} y'_{11} \\ y_{00} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_{11} \\ y'_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11}y'_{00} \\ y'_{11}y_{00} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y'_{10}y'_{01} \\ y_{10}y_{01} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} y_{10}y'_{01} \\ y'_{10}y_{01} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y'_{11}y'_{00} \\ y_{11}y_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y_{00} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} y'_{11}y_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y_{11}y_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y_{01}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{01}y_{00} \end{vmatrix}.
$$

Таким образом, ***лемма доказана.***

Лемма 5.4: *Двойная булева разность* <u>*любой*</u> *ФАЛ по аргументам x_i и x_j может быть вычислена по формуле*

$$
\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} x_i x_j \\ x'_i x'_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_{11}y'_{00} \\ y'_{11}y_{00} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_i x_j \\ x_i x'_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_{10}y'_{01} \\ y'_{10}y_{01} \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| \qquad (5.6)
$$

(для монотонных ФАЛ $y'_{11}y_{00} = 0$, следовательно, получаем формулу (5.111) из [4])

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $y(X_m)$ и $y_{x'_i x'_j}(X_m)$ можно представить в виде

$$
y(X_m) = x_i x_j y_{11} \vee x'_i x_j y_{01} \vee x_i x'_j y_{10} \vee x'_i x'_j y_{00} = \begin{vmatrix} x_i x_j y_{11} \\ x'_i x_j y_{01} \\ x_i x'_j y_{10} \\ x'_i x'_j y_{00} \end{vmatrix},
$$

$$
y_{x'_i x'_j}(X_m) = x'_i x'_j y_{11} \vee x_i x'_j y_{01} \vee x'_i x_j y_{10} \vee x_i x_j y_{00} = \begin{vmatrix} x'_i x'_j y_{11} \\ x_i x'_j y_{01} \\ x'_i x_j y_{10} \\ x_i x_j y_{00} \end{vmatrix}.
$$

Тогда, подставляя в формулу для вычисления двойной булевой разности функции $y(X_m)$ и $y_{x'_i x'_j}(X_m)$, представленные в таком виде, и проведя все необходимые упрощения, получим.

$$\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = y(X_m) \oplus y_{x_i' x_j'}(X_m) = \left| \begin{array}{c} x_i x_j y_{11} \\ x_i' x_j y_{01} \\ x_i x_j' y_{10} \\ x_i' x_j' y_{00} \end{array} \right| \& \begin{array}{|c|c|c|c|} x_i & x_i' & x_i & x_i' \\ x_j & x_j & x_j' & x_j' \\ y_{11}' & y_{01}' & y_{10}' & y_{00}' \end{array} \vee \begin{array}{|c|c|c|c|} x_i' & x_i & x_i' & x_i \\ x_j' & x_j' & x_j & x_j \\ y_{11}' & y_{01}' & y_{10}' & y_{00}' \end{array} \& \left| \begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} \\ x_i x_j' y_{01} \\ x_i' x_j y_{10} \\ x_i x_j y_{00} \end{array} \right|$$

$$\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{c} x_i x_j y_{11} \\ x_i' x_j y_{01} \\ x_i x_j' y_{10} \\ x_i' x_j' y_{00} \end{array} \right| \& \begin{array}{|c|c|} x_i x_j & x_i x_j' \\ x_i y_{01}' & x_i y_{00}' \\ x_i' x_j & x_i' x_j' \\ x_j & x_j' \\ x_j y' & x_j' y_{00}' \\ x_i' y_{11}' & x_i' y_{10}' \\ x_j y_{11}' & x_j' y_{10}' \\ y_{11}' y_{01}' & y_{10}' y_{00}' \end{array} \vee \begin{array}{|c|c|} x_i' x_j' & x_i' x_j \\ x_i' y_{01}' & x_i' y_{00}' \\ x_i x_j' & x_i x_j \\ x_j' & x_j \\ x_j' y_{01}' & x_j y_{00}' \\ x_i y_{11}' & x_i y_{10}' \\ x_j' y_{11}' & x_j y_{10}' \\ y_{11}' y_{01}' & y_{10}' y_{00}' \end{array} \& \left| \begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} \\ x_i x_j' y_{01} \\ x_i' x_j y_{10} \\ x_i x_j y_{00} \end{array} \right| =$$

упрощая, получаем

$$= \left| \begin{array}{c} x_i x_j y_{11} \\ x_i' x_j y_{01} \\ x_i x_j' y_{10} \\ x_i' x_j' y_{00} \end{array} \right| \& \begin{array}{|c|c|} x_j & x_j' \\ x_i y_{01}' & x_i y_{00}' \\ x_i' y_{11}' & x_i' y_{10}' \\ y_{11}' y_{01}' & y_{10}' y_{00}' \end{array} \vee \begin{array}{|c|c|} x_j' & x_j \\ x_i' y_{01}' & x_i' y_{00}' \\ x_i y_{11}' & x_i y_{10}' \\ y_{11}' y_{01}' & y_{10}' y_{00}' \end{array} \& \left| \begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} \\ x_i x_j' y_{01} \\ x_i' x_j y_{10} \\ x_i x_j y_{00} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x_i x_j y_{11} \\ x_i' x_j y_{01} \\ x_i x_j' y_{10} \\ x_i' x_j' y_{00} \end{array} \right| \& \left| \begin{array}{c} x_i x_j y_{00}' \\ x_i' x_j y_{10}' \\ x_j y_{10}' y_{00}' \\ x_i x_j' y_{01}' \\ x_i y_{01}' y_{00}' \\ x_i y_{10}' y_{01}' y_{00}' \\ x_i' x_j' y_{11}' \\ x_i' y_{11}' y_{10}' \\ x_i' y_{11}' y_{10}' y_{00}' \\ x_j' y_{11}' y_{01}' \\ x_i y_{11}' y_{01}' y_{00}' \\ x_i' y_{11}' y_{01}' y_{10}' \\ y_{11}' y_{10}' y_{01}' y_{00}' \end{array} \right| \vee \left| \begin{array}{c} x_i' x_j' y_{00}' \\ x_i x_j' y_{10}' \\ x_j' y_{10}' y_{00}' \\ x_i' x_j y_{01}' \\ x_i' y_{01}' y_{00}' \\ x_i' y_{10}' y_{01}' y_{00}' \\ x_i x_j y_{11}' \\ x_i y_{11}' y_{10}' \\ x_i y_{11}' y_{10}' y_{00}' \\ x_j y_{11}' y_{01}' \\ x_i' y_{11}' y_{01}' y_{00}' \\ x_i y_{11}' y_{10}' y_{01}' \\ y_{11}' y_{10}' y_{01}' y_{00}' \end{array} \right| \& \left| \begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} \\ x_i x_j' y_{01} \\ x_i' x_j y_{10} \\ x_i x_j y_{00} \end{array} \right| =$$

$$
=\left|\begin{array}{c} x_i x_j y_{11} \\ x_i' x_j y_{01} \\ x_i x_j' y_{10} \\ x_i' x_j' y_{00} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c} x_i x_j y_{00}' \\ x_i' x_j y_{10}' \\ x_j y_{10}' y_{00}' \\ x_i x_j' y_{01}' \\ x_i y_{01}' y_{00}' \\ x_i' x_j' y_{11}' \\ x_i' y_{11}' y_{10}' \\ x_j' y_{11}' y_{01}' \\ y_{11}' y_{10}' y_{01}' y_{00}' \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c} x_i' x_j' y_{00}' \\ x_i \bar{x}_j y_{10}' \\ x_j' y_{10}' y_{00}' \\ x_i' x_j y_{01}' \\ x_i' y_{01}' y_{00}' \\ x_i x_j y_{11}' \\ x_i y_{11}' y_{10}' \\ x_j y_{11}' y_{01}' \\ y_{11}' y_{10}' y_{01}' y_{00}' \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} \\ x_i x_j' y_{01} \\ x_i' x_j y_{10} \\ x_i x_j y_{00} \end{array}\right| =
$$

$$
=\left|\begin{array}{c} x_i x_j y_{11} y_{00}' \\ x_i x_j y_{11} y_{10}' y_{00}' \\ x_i x_j y_{11} y_{01}' y_{00}' \\ x_i' x_j y_{01} y_{10}' \\ x_i' x_j y_{01} y_{10}' y_{00}' \\ x_i' x_j y_{01} y_{11}' y_{10}' \\ x_i x_j' y_{10} y_{01}' \\ x_i x_j' y_{10} y_{01}' y_{00}' \\ x_i x_j' y_{10} y_{11}' y_{01}' \\ x_i' x_j' y_{00} y_{11}' \\ x_i' x_j' y_{00} y_{11}' y_{10}' \\ x_i' x_j' y_{00} y_{11}' y_{01}' \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} y_{00}' \\ x_i' x_j' y_{11} y_{10}' y_{00}' \\ x_i' x_j' y_{11} y_{01}' y_{00}' \\ x_i x_j' y_{01} y_{10}' \\ x_i x_j' y_{01} y_{10}' y_{00}' \\ x_i x_j' y_{01} y_{11}' y_{10}' \\ x_i' x_j y_{10} y_{01}' \\ x_i' x_j y_{10} y_{01}' y_{00}' \\ x_i' x_j y_{10} y_{11}' y_{01}' \\ x_i x_j y_{00} y_{11}' \\ x_i x_j y_{00} y_{11}' y_{10}' \\ x_i x_j y_{00} y_{11}' y_{01}' \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x_i x_j y_{11} y_{00}' \\ x_i' x_j y_{01} y_{10}' \\ x_i x_j' y_{10} y_{01}' \\ x_i' x_j' y_{00} y_{11}' \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c} x_i' x_j' y_{11} y_{00}' \\ x_i x_j' y_{01} y_{10}' \\ x_i' x_j y_{10} y_{01}' \\ x_i x_j y_{00} y_{11}' \end{array}\right| = \left\|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{array}\right| y_{11} y_{00}' \\ \left|\begin{array}{c} x_i' x_j \\ x_i x_j' \end{array}\right| y_{01} y_{10}' \\ \left|\begin{array}{c} x_i x_j' \\ x_i' x_j \end{array}\right| y_{10} y_{01}' \\ \left|\begin{array}{c} x_i' x_j' \\ x_i x_j \end{array}\right| y_{00} y_{11}' \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} \left|x_i x_j\right| \left|y_{11} y_{00}'\right| \\ \left|x_i' x_j'\right| \left|y_{11}' y_{00}\right| \\ \left|x_i' x_j\right| \left|y_{10}' y_{01}\right| \\ \left|x_i x_j'\right| \left|y_{10} y_{01}'\right| \end{array}\right\| .
$$

Лемма доказана.

Лемма 5.5: *Для <u>любой</u> ФАЛ логическое произведение булевых разностей от одной и той же функции по аргументам* x_i *и* x_j *может быть вычислено по формуле*

$$
\Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m) = \left|\begin{array}{c} x_i x_j \left|\begin{array}{c} y_{11} y_{10}' y_{01}' \\ y_{11}' y_{10} y_{01} \end{array}\right| \\ x_i' x_j \left|\begin{array}{c} y_{11} y_{01}' y_{00} \\ y_{11}' y_{01} y_{00}' \end{array}\right| \\ x_i x_j' \left|\begin{array}{c} y_{11}' y_{10} y_{00}' \\ y_{11} y_{10}' y_{00} \end{array}\right| \\ x_i' x_i' \left|\begin{array}{c} y_{10} y_{01} y_{00}' \\ y_{10}' y_{01}' y_{00} \end{array}\right| \end{array}\right| \qquad (5.7)
$$

(для монотонных ФАЛ указанные конъюнкции равны нулю

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m) = \left|\begin{matrix} x_i x_j \left|\begin{matrix} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \end{matrix}\right| \\ x'_i x_j \left|\begin{matrix} y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \end{matrix}\right| \\ x_i x'_j \left|\begin{matrix} y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \end{matrix}\right| \\ x'_i x'_i \left|\begin{matrix} y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{matrix}\right| \end{matrix}\right| \begin{matrix} \ldots\ldots \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ \ldots\ldots \\ =0 \end{matrix} = \left|\begin{matrix} x_i x_j y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ x'_i x'_i y_{10} y_{01} y'_{00} \end{matrix}\right|,$$

следовательно, получаем формулу (5.115) из [4])

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$\Delta_{x_i} y(X_m) = y_1^i \oplus y_0^i = y_1^i (y_0^i)' \vee (y_1^i)' y_0^i = (x_j y_{11} \vee x'_j y_{10}) \oplus (x_j y_{01} \vee x'_j y_{00}) =$$

$$= \left|\begin{matrix} x_j y_{11} \\ x'_j y_{10} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x'_j \\ y'_{01} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x_j \\ y'_{00} \end{matrix}\right| \vee \left|\begin{matrix} x_j y_{01} \\ x'_j y_{00} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x'_j \\ y'_{11} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x_j \\ y'_{10} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_j y_{11} \\ x'_j y_{10} \end{matrix}\right| \& \left|\begin{matrix} x'_j y'_{00} \\ x_j y'_{01} \\ y'_{01} y'_{00} \end{matrix}\right| \vee \left|\begin{matrix} x_j y_{01} \\ x'_j y_{00} \end{matrix}\right| \& \left|\begin{matrix} x'_j y'_{10} \\ x_j y'_{11} \\ y'_{11} y'_{10} \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{11} y'_{01} y'_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{01} y'_{00} \end{matrix}\right| \vee \left|\begin{matrix} x_j y_{01} y'_{11} \\ x_j y_{01} y'_{11} y'_{10} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \\ x'_j y_{00} y'_{11} y'_{10} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_j \left|\begin{matrix} y_{11} y'_{01} \\ y'_{11} y_{01} \end{matrix}\right| \\ x'_j \left|\begin{matrix} y_{10} y'_{00} \\ y'_{10} y_{00} \end{matrix}\right| \end{matrix}\right|$$

$$\Delta_{x_j} y(X_m) = y_1^j \oplus y_0^j = y_1^j (y_0^j)' \vee (y_1^j)' y_0^j = (x_i y_{11} \vee x'_i y_{01}) \oplus (x_i y_{10} \vee x'_i y_{00}) =$$

$$= \left|\begin{matrix} x_i y_{11} \\ x'_i y_{01} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x'_i \\ y'_{10} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x_i \\ y'_{00} \end{matrix}\right| \vee \left|\begin{matrix} x_i y_{10} \\ x'_i y_{00} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x'_i \\ y'_{11} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x_i \\ y'_{01} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_i y_{11} \\ x'_i y_{01} \end{matrix}\right| \& \left|\begin{matrix} x'_i y'_{00} \\ x_i y'_{10} \\ y'_{10} y'_{00} \end{matrix}\right| \vee \left|\begin{matrix} x_i y_{10} \\ x'_i y_{00} \end{matrix}\right| \& \left|\begin{matrix} x'_i y'_{01} \\ x_i y'_{11} \\ y'_{11} y'_{01} \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{11} y'_{10} y'_{00} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{01} y'_{10} y'_{00} \end{matrix}\right| \vee \left|\begin{matrix} x_i y_{10} y'_{11} \\ x_i y_{10} y'_{11} y'_{01} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \\ x'_i y_{00} y'_{11} y'_{01} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_i \left|\begin{matrix} y_{11} y'_{10} \\ y'_{11} y_{10} \end{matrix}\right| \\ x'_i \left|\begin{matrix} y_{01} y'_{00} \\ y'_{01} y_{00} \end{matrix}\right| \end{matrix}\right|$$

Значит,

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i x_j y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ x'_i x_j y_{11} y_{00} y'_{01} \\ x_i x_j y_{10} y_{01} y'_{11} \\ x'_i x_j y_{01} y'_{11} y'_{00} \\ x_i x'_j y_{10} y'_{11} y'_{00} \\ x'_i x'_j y_{10} y_{01} y'_{00} \\ x_i x'_j y_{11} y_{00} y'_{10} \\ x'_i x'_j y_{00} y'_{10} y'_{01} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i x_j \begin{vmatrix} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \end{vmatrix} \\ x'_i x_j \begin{vmatrix} y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \end{vmatrix} \\ x_i x'_j \begin{vmatrix} y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \end{vmatrix} \\ x'_i x'_j \begin{vmatrix} y_{10} y'_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Лемма доказана.

Лемма 5.6: *Для* <u>*любой*</u> *ФАЛ логическую сумму булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j можно вычислить по формуле*

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y'_{11} y_{10} \\ x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y'_{11} y_{01} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y'_{01} y_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y'_{10} y_{00} \end{vmatrix} \tag{5.8}$$

(для монотонных ФАЛ указанные конъюнкции равны нулю

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y'_{11} y_{10} \\ x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y'_{11} y_{01} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y'_{01} y_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y'_{10} y_{00} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ =0 \\ \\ =0 \\ \\ =0 \\ \\ =0 \end{array} = \begin{vmatrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_j y_{11} y'_{01} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \end{vmatrix},$$

следовательно, получаем формулу (5.116) из [4])

Д о к а з а т е л ь с т в о: Учитывая найденные при доказательстве леммы 5.5

$$\Delta_{x_i} y(X_m) = \left\| \begin{array}{l} x_j \left| \begin{array}{l} y_{11}y'_{01} \\ y'_{11}y_{01} \end{array} \right| \\ x'_j \left| \begin{array}{l} y_{10}y'_{00} \\ y'_{10}y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right\|, \quad \Delta_{x_j} y(X_m) = \left\| \begin{array}{l} x_i \left| \begin{array}{l} y_{11}y'_{10} \\ y'_{11}y_{10} \end{array} \right| \\ x'_i \left| \begin{array}{l} y_{01}y'_{00} \\ y'_{01}y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right\|,$$ получаем (5.8).

Лемма доказана.

Лемма 5.7: *Для <u>любой</u> ФАЛ результат сложения по модулю два булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j может быть определен по формуле*

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m) = \left\| \begin{array}{l|l} x_i x_j & y'_{10}y_{01} \\ x'_i x'_i & y_{10}y'_{01} \\ x'_i x_j & y_{11}y'_{00} \\ x_i x'_j & y'_{11}y_{00} \end{array} \right\| \qquad (5.9)$$

(для монотонных ФАЛ указанные конъюнкции равны нулю

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m) = \left\| \begin{array}{l|l} x_i x_j & y'_{10}y_{01} \\ x'_i x'_i & y_{10}y'_{01} \\ x'_i x_j & y_{11}y'_{00} \\ x_i x'_j & y'_{11}y_{00} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots \\ =0 \end{array} = \left\| \begin{array}{l|l} x_i x_j & y'_{10}y_{01} \\ x'_i x'_i & y_{10}y'_{01} \\ x'_i x_j & y_{11}y'_{00} \\ x_i x'_j & \end{array} \right\|,$$

следовательно, получаем формулу (5.117) из [4])

Д о к а з а т е л ь с т в о: Учитывая полученные при доказательстве леммы 5 $\Delta_{x_i} y(X_m)$ и $\Delta_{x_j} y(X_m)$, получаем

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{l} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{array} \right| \oplus \left| \begin{array}{l} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{array} \right| \& \left| \begin{array}{c|c|c|c} x'_j & x'_j & x_j & x_j \\ y'_{11} & y'_{01} & y'_{01} & y'_{00} \\ y_{01} & y_{11} & y_{00} & y_{10} \end{array} \right| \vee \left| \begin{array}{l} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{array} \right| \& \left| \begin{array}{c|c|c|c} x'_i & x'_i & x_i & x_i \\ y'_{11} & y'_{10} & y'_{01} & y'_{00} \\ y_{10} & y_{11} & y_{00} & y_{01} \end{array} \right| =$$

$$
=\left|\begin{array}{c} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c|c} x'_j & x_j \\ x'_j y'_{01} & x_j y'_{00} \\ x'_j y_{11} & x_j y_{10} \\ x'_j y'_{11} & x_j y'_{10} \\ y'_{11} y'_{01} & y'_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{01} & x_j y_{00} \\ y_{01} y_{11} & y_{10} y_{00} \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c|c} x'_i & x_i \\ x'_i y'_{10} & x_i y'_{00} \\ x'_i y_{11} & x_i y_{01} \\ x'_i y'_{11} & x_i y'_{01} \\ y'_{11} y'_{10} & y'_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{10} & x_i y_{00} \\ y_{11} y_{10} & y_{01} y_{00} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{array}\right| =
$$

$$
=\left|\begin{array}{c} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c|c} x'_j & x_j \\ y'_{11} y'_{01} & y'_{10} y'_{00} \\ y_{11} y_{01} & y_{10} y_{00} \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c|c} x'_i & x_i \\ y'_{11} y'_{10} & y'_{01} y'_{00} \\ y_{10} y_{11} & y_{01} y_{00} \end{array}\right| =
$$

$$
=\left|\begin{array}{c} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y_{10} y'_{11} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{00} y'_{01} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c} x'_j y'_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{10} y_{00} \\ x_j y'_{11} y'_{01} \\ y'_{11} y'_{10} y'_{01} y'_{00} \\ y'_{11} y_{10} y'_{01} y_{00} \\ x_j y_{11} y_{01} \\ y_{11} y'_{10} y_{01} y'_{00} \\ y_{11} y_{10} y_{01} y_{00} \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c} x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y_{01} y'_{11} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y_{00} y'_{10} \end{array}\right| \& \left|\begin{array}{c} x'_i y'_{01} y'_{00} \\ x'_i y_{01} y_{00} \\ x_i y'_{11} y'_{10} \\ y'_{11} y'_{10} y'_{01} y'_{00} \\ y'_{11} y'_{10} y_{01} y_{00} \\ x_i y_{11} y_{10} \\ y_{11} y_{10} y'_{01} y'_{00} \\ y_{11} y_{10} y_{01} y_{00} \end{array}\right| =
$$

$$
=\left|\begin{array}{c|c} x_i y_{11} y'_{10} & x'_j y'_{10} y'_{00} \\ x_i y_{10} y'_{11} & x'_j y_{10} y_{00} \\ x'_i y_{01} y'_{00} & x_j y'_{11} y'_{01} \\ x'_i y_{00} y'_{01} & x_j y_{11} y_{01} \end{array}\right| \vee \left|\begin{array}{c|c} x_j y_{11} y'_{01} & x'_i y'_{01} y'_{00} \\ x_j y_{01} y'_{11} & x'_i y_{01} y_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} & x_i y'_{11} y'_{10} \\ x'_j y_{00} y'_{10} & x_i y_{11} y_{10} \end{array}\right| =
$$

$$
=\left|\begin{array}{l}
x_i x'_j y_{11} y'_{10} y'_{00}\\
x_i x_j y_{11} y_{01} y'_{10}\\
x_i x'_j y_{10} y_{00} y'_{11}\\
x_i x_j y_{10} y'_{11} y'_{01}\\
x'_i x'_j y_{01} y'_{10} y'_{00}\\
x'_i x_j y_{01} y'_{11} y'_{00}\\
x'_i x'_j y_{10} y_{00} y'_{01}\\
x'_i x_j y_{00} y'_{11} y'_{01}
\end{array}\right|
\vee
\left|\begin{array}{l}
x'_i x_j y_{11} y'_{01} y'_{00}\\
x_i x_j y_{11} y_{10} y'_{01}\\
x'_i x_j y_{01} y_{00} y'_{11}\\
x_i x_j y_{01} y'_{11} y'_{10}\\
x'_i x'_j y_{10} y'_{01} y'_{00}\\
x_i x'_j y_{11} y_{10} y'_{00}\\
x'_i x'_j y_{01} y_{00} y'_{10}\\
x_i x'_j y_{00} y'_{11} y'_{10}
\end{array}\right|
=
\left|\begin{array}{ll}
x_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y'_{00}\\ y'_{11} y_{10} y_{00}\end{array}\right|\\
x_i x_j & \left|\begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y_{01}\\ y'_{11} y_{10} y'_{01}\end{array}\right|\\
x'_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y'_{10} y_{01} y'_{00}\\ y_{10} y'_{01} y_{00}\end{array}\right|\\
x'_i x_j & \left|\begin{array}{l} y'_{11} y_{10} y_{00}\\ y'_{11} y'_{01} y_{00}\end{array}\right|
\end{array}\right|
\vee
\left|\begin{array}{ll}
x_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y'_{11} y'_{10} y_{00}\\ y_{11} y_{10} y'_{00}\end{array}\right|\\
x_i x_j & \left|\begin{array}{l} y_{11} y_{10} y'_{01}\\ y'_{11} y'_{10} y_{01}\end{array}\right|\\
x'_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y_{10} y'_{01} y'_{00}\\ y'_{10} y_{01} y_{00}\end{array}\right|\\
x'_i x_j & \left|\begin{array}{l} y'_{11} y_{01} y_{00}\\ y_{11} y'_{01} y'_{00}\end{array}\right|
\end{array}\right|
=
\left|\begin{array}{ll}
x_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y'_{00}\\ y'_{11} y_{10} y_{00}\\ y'_{11} y'_{10} y_{00}\\ y_{11} y_{10} y'_{00}\end{array}\right|\\
x_i x_j & \left|\begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y_{01}\\ y'_{11} y_{10} y'_{01}\\ y_{11} y_{10} y'_{01}\\ y'_{11} y'_{10} y_{01}\end{array}\right|\\
x'_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y'_{10} y_{01} y'_{00}\\ y_{10} y'_{01} y_{00}\\ y_{10} y'_{01} y'_{00}\\ y'_{10} y_{01} y_{00}\end{array}\right|\\
x'_i x_j & \left|\begin{array}{l} y_{11} y_{01} y'_{00}\\ y'_{11} y'_{01} y_{00}\\ y'_{11} y_{01} y_{00}\\ y_{11} y'_{01} y'_{00}\end{array}\right|
\end{array}\right|
=
$$

$$
=\left|\begin{array}{ll}
x_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y'_{11} y_{00}\\ y_{11} y'_{00}\end{array}\right|\\
x_i x_j & \left|\begin{array}{l} y_{10} y'_{01}\\ y'_{10} y_{01}\end{array}\right|\\
x'_i x'_j & \left|\begin{array}{l} y_{10} y'_{01}\\ y'_{10} y_{01}\end{array}\right|\\
x'_i x_j & \left|\begin{array}{l} y'_{11} y_{00}\\ y_{11} y'_{00}\end{array}\right|
\end{array}\right|
=
\left|\begin{array}{ll}
\left|\begin{array}{l} x_i x'_j\\ x'_i x_j\end{array}\right| & \left|\begin{array}{l} y_{11} y'_{00}\\ y'_{11} y_{00}\end{array}\right|\\
\left|\begin{array}{l} x_i x_j\\ x'_i x'_j\end{array}\right| & \left|\begin{array}{l} y'_{10} y_{01}\\ y_{10} y'_{01}\end{array}\right|
\end{array}\right|.
$$

Лемма доказана.

Лемма 5.8: *Для <u>любых</u> ФАЛ имеет место соотношение*

$$
\left|\begin{array}{c}
\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m)\\
y_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00}\\
y'_{11} y_{10} y_{01} y'_{00}
\end{array}\right|
=
\left|\begin{array}{c}
\Delta_{x_i} y(X_m)\Delta_{x_j} y(X_m)\\
\Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m)\Delta_{x_j} y(X_m)\\
\Delta_{x_i} y(X_m)\Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m)\\
\Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m)\Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m)
\end{array}\right|
\qquad (5.10)
$$

(для монотонных ФАЛ указанные конъюнкции равны нулю

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{l|l} \Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) & \ldots\ldots \\ y_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} & = 0 \\ & \ldots\ldots \\ y'_{11} y_{10} y_{01} y'_{00} & = 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \end{array} \right|,$$

следовательно, получаем формулу (5.118) из [4])

Д о к а з а т е л ь с т в о: Вычислим значение каждой конъюнкции в правой части. $\Delta_{x_i} y_{x_j}(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m)$ уже найдена при доказательстве леммы5.

Аналогично

$$\Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{l|l} x_i x'_j & \begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \end{array} \\ \hline x'_i x'_j & \begin{array}{l} y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \end{array} \\ \hline x_i x_j & \begin{array}{l} y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \end{array} \\ \hline x'_i x_j & \begin{array}{l} y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{array} \end{array} \right|, \quad \Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) = \left| \begin{array}{l|l} x'_i x_j & \begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \end{array} \\ \hline x_i x_j & \begin{array}{l} y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \end{array} \\ \hline x'_i x'_j & \begin{array}{l} y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \end{array} \\ \hline x_i x'_j & \begin{array}{l} y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{array} \end{array} \right|;$$

$$\Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) = \left| \begin{array}{l|l} x'_i x'_j & \begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \end{array} \\ \hline x_i x'_j & \begin{array}{l} y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \end{array} \\ \hline x'_i x_j & \begin{array}{l} y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \end{array} \\ \hline x_i x_j & \begin{array}{l} y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{array} \end{array} \right|$$

значит,

$$\left| \begin{array}{c} \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \\ y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \\ y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \\ y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} y_{11} & y'_{10} & y'_{01} & \bullet \\ y'_{11} & y_{10} & y_{01} & \bullet \\ y_{11} & \bullet & y'_{01} & y_{00} \\ y'_{11} & \bullet & y_{01} & y'_{00} \\ y'_{11} & y_{10} & \bullet & y'_{00} \\ y_{11} & y'_{10} & \bullet & y_{00} \\ \bullet & y_{10} & y_{01} & y'_{00} \\ \bullet & y'_{10} & y'_{01} & y_{00} \end{array} \right|$$

При умножении каждой строчки на дизъюнкцию, состоящую из недостающего элемента и его отрицания, например на $y_{00} \vee y'_{00} = 1$, получаем

$$\begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{01}y_{00} \\ y_{11}y_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y'_{10}y'_{01}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta\Delta_{x_i x_j} Y(X_m) \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{vmatrix},$$

откуда следует (5.10).

Лемма доказана.

Двукратный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес двукратной булевой разности логической функции по аргументам x_i и x_j [4]

$$g_{2x_i x_j} = P(\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m))\big|_{R_i = 0.5, i=\overline{1,m}}, \tag{5.11}$$

где запись – $R_i = 0.5, i = \overline{1,m}$ означает, что значение вероятностей возникновения событий x_i (R_i) ($i = \overline{1,m}$) равны 0,5.

Двойной вес элементов x_i и x_j в системе есть вес двойной булевой разности логической ФАЛ по аргументам x_i и x_j [4]:

$$g_{x_i x_j} = P(\Delta_{x_i x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \qquad (5.12)$$

Совместный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес логического произведения булевых разностей ФАЛ по аргументам x_i и x_j [4]:

$$g_{x_i \wedge x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \qquad (5.13)$$

Суммарный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес логической суммы булевых разностей ФАЛ по аргументам x_i и x_j [4]:

$$g_{x_i \vee x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}} \qquad (5.14)$$

Раздельный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес результата сложения по модулю два булевых разностей ФАЛ по аргументам x_i и x_j [4]:

$$g_{x_i \oplus x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \qquad (5.15)$$

<u>Формулы (5.11)-(5.15) для вычисления весов не зависят от монотонности функции и верны для немонотонных ФАЛ.</u>

Двукратная значимость элементов x_i и x_j есть смешанная производная от вероятности опасного функционирования всей системы $P_c = P(y(X_m)=1)$ по вероятности возникновения данных событий

$$\xi_{2ij} = \frac{\partial^2 P_c}{\partial P_i \partial P_i}. \qquad (5.16)$$

Теорема 5.1: *Двукратный вес элементов x_i и x_j в системе и совместный вес этих элементов связаны соотношением*

$$4g_{x_i \wedge x_j} = g_{2x_i x_j} + P\left(\begin{vmatrix} y_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} y'_{00} \end{vmatrix}\right) \qquad (5.17)$$

(для монотонных ФАЛ указанные конъюнкции и вероятность равны нулю

$$4g_{x_i\wedge x_j}=g_{2x_ix_j}+P\left(\left|\begin{array}{c|c} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} & =0 \\ & \cdots\cdots \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} & =0 \end{array}\right.\right),$$

следовательно, получаем формулу (5.129) из [4])

Данная теорема имеет место для <u>любых</u> ФАЛ, но доказательство для всех ФАЛ отличается от доказательства для монотонных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о

$$g_{x_i\wedge x_J}=P(\Delta_{x_i}y(X_m)\wedge\Delta_{x_j}y(X_m))=P\left(\left|\begin{array}{c|c} x_ix_j & \begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}\end{vmatrix} \\ x'_ix_j & \begin{vmatrix} y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00}\end{vmatrix} \\ x_ix'_j & \begin{vmatrix} y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00}\end{vmatrix} \\ x'_ix'_i & \begin{vmatrix} y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y_{00}\end{vmatrix}\end{array}\right|\right)=$$

$$=0{,}25\cdot P\left(\begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \\ y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \\ y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y_{00}\end{vmatrix}\right)=(5.10)=0{,}25\cdot P\left(\begin{vmatrix} \Delta\Delta_{x_ix_j}y(X_m) \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00}\end{vmatrix}\right)=$$

$$=0{,}25\left(P(\Delta\Delta_{x_ix_j}y(X_m))+P\left(\begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00}\end{vmatrix}\right)\right)=0{,}25\left(g_{2x_ix_j}+P\left(\begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00}\end{vmatrix}\right)\right)$$

значит, $4g_{x_i\wedge x_j}=g_{2x_ix_j}+P\left(\begin{vmatrix} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00}\end{vmatrix}\right)$

Теорема доказана.

Теорема 5.2: *Двойной вес элементов* x_i *и* x_j *в системе численно равен раздельному весу этих элементов*

$$g_{x_i x_j} = g_{x_i \oplus x_j}\,. \tag{5.18}$$

Данная терема имеет место для <u>любых</u> ФАЛ, но доказательство для всех ФАЛ отличается от доказательства для монотонных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о для всех ФАЛ: Найдем отдельно $g_{x_i x_j}$ и $g_{x_i \oplus x_j}$.

$$g_{x_i x_j} = P(\Delta_{x_i x_j} y(X_m)) = P\left(\left\|\begin{array}{l|l} x_i x_j & y_{11} y'_{00} \\ x'_i x'_j & y'_{11} y_{00} \\ x'_i x_j & y_{10} y'_{01} \\ x_i x'_j & y'_{10} y_{01} \end{array}\right\|\right) = P\left(\left\|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x'_i x'_i \end{array}\right| (y_{11} \oplus y_{00}) \\ (x_i \oplus x_j)(y_{10} \oplus y_{01}) \end{array}\right\|\right) =$$

$$= P\left(\left\|\left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x'_i x'_i \end{array}\right| (y_{11} \oplus y_{00})\right\|\right) + P((x_i \oplus x_j)(y_{10} \oplus y_{01})) = 0{,}5P(y_{11} \oplus y_{00}) + 0{,}5P(y_{10} \oplus y_{01}) =$$

$$= 0{,}5(P(y_{11}) + P(y_{00}) - 2P(y_{11} y_{00}) + P(y_{01}) + P(y_{10}) - 2P(y_{10} y_{01}))$$

$$g_{x_i \oplus x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m)) = P\left(\left\|\begin{array}{l|l} x_i \bar{x}_j & y_{11} \bar{y}_{00} \\ \bar{x}_i x_j & \bar{y}_{11} y_{00} \\ x_i x_j & y_{10} \bar{y}_{01} \\ \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{y}_{10} y_{01} \end{array}\right\|\right) = P\left(\left\|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x'_i x'_i \end{array}\right| (y_{10} \oplus y_{01}) \\ (x_i \oplus x_j)(y_{11} \oplus y_{00}) \end{array}\right\|\right)$$

$$= P\left(\left\|\left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ \bar{x}_i \bar{x}_i \end{array}\right| (y_{10} \oplus y_{01})\right\|\right) + P((x_i \oplus x_j)(y_{11} \oplus y_{00})) = 0{,}5P(y_{11} \oplus y_{00}) + 0{,}5P(y_{10} \oplus y_{01}) =$$

$$= 0{,}5(P(y_{11}) + P(y_{00}) - 2P(y_{11} y_{00}) + P(y_{01}) + P(y_{10}) - 2P(y_{10} y_{01}))$$

Теорема доказана.

Теорема 5.3: *Суммарный вес элементов* x_i *и* x_j *в системе равен сумме раздельного и совместного весов этих элементов в системе:*

$$g_{x_i \vee x_j} = g_{x_i \oplus x_j} + g_{x_i \wedge x_j}\,. \tag{5.19}$$

Данная теорема имеет место для <u>любых</u> ФАЛ, но доказательство для всех ФАЛ отличается от доказательства для монотонных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о для всех ФАЛ:

$$\begin{aligned}
g_{x_i \vee x_j} &= P(\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m)) = ((5.122)[4]) = \\
&= P((\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m)) \vee (\Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m))) = \\
&= P(\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m)) + P(\Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m)) - \\
&- P((\Delta_{x_i} \oplus \Delta_{x_j}) \wedge (\Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m))) = g_{x_i \oplus x_j} + g_{x_i \wedge x_j}
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

5.2 Основные результаты

В данном разделе показано, что все основные определения показателей важности для двух аргументов монотонных ФАЛ могут применяться и для оценки важности аргументов немонотонных ФАЛ. Показано, что лемма 5.2.1, справедливая для монотонных ФАЛ, не распространяется на немонотонные ФАЛ типа (2.3). Для немонотонных функций типа (2.2) предложена альтернативная лемма 5.2.2. Новыми результатами являются сформулированные и доказанные леммы 5.3-5.8, теоремы 5.1-5.3, выведенные для немонотонных ФАЛ, и показано, что они справедливы и для монотонных ФАЛ.

Предложенные леммы 5.3-5.8 позволяют вычислять такие показатели, как двукратный, двойной, совестный, суммарный и раздельный вес альтернативным способом, который в отличие от вычисления напрямую по определению значительно сокращает трудоемкость и время расчетов, как ручных, так и машинных (см. раздел 7). Это происходит за счет того, что при использовании лемм происходит логическое умножение и логическое сложение функций $y_{00}^{ij}, y_{01}^{ij}, y_{10}^{ij}, y_{11}^{ij}$, которые значительно проще, чем исходная функция за счет того, что i-ый и j-ый аргументы заменены на константы (0 или 1). Кроме того, при вычислении с помощью формул не используется весьма трудоемкая операция сложения по mod2, что также значительно упрощает расчеты и уменьшает время работы, как инженера, так и программы.

6 Методы перевода функции алгебры логики в вероятностную функцию

Полученные в разделе 6 результаты опубликованы в [110] и [111].

Для практического применения для систем большой размерности наиболее удобным являются алгоритмы ортогонализации, рекуррентный и наращивания путей, поэтому в данном разделе рассматриваются только эти алгоритмы.

6.1 Алгоритм ортогонализации

Алгоритм ортогонализации основан на преобразовании ФАЛ в ОДНФ.

Отрицание конъюнкции K_i можно представить в виде дизъюнкции

$$K_i' = x_1^{\alpha_1'} \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2'} \vee \ldots \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{r-1}^{\alpha_1} x_r^{\alpha_r'},$$

члены которой попарно ортогональны. Если в конъюнкции K_i отсутствуют отрицания, то отрицание ее можно представить в следующем виде:

$$(x_1 x_2 \ldots x_r)' = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_r' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & & & & & \\ x_1 & x_2' & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{r-1} & x_r' \end{vmatrix}. \qquad (6.1)$$

Булева функция $\mathrm{f}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, представленная в виде

$$\mathrm{f}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \bigvee_{i=1}^{n} K_i \, (n \le 2^m),$$

эквивалентна функции $\mathrm{f}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = K_1 \vee K'_1 K_2 \vee \ldots \vee K'_1 K'_2 \ldots K'_{n-1} K_n$. В матричном виде

$$f(z_1, z_1, ..., z_m) = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ ... \\ K_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 & & & & & \\ K'_1 & K_2 & & & & \\ ... & ... & ... & & & \\ K'_1 & K'_2 & K'_3 & ... & K'_{n-1} & K_n \end{vmatrix}. \quad (6.2)$$

Если вместо каждого выражения K'_i $(i \le n)$ подставить его представление, согласно (6.1), то в результате приведения функции к ДНФ мы получим ОДНФ.

***Краткое описание алгоритма*:**

1. Преобразовываем функцию y($z_1, z_2, ..., z_m$) к ДНФ.
2. Производим нумерацию членов ДНФ от 1 до n (n< 2^m), причем членам низшего ранга присваиваем низшие номера.
3. Определяем ОДНФ функции y($z_1, z_2, ..., z_m$) по (6.2).
4. Для уменьшения числа операций целесообразно в конъюнкции $K'_1 K'_2 ... K'_{i-1} K_i$ выполнить упрощения:
   – прировнять к нулю те члены ДНФ $K_j (j \le i-1)$, которые ортогональны члену K_i;
   – приравнять к нулю те элементарные конъюнкции отрицаний K'_j $(j \le i-1)$, которые ортогональны K_i.
5. Вычислить вероятность опасности исходя из того, что все элементарные конъюнкции ортогональны, т.е. события несовместны**:**

O_c = P(f($z_1, z_2, ..., z_m$)=1) = $\sum_{i=1}^{s} P(L_i)$, где L_i - ортогональные члены функции y($z_1, z_2, ..., z_m$), записанные в ОДНФ.

Пример:

Рассмотрим функцию

$$y=\left|\begin{array}{lllll} z_1 & z_3 & z_5 & & \\ z_1 & z_3 & z_4 & z_6 & z_8 \\ z_2 & z_4 & z_6 & & \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_8 \end{array}\right| z_7 .$$

Пронумеруем члены ДНФ в порядке возрастания их ранга

$$K_1 = z_1 z_3 z_5;$$

$$K_2 = z_2 z_4 z_6;$$

$$K_3 = z_1 z_3 z_4 z_6 z_8;$$

$$K_4 = z_2 z_3 z_4 z_5 z_8.$$

Преобразуем уравнение

$$y=\left|\begin{array}{llll} K_1 & & & \\ K'_1 & K_2 & & \\ K'_1 & K'_2 & K_3 & \\ K'_1 & K'_2 & K'_3 & K_4 \end{array}\right| .$$

$$K'_1=\left|\begin{array}{l} z'_1 \\ z'_3 \\ z'_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{lll} z'_1 & & \\ z_1 & z'_3 & \\ z_1 & z_3 & z'_5 \end{array}\right|, K'_2=\left|\begin{array}{l} z'_2 \\ z'_4 \\ z'_6 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{lll} z'_2 & & \\ z_2 & z'_4 & \\ z_2 & z_4 & z'_6 \end{array}\right|, K'_3=\left|\begin{array}{l} z'_1 \\ z'_3 \\ z'_4 \\ z'_6 \\ z'_8 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{lllll} z'_1 & & & & \\ z_1 & z'_3 & & & \\ z_1 & z_3 & z'_4 & & \\ z_1 & z_3 & z_4 & z'_6 & \\ z_1 & z_3 & z_4 & z_6 & z'_8 \end{array}\right| .$$

Тогда получаем

$$y=\left|\begin{array}{lllllll} z_1 & z_3 & z_5 & & & & \\ z'_1 & z_2 & z_4 & z_6 & & & \\ z_1 & z_2 & z'_3 & z_4 & z_6 & & \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z'_5 & z_6 & \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z'_5 & z_6 & z_8 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z'_6 & z_8 \end{array}\right| z_7 .$$

Следовательно, вероятностная функция будет иметь вид:

$$P(y=1)=[O_1O_3O_3+(1-O_1)O_2O_4O_6+O_1O_2(1-O_3)O_4O_6+O_1O_2O_3O_4(1-O_5)O_6+$$
$$+O_1(1-O_2)O_3O_4(1-O_5)O_6O_8+(1-O_1)O_2O_3O_4O_5(1-O_6)O_8]O_7.$$

6.2 Рекуррентный алгоритм

Этот метод основан на использовании теоремы сложения вероятностей совместных событий, в качестве которых здесь непосредственно выступают элементарные конъюнкции ДНФ, характеризующие опасные пути развития аварии.

Согласно правилам теории вероятностей, вероятность реализации опасного состояния системы при развитии аварии можно вычислить по формуле:

$$O_c = P(y(z_1, z_2, \ldots, z_m) = 1) = P\left(\bigvee_{l=1}^{d} K_1\right) = \\ = \sum_i P(K_i) - \sum_i \sum_j P(K_1 \wedge K_2) - \ldots + (-1)^{d-1} P(K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_d).$$

Рекуррентно это выглядит следующим образом:

$$P(K_1) = \prod_{k \in k_{ï1}} R_k \;;$$

$$P(K_1 \vee K_2) = P(K_1) + P(K_2) - P(K_1 \wedge K_2)$$
$$P(K_1 \vee K_2 \vee K_3) = P(K_1 \vee K_2) + P(K_3) - P((K_1 \vee K_2) \wedge K_3);$$
$$\ldots$$
$$P\left(\bigvee_{l=1}^{d} K_l\right) = P\left(\bigvee_{l=1}^{d-1} K_l\right) + P(K_d) - P\left(\left(\bigvee_{l=1}^{d-1} K_l\right) \wedge K_d\right),$$

При программировании этого алгоритма в памяти хранится информация лишь i-го шага, что существенно экономит ресурсы машины.

6.3 Алгоритм наращивания путей

Краткое содержание алгоритма.

1. Функцию у($z_1, z_2, ..., z_m$) преобразовываем в ДНФ;
2. Нумеруем члены ДНФ от 1 до d (d<2^m), причем членам низшего ранга присваиваем низшие номера;
3. Преобразовываем эту ДНФ по формуле П.С. Порецкого [19]

$$y(z_1, z_1, ..., z_m) = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \ldots \\ K_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 & & & & & \\ K'_1 & K_2 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ K'_1 & K'_2 & K'_3 & \ldots & K'_{d-1} & K_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \ldots \\ F_d \end{vmatrix},$$

где $F_{i+1} = [\bigwedge_{l=1}^{i} K'_l] \wedge K_{i+1}$ логическая функция опасности реализации (i+1)-го пути развития аварии с учетом невозможности осуществления всех i-ых предшествующих путей.

Все логические функции F_i ортогональны в совокупности, значит можно определить вероятностную функцию по формуле $P(y(z_1, z_2, ..., z_m) = 1) = \sum_{l=1}^{d} P(F_l = 1)$. При вычислении вероятности истинности функции F_{i+1}, т.е. P(F_{i+1}=1), ее следует понимать как условную вероятность невозможности всех предшествующих i-ых путей при условии, что элементы (i+1)-го пути на это не повлияли. Рекуррентно это можно представить следующим образом:

$$P(K_1) = \prod_{k \in k_{\ddot{I}\,1}} R_k \, ;$$

$$P(K_1 \vee K_2) = P(K_1) + P(K_2)P(K_1'|_{K_2=1});$$
$$P(K_1 \vee K_2 \vee K_3) = P(K_1 \vee K_2) + P(K_3)P(K_1' \wedge K_2'|_{K_3=1});$$

...

$$P\left(\bigvee_{l=1}^{d} K_l\right) = P\left(\bigvee_{l=1}^{d-1} K_l\right) + P(K_d)P\left(\bigwedge_{l=1}^{d-1} K_l'|_{K_d=1}\right),$$

На основании закона двойственности

$$\bigwedge_{l=1}^{i} K_l'|_{K_{i+1}=1} = \left(\bigvee_{l=1}^{i} K_l|_{K_{i+1}=1}\right)',$$

имеем

$$P\left(\bigwedge_{l=1}^{i} K_l'|_{K_{i+1}=1}\right) = 1 - P\left(\bigvee_{l=1}^{i} K_l|_{K_{i+1}=1}\right).$$

6.4 Сравнительный анализ алгоритмов

Поскольку существует много методов перевода ФАЛ в вероятностную функцию, то необходимо оценить известные алгоритмы с точки зрения трудоемкости вычислений и точности получаемого результата. При первоначальном рассмотрении исследуемой функции наиболее удобны в применении алгоритмы наращивания путей и рекуррентный, т.к. они не требуют дополнительных преобразований функции, представленной в ДНФ. В алгоритме наращивания путей необходима лишь перестановка элементарных конъюнкций в порядке возрастания их ранга. Алгоритм ортогонализации основан на преобразовании ФАЛ в ОДНФ с последующим применением теоремы о сумме вероятностей истинности попарно ортогональных функций алгебры логики. Он достаточно трудоемок, но с применением ЭВМ – это один из эффективных методов практических расчетов систем с большим числом элементов. Трудность в реализации на ЭВМ состоит в представлении ФАЛ в ОДНФ. Однако, он имеет один существенный недостаток: он разрабатывался для работы с монотонными логическими функциями, и для работы с немонотонными ФАЛ требуется его адаптация. В том виде, как он приведен в разделе 6.1, для немонотонных функций алгоритм ортогонализации применять нельзя.

Оценим трудоемкость каждого алгоритма с точки зрения зависимости количества производимых операций от количества элементарных конъюнкций, входящих в ФАЛ.

Пусть функция зависит от m аргументов, представлена в ДНФ и состоит из n элементарных конъюнкций K_i, каждая из которых содержит $r_1, r_2, \dots, r_n$ элементов.

Алгоритм ортогонализации

В алгоритме ортогонализации функция представляется дизъюнкцией в базисе конъюнкция-отрицание элементарных конъюнкций K_i. Для этого необходимо пронумеровать входящие в нее конъюнкции в порядке возрастания их ранга. После чего выполнить n-1 вычисление конъюнкций K_i и их отрицаний. Для такой записи функции необходимо вычислить n-1 отрицание K_i и представить его в виде дизъюнкции в базисе конъюнкция-отрицание элементов. Таким образом, количество предварительных операций равняется 2n-2. В итоге этих преобразований функция оказывается в ОДНФ, количество конъюнкций которой (а значит и число вероятностей, которые находятся непосредственно) зависит от конкретной задачи и максимально равно $1+r_1+r_1r_2+r_1r_2r_3+..+r_1r_2...r_n$, где r_i – ранги элементарных конъюнкций. Вычисление самой вероятности наступления события производится в одно действие.

Рекуррентный алгоритм

Этот алгоритм, в отличие от алгоритма ортогонализации или наращивания путей, не требует дополнительных преобразований функции. Он реализуется за n шагов. На первом шаге вычисляются вероятности каждой конъюнкции в ДНФ (это n вычислений). На последующих шагах происходит рекуррентное вычисление вероятности наступления события. На последнем этапе мы получаем искомую вероятность. Таким образом, всего производится 2n-1 вычисление, из которых n вычисляется элементарно.

Алгоритм наращивания путей

На старте алгоритма необходимо пронумеровать входящие в нее конъюнкции в порядке возрастания их ранга. Алгоритм выполняется за n шагов. На первом шаге вычисляются вероятности каждой конъюнкции (это n вычислений). На последующих шагах происходит рекуррентное вычисление вероятности наступления события. На последнем этапе мы получаем искомую вероятность. Каждый шаг, начиная со 2-го, состоит из двух этапов: подготовительного и непосредственного вычисления вероятности (т.о. требует 2х вычислений). В итоге получаем, что при реализации этого алгоритма необходимо произвести 3n-2 вычислений. Преимущество этого алгоритма в сравнении с рекуррентным состоит в том, что при вычислении вероятности на i-ом шаге (i>1) используется условная вероятность невозможности всех предшествующих (i-1) путей при условии, что элементы i-го пути на это не повлияли. Таким образом, в конъюнкциях вместо переменных, входящих в i-ый путь, стоят 1, что существенно облегчает вычисления.

В таблице 6.1 проиллюстрировано возрастание количества производимых операций для каждого алгоритма в зависимости от количества элементарных конъюнкций ФАЛ, представленной в ДНФ:

Таблица 6.1. Возрастание количества производимых операций для каждого алгоритма в зависимости от количества элементарных конъюнкций ФАЛ, представленной в ДНФ.

n	Рек	НП	Орт*
	2n-1	3n-2	2n-2
1	1	1	0
2	3	4	2
3	5	7	4
4	7	10	6
5	9	13	8
6	11	16	10
7	13	19	12
8	15	22	14
9	17	25	16
10	19	28	18

*для алгоритма ортогонализации приведено только количество предварительных вычислений, конечное число зависит от конкретной функции.

Таким образом, рациональнее всего было бы использовать рекуррентный алгоритм, т.к. он требует наименьшее число вычислений. Это действительно так, если значения вероятностей возникновения исходных событий достаточно точны, тогда при их умножении не возникнет большой погрешности. В противном случае удобным оказывается алгоритм наращивания путей, т.к. за счет использования условных вероятностей некоторые переменные заменяются единицей, а значит, при умножении не влияют на результат. Лучше всего в случае, когда вероятности найдены приближенно, использовать алгоритм ортогонализации, т.к., во-первых, вероятность там вычисляется один раз в конце, а, во-вторых, вероятности складываются. Таким образом, суммарная погрешность меньше. Но, как сказано выше, этот алгоритм требует корректировки для работы с немонотонными функциями.

В итоге, для программной реализации удобнее всего в использовании, с учетом его достоинств и недостатков, оказывается рекуррентный алгоритм, являющийся приемлемым компромиссом между простотой в использовании и погрешностью результата.

7 Описание программного приложения

На основании полученных результатов было разработано программное приложение, которое позволяет оценивать безопасность технических систем и оценивать важность отдельных элементов, входящих в логические структуры, описывающие сценарий развития аварии. Программное приложение разработано на языке C# и одинаково корректно работает как с монотонными ФАЛ, так и с немонотонными. Данное программное приложение:

1. Включает в себя логический калькулятор, который позволяет приводить логическую функцию, записанную в произвольном символьном виде, к ДНФ.
2. Позволяет определить вероятность реализации ФАЛ, с учетом вероятностей входящих в нее аргументов, т.е., если ФАЛ представляет собой сценарии опасного функционирования системы, то данная операция позволяет определить вероятность опасного функционирования системы.
3. Позволяет определять показатели важности для одного аргумента: вес, активность, значимость, вклад, относительный вклад.
4. Позволяет определять показатели важности для двух аргументов: двукратный, двойной, совестный, суммарный, раздельный вес, двукратную значимость, совестный, суммарный, раздельный вклад.

Данное программное приложение для решения вышеприведенных задач (п.1-4) использует точные алгоритмы расчетов, а погрешность получаемых результатов обусловлена лишь погрешностью исходных данных: точностью построенной логической функции, иллюстрирующей сценарий развития аварии, и точностью вероятностей входящих в нее событий. При условии, что ФАЛ построена корректно, а входящие в ВФ вероятности найдены без погрешности, точность всех алгоритмов составляет 100%.

Тестирование проводилось на ПК с процессором 2Гц, и ОЗУ 2Гб.

7.1 Логический калькулятор

Большинство алгоритмов, переводящих ФАЛ в ВФ и позволяющих оценивать вероятность опасного функционирования системы, работает с ФАЛ, представленными в ДНФ (см. раздел 6). При анализе сценариев развития аварии не всегда ФАЛ получается в ДНФ. Часто ФАЛ содержит логические операции сложения по mod2, поскольку в жизни встречаются взаимоисключающие друг друга события (которые и описываются данными логическими операциями). Сложение по mod2 весьма трудоемкая для ручных расчетов операция, требующая большого количества времени и внимания. Поэтому было бы полезно иметь программу, приводящую ФАЛ, представленную в произвольном виде, к ДНФ. Предложенный логический калькулятор как раз и приводит ФАЛ к ДНФ.

Программа позволяет сохранять исходный вид ФАЛ, а также полученную запись в ДНФ.

В связи с тем, что подобные программы автору не известны, и нет эталонных примеров, правильность расчетов проверялась на ФАЛ, составленных автором. Логический калькулятор был проверен на примерах логических функций различной сложности (порядка 20 различных функций): монотонных, немонотонных, с отрицаниями одного аргумента, с отрицаниями сложных выражений, с использованием логической операции сложения по mod2. Получаемые ДНФ логических функций полностью совпадали с ДНФ, полученными автором вручную, что позволяет сделать вывод о корректности работы логического калькулятора.

7.2 Определение вероятности опасного функционирования системы

Одной из задач, которую способно решать данное программное приложение является определение вероятности опасного функционирования системы. Основной операцией, которую при этом необходимо произвести – перевести ФАЛ в ВФ. Наиболее оптимальным алгоритмом, переводящим ФАЛ в ВФ, как показывает анализ (см. радел 6), является рекуррентный алгоритм.

В качестве входных данных программы выступает ФАЛ, представленная в ДНФ, и вектор вероятностей входящих в ФАЛ событий. Решение рассматриваемой задачи можно разделить на два этапа:

- вычисление вероятностной функции;
- вычисление вероятности истинности ФАЛ, на основании полученной ВФ с учетом вероятностей входящих в нее событий.

Для вычисления ВФ из специального поля ввода программа считывает ФАЛ, представленную в ДНФ. При этом логическую функцию можно ввести вручную, использовать ДНФ, полученную с помощью логического калькулятора (см. раздел 7.1) или открыть ранее сохраненную функцию из файла. Затем приложение применяет для рассматриваемой логической функции рекуррентный алгоритм и получает полином, содержащий вероятности входящих в ФАЛ событий – ВФ. Далее программа из специального поля ввода считывает значения входящих в полином вероятностей и вычисляет вероятность истинности функции алгебры логики.

Правильность расчетов проверялась на примерах, предложенных И.А.Рябининым и его учениками в своих работах [3], [4], [26]. Полученные результаты полностью соответствуют опубликованным значениям.

7.3 Определение показателей важности для одного аргумента

Данное программное приложение позволяет определять параметры важности для любого аргумента, входящего в логическую функцию, как монотонную, так и немонотонную, т.е. для любого события из сценария аварии. Это такие показатели, как вес, значимость, вклад, относительный вклад, активность. Активность вычисляется на основании новой предложенной формы (4.13) в разделе 4.3.

Правильность расчетов проверялась на примерах, предложенных И.А.Рябининым и его учениками в своих работах [3], [4], [26]. Полученные результаты полностью соответствуют опубликованным значениям.

Проверка программы на быстроту расчетов проводилась на примере функции, состоящей из 6 конъюнкций и 9 элементов,

$$y = \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_4 \\ x_1 x_5 \\ x_1 x_6 x_7 x_8 \\ x_1 x_9 \end{vmatrix}.$$

Вычисление всех указанных показателей важности было произведено за доли секунды.

7.4 Определение показателей важности для двух аргументов

Данное программное приложение позволяет определять показатели важности для любых двух аргументов любых ФАЛ такие как, двукратный, двойной, совестный, суммарный, раздельный вес, двукратную значимость, совестный, суммарный, раздельный вклад. Вычисление вышеприведенных показателей возможно напрямую с помощью определений. Если для определения двукратной значимости и различных вкладов вычисление напрямую не требует большого количества машинных ресурсов, вычисление различных весов двух аргументов представляет собой весьма трудоемкую задачу. Поэтому И.А.Рябинин в работе [4] предложил ряд лемм, значительно упрощающих вычисление различных весов двух аргументов. Однако леммы, сформулированные и доказанные в [4], как сказано во введении, справедливы лишь для монотонных логических функций. В разделе 5 данной работы сформулированы и доказаны аналогичные леммы, которые выводились для немонотонных ФАЛ и оказались справедливыми для монотонных ФАЛ.

Для сравнения времени расчетов вышеприведенных параметров важности для двух аргументов различными способами было реализовано два метода их вычисления: напрямую с помощью определения и с использование лемм, описанных в разделе 5. Например, для монотонной ФАЛ, состоящей из 4х элементарных конъюнкций и 5ти элементов, (пример 5.8 [4])

$$y = x_1x_3 \vee x_1x_4x_5 \vee x_2x_4 \vee x_2x_3x_5 = \begin{vmatrix} x_1x_3 \\ x_1x_4x_5 \\ x_2x_4 \\ x_2x_3x_5 \end{vmatrix}$$

для вычисления двукратного веса с помощью определения потребовалось больше 5 минут, вычисление же всех указанных показателей важности с использованием лемм было произведено за доли секунды.

Правильность расчетов проверялась на примерах, предложенных И.А.Рябининым в работе [4]. Полученные результаты полностью соответствуют опубликованным значениям.

7.5 Прочие возможности программы

7.5.1. Изменение вводимых данных

Все вводимые данные можно изменять. При этом при вычислении вероятности опасного функционирования системы можно изменять значения вероятностей входящих в сценарий событий, не пересчитывая полученную ВФ. Это удобно, поскольку при анализе большой системы вычисление ВФ может занять много времени.

7.5.2. Сохранение данных

Программой предусмотрено сохранение всех вводимых и получаемых данных. При использовании логического калькулятора – ФАЛ в произвольном виде и получаемая в ДНФ; при вычислении вероятности опасного функционирования системы – введенную ФАЛ в ДНФ, введенные значения вероятностей, полученный вероятностный полином, значение вероятности опасного функционирования системы. Значения всех характеристик важности как по одному, так и по двум аргументам.

Программа производит сохранение сразу всех перечисленных параметров, при этом допускается отсутствие некоторых из них – на соответствующих местах будут стоять прочерки.

Данная функция программы удобна в отношении анализа больших ФАЛ, т.к. позволяет загружать данные, а не вводить их заново.

8 Пример расчета различных параметров важности аргументов немонотонной функции алгебры логики

Пример взят из работы А.С.Можаева [26]. Исследуемая организационно-техническая система (рис. 8.1) состоит из двух элементов x_1 и x_2. Событием x_3 представлено возможное возникновение поражающего фактора (пуск ракеты, возгорание, радиоэлектронная помеха, недопустимое повышение давления, авария ядерного реактора). События x_5 и x_4 представляют разрушения воздействием поражающего фактора первого и второго элементов соответственно.

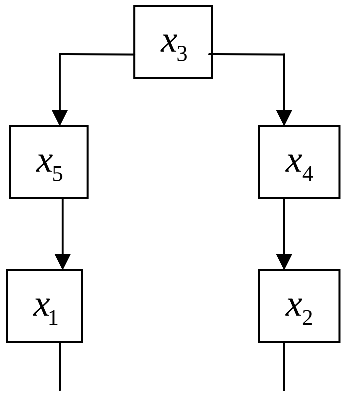

Рис. 8.1. Пример организационно-технической системы

В данной модели рассматриваются инверсные выходы из вершин x_5 и x_4. Они определяют в реализации *неразрушения* элементов x_1 и x_2 при возникновении события x_3. За критерий работоспособности системы возьмем выполнение своих функций хотя бы одним элементом x_1 или x_2.

Логическая функция в этом случае будет немонотонной (см. раздел 2.2) и выглядит следующим образом:

$$y = x_1 x_3' \vee x_1 x_5' \vee x_2 x_3' \vee x_2 x_4' = \left| \begin{array}{l} x_1 x_3' \\ x_1 x_5' \\ x_2 x_3' \\ x_2 x_4' \end{array} \right|$$

Пусть вероятности событий будут равны $P_1 = 0.85$, $P_2 = 0.95$, $P_3 = 0.7$, $P_4 = 0.4$, $P_5 = 0.5$. Тогда будут иметь место следующие характеристики.

Параметры важности для одного аргумента:

Вес:	**Значимость:**	**Активность:**	**Вклад:**	**Относительный вклад:**
$g_1 = 0.4375$	$\xi_1 = 0.1655$	$a_1 = 0.669961$	$B_1 = 0.140675$	$b_1 = 0.170582$
$g_2 = 0.4375$	$\xi_2 = 0.2865$	$a_2 = 0.829418$	$B_2 = 0.272175$	$b_2 = 0.330039$
$g_3 = 0.3125$	$\xi_3 = -0.23975$	$a_3 = 0.361051$	$B_3 = -0.167825$	$b_3 = -0.203504$
$g_4 = 0.1875$	$\xi_4 = -0.382375$	$a_4 = 0.691181$	$B_4 = -0.15295$	$b_4 = -0.185467$
$g_5 = 0.1875$	$\xi_5 = -0.25585$	$a_5 = 0.515355$	$B_5 = -0.127925$	$b_5 = -0.155122$

Параметры важности для двух аргументов:

Двукратный вес:	**Двойной вес:**	**Совместный вес:**	**Суммарный вес:**	**Раздельный вес:**
$g_{2x_1x_2} = 0.625$	$g_{x_1x_2} = 0.5625$	$g_{1\wedge 2} = 0.15625$	$g_{1\vee 2} = 0.71875$	$g_{1\oplus 2} = 0.5625$
$g_{2x_1x_3} = 0.375$	$g_{x_1x_3} = 0.5626$	$g_{1\wedge 3} = 0.09375$	$g_{1\vee 3} = 0.65625$	$g_{1\oplus 3} = 0.5625$
$g_{2x_1x_4} = 0.125$	$g_{x_1x_4} = 0.5625$	$g_{1\wedge 4} = 0.03125$	$g_{1\vee 4} = 0.59375$	$g_{1\oplus 4} = 0.5625$
$g_{2x_1x_5} = 0.375$	$g_{x_1x_5} = 0.4375$	$g_{1\wedge 5} = 0.09375$	$g_{1\vee 5} = 0.53125$	$g_{1\oplus 5} = 0.4375$
$g_{2x_2x_3} = 0.375$	$g_{x_2x_3} = 0.5625$	$g_{2\wedge 3} = 0.09375$	$g_{2\vee 3} = 0.65625$	$g_{2\oplus 3} = 0.5625$
$g_{2x_2x_4} = 0.375$	$g_{x_2x_4} = 0.4375$	$g_{2\wedge 4} = 0.09375$	$g_{2\vee 4} = 0.53125$	$g_{2\oplus 4} = 0.4375$
$g_{2x_2x_5} = 0.125$	$g_{x_2x_5} = 0.5625$	$g_{2\wedge 5} = 0.03125$	$g_{2\vee 5} = 0.59375$	$g_{2\oplus 5} = 0.5625$
$g_{2x_3x_4} = 0.375$	$g_{x_3x_4} = 0.3125$	$g_{3\wedge 4} = 0.09375$	$g_{3\vee 4} = 0.40625$	$g_{3\oplus 4} = 0.3125$
$g_{2x_3x_5} = 0.375$	$g_{x_3x_5} = 0.3125$	$g_{3\wedge 5} = 0.09375$	$g_{3\vee 5} = 0.40625$	$g_{3\oplus 5} = 0.3125$
$g_{2x_4x_5} = 0.125$	$g_{x_4x_5} = 0.3125$	$g_{4\wedge 5} = 0.03125$	$g_{4\vee 5} = 0.34375$	$g_{4\oplus 5} = 0.3125$

Двукратная значимость:	**Совместный вклад:**	**Суммарный вклад:**	**Раздельный вклад:**
$\xi_{2x_1x_2} = -0.51$	$B_{1\wedge 2} = -0.411825$	$B_{1\vee 2} = 0.824675$	$B_{1\oplus 2} = 1.2362$
$\xi_{2x_1x_3} = 0.165$	$B_{1\wedge 3} = 0.098175$	$B_{1\vee 3} = -0.125325$	$B_{1\oplus 3} = -0.2235$
$\xi_{2x_1x_4} = 0.3325$	$B_{1\wedge 4} = 0.11305$	$B_{1\vee 4} = -0.125325$	$B_{1\oplus 4} = -0.238375$
$\xi_{2x_1x_5} = -0.301$	$B_{1\wedge 5} = -0.127925$	$B_{1\vee 5} = 0.140675$	$B_{1\oplus 5} = 0.2686$
$\xi_{2x_2x_3} = 0.195$	$B_{2\wedge 3} = 0.129675$	$B_{2\vee 3} = -0.025325$	$B_{2\oplus 3} = -0.155$
$\xi_{2x_2x_4} = -0.4025$	$B_{2\wedge 4} = -0.15295$	$B_{2\vee 4} = 0.272175$	$B_{2\oplus 4} = 0.425125$
$\xi_{2x_2x_5} = 0.357$	$B_{2\wedge 5} = 0.169575$	$B_{2\vee 5} = -0.025325$	$B_{2\oplus 5} = -0.1949$
$\xi_{2x_3x_4} = -0.54625$	$B_{3\wedge 4} = -0.15295$	$B_{3\vee 4} = -0.167825$	$B_{3\oplus 4} = -0.014875$
$\xi_{2x_3x_5} = -0.3655$	$B_{3\wedge 5} = -0.127925$	$B_{3\vee 5} = -0.167825$	$B_{3\oplus 5} = -0.0399$
$\xi_{2x_4x_5} = -0.56525$	$B_{4\wedge 5} = -0.11305$	$B_{4\vee 5} = -0.167825$	$B_{4\oplus 5} = -0.54775$

Заключение

Полученные результаты

В ходе работы были получены результаты, касающиеся определения показателей важности для одного и двух аргументов логических функций.

Относительно характеристик важности для одного аргумента немонотонной ФАЛ было:

- показано, что все основные определения показателей важности для одного аргумента монотонных ФАЛ, кроме понятия активности (веса (4.3), значимости (4.4), вклада, (4.6) и (4.7)), а также формулы для их вычисления (4.8)-(4.10) могут применяться и для оценки важности аргументов любых немонотонных ФАЛ;
- показано, что предложенное И.А. Рябининым определение активности (4.12) для немонотонных логических функций не корректно;
- предложено новое определение активности, справедливое для любых ФАЛ (4.13) – как для немонотонных, так и для монотонных функций;
- для предложенного нового определения активности элементов (4.13) проведено доказательство теоремы о связи с относительным вкладом $v_i \le a_i$ (4.14), справедливая для монотонных и немонотонных функций;
- показано, что лемма 4.1.1, утверждающая включение $[y_0^{(i)}(X_m)] \subseteq [y(X_m)] \subseteq [y_1^{(i)}(X_m)]$ (4.2.1), справедливая для монотонных ФАЛ, не распространяется на немонотонные ФАЛ типа (2.3);
- для немонотонных функций типа (2.2) проведено доказательство новой леммы 4.1.2, утверждающей включение $[\mathrm{y}_1^{(\mathrm{i})}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}_0^{(\mathrm{i})}(X_m)]$ (4.2.2) и являющейся альтернативой полученной ранее для монотонных функций лемме 4.1.1;

– показано, что теорема 4.1.1, утверждающая, что $\xi_i = P(\Delta_{x_i} y(X_m))$ (4.5.1), выведенная на основании леммы 4.1.1 и справедливая для монотонных ФАЛ, не распространяются на немонотонные ФАЛ типа (2.3);
– на основе леммы 4.1.2 проведено доказательство теоремы 4.1.2, утверждающей, что $\xi_i = -P(\Delta_{x_i} y(X_m))$ (4.5.2) и являющейся альтернативой полученной ранее для монотонных функций теореме 4.1.1.

Относительно характеристики важности для двух аргументов немонотонной ФАЛ было:

– показано, что все основные определения показателей важности для двух аргументов монотонных ФАЛ: двукратного (5.11), двойного (5.12), совместного (5.13), суммарного (5.14) и раздельного (5.15) весов, двукратной значимости (5.16), – не зависят от монотонности функции и могут применяться и для оценки важности аргументов немонотонных ФАЛ;
– показано, что лемма 5.2.1 $[y_{00}^{i,j}] \subseteq [y_{01}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{11}^{i,j}]$ (5.4.1), справедливая для монотонных ФАЛ, не распространяются на немонотонные ФАЛ типа (2.3);
– для немонотонных функций типа (2.2) проведено доказательство леммы 5.2.2, утверждающей включение $[y_{11}^{i,j}] \subseteq [y_{01}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{00}^{i,j}]$ (5.4.2) и являющейся альтернативой полученной ранее для монотонных функций лемме 5.2.1;
– проведено доказательство лемм, справедливых для немонотонных функций и позволяющих вычислить: двукратную булеву разность – лемма 5.3 (5.5), двойную булеву разность – лемма 5.4 (5.6), логическое произведение – лемма 5.5 (5.7), логическую сумму – лемма 5.6 (5.8),

сложение по модулю два двух булевых разностей по разным аргументам – лемма 5.7 (5.9);

- проведено доказательство леммы 5.8 (5.10), справедливой для немонотонных функций и характеризующей связь между двукратной булевой разностью и логическим произведением различных булевых разностей по соответствующим аргументам;
- в ходе работы установлено, что вышеприведенные леммы 5.3-5.8 справедливы и для монотонных функций;
- проведено доказательство теорем: о связи двукратного и совместного весов – теорема 5.1 (5.17), о связи двойного и раздельного весов – теорема 5.2 (5.18), о связи суммарного, раздельного и совместного весов – теорема 5.3 (5.19) для немонотонных ФАЛ;
- в ходе работы установлено, что вышеприведенные теоремы 5.1-5.3 справедливы и для монотонных ФАЛ.

Было разработано программное приложение, позволяющее вычислять различные параметры важности аргументов для любых логических функций (монотонных и немонотонных).

Выводы

Предложенные леммы 5.3-5.8 позволяют вычислять такие показатели, как двукратный, двойной, совестный, суммарный и раздельный вес альтернативным способом, который в отличие от вычисления напрямую по определению значительно сокращает трудоемкость и время расчетов, как ручных, так и машинных (см. раздел 7). Это происходит за счет того, что при использовании лемм происходит логическое умножение и логическое сложение функций $y_{00}^{ij}, y_{01}^{ij}, y_{10}^{ij}, y_{11}^{ij}$, которые значительно проще, чем исходная функция за счет того, что i-ый и j-ый аргументы заменены на константы 0 или 1. Кроме того, при вычислении с помощью формул не используется весьма трудоемкая операция сложения по mod2, что также значительно упрощает расчеты и уменьшает время работы, как инженера, так и программы.

Выведенные теоремы и леммы оказались справедливы как для немонотонных функций, так и для монотонных, т.е. вообще для любых логических функций (см. рис. 2.1). Таким образом, предложенный в работе математический аппарат подтверждает ранее полученные результаты оценки характеристик важности аргументов логических функций в области рассмотрения монотонных функций и обобщает их на область немонотонных функций.

В процессе работы рассматривались два типа немонотонных ФАЛ (см. раздел 2.2):

- Функций $f(X_m)$ типа (2.2), как сказано ранее, заменой переменных (2.4) можно привести к монотонным, и далее к полученной ФАЛ применять аппарат, разработанный ранее И.А. Рябининым для монотонных функций. Следует только внимательно отслеживать номера аргументов, которые заменяются как $z_i = x_i', i = \overline{1,k}$, поскольку вероятности новых переменных $z_i, i = \overline{1,k}$, вычисляются следующим образом: $P(z_i) = 1 - P(x_i), i = \overline{1,k}$, в отличие от $P(z_j) = P(x_j), j \neq i = \overline{1,k}$. Однако, полученные в работе результаты справедливы для этих функций и могут применяться для оценки параметров важности аргументов таких ФАЛ.
- Функции $f(X_m)$ типа (2.3), в отличие от (2.2), нельзя привести к монотонным путем какой-либо замены переменных. В функцию $f(X_m)$ входят как события x_i, так и x_i', и при любой замене невозможно избавиться от отрицания элемента, значит нельзя воспользоваться математическим аппаратом для монотонных функций.

Предложенные в работе методы позволяют оценивать важность элементов ФАЛ для функций типа (2.3).

Суммируя сказанное, можно утверждать, что полученные результаты одинаково применимы как для анализа немонотонных функций как типа (2.2), так и типа (2.3), и, как сказано выше, для анализа монотонных ФАЛ. Таким образом, предложенный аппарат можно использовать для любой ФАЛ, без проверки ее на монотонность, которая нередко представляет собой также непростую задачу (см. раздел 2.2.5).

В итоге, основным результатом работы является развитие логико-вероятностной теории в части анализа важности отдельных аргументов ФАЛ. Приведенные в работе результаты расширяют возможности ЛВМ оценки показателей важности на область рассмотрения немонотонных ФАЛ, описывающей безопасность системы.

Приложение 1

Список сокращений

АС – аварийная ситуация

АЭС – атомная электростанция

БДНФ – бесповторная дизъюнктивно- нормальная форма

ВАБ – вероятностный анализ безопасности

ВМФ – военно-морской флот

ВФ – вероятностная функция

ГЭС – гидроэлектростанция

ДНФ – дизъюнктивно- нормальная форма

ИС – исходное событие

ЛВИ – логико-вероятностное исчисление

ЛВМ – логико-вероятностный метод

НК – надводный корабль

ОДНФ – ортогональная дизъюнктивно-нормальная форма

ПЛ – подводная лодка

ФАЛ – функция алгебры логики

ФППЗ – функция перехода полного замещения

ФРС – функция работоспособности системы

ФОС – функция опасного функционирования системы

Приложение 2

Основные определения и теоремы

Активность элемента x_i определяется как $a_i = \frac{P((\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L)}{P_c}$, где $P(\vee_j K_j)$ – конъюнкции, которые содержат x_i; $P(\vee_L K_L)$ – конъюнкции, содержащие x_i'; $P((\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) = 1)$ – вероятность опасной работы системы, вычисленная по конъюнкциям, содержащих x_i и x_i'.

Безотказность – свойство системы сохранять работоспособность в течение определенного времени при нормальной эксплуатации.

Бесповторной ДНФ (БДНФ) называется такая ДНФ, в которой все буквы имеют разные номера.

Булева разность функции $y(X_m)$ по аргументу x_i есть результат сложения по модулю два функции $y(X_m)$ и симметричной с ней функцией $y_{x_i'}(X_m)$ $\Delta_{x_i} y(X_m) = y(X_m) \oplus y_{x_i'}(X_m)$

Переменными $x_1, x_2, ..., x_m$ обозначают элементы системы. Их конкретные значения определяют ***вектор состояния системы*** X=($x_1, x_2, ..., x_m$).

Вероятностной функцией (ВФ) будем называть вероятность истинности ФАЛ P(f($x_1, x_2, ..., x_m$)=1).

Вес логической функции, состоящей из m элементов, есть относительная доля наборов элементов, на которых функция равна 1, среди всех 2^m наборов возможных значений элементов.

Вес аргумента x_i в ФАЛ есть вес булевой разности монотонной логической функции по аргументу x_i $g_{x_i} = g(\Delta_{x_i} y(X_m))$.

Вкладом события x_i в безопасность системы назовем полную вероятность опасного функционирования системы, определяемую данным событием $B_i = P_i \cdot \xi_i$.

Двукратная булева разность функции $y(X_m)$ по аргументам x_i и x_j есть выражение $\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \Delta_{x_i}[\Delta_{x_j} y(X_m)]$.

Двойная булева разность функции $y(X_m)$ по аргументам x_i и x_j есть результат сложения по модулю два исходной функции $y(X_m)$ и симметричной с ней функции $y_{x_i' x_j'}(X_m)$ $\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = y(X_m) \oplus y_{x_i' x_j'}(X_m)$.

Двойной вес элементов x_i и x_j в системе есть вес двойной булевой разности логической ФАЛ по аргументам x_i и x_j $g_{x_i x_j} = P\{\Delta_{x_i x_j} y(X_m)\}|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}$, где запись – $R_i = 0.5,\ i = \overline{1,m}$ означает, что значение вероятностей событий x_i (R_i) ($i = \overline{1,m}$) равны между собой и равны 0,5.

Двукратный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес двукратной булевой разности логической функции по аргументам x_i и x_j $g_{2x_i x_j} = P(\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}$.

Выражение вида, $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s$, где K_i элементарные конъюнкции различных рангов, называется ***дизъюнктивно-нормальной формой (ДНФ)***.

ФАЛ вида $y_1^{(i)}(X_m) = y(x_1, ..., 1, ..., x_m)$ называется ***единичной по аргументу*** x_i

Двукратная значимость элементов x_i и x_j есть смешанная производная от вероятности опасного функционирования всей системы $P_c = P(y(X_m) = 1)$ по вероятности наступления данных событий $\xi_{2ij} = \dfrac{\partial^2 P_c}{\partial P_i \partial P_i}$.

Значимость аргумента x_i есть частная производная от вероятности опасного функционирования всей системы по вероятности опасности данного события $\xi_i = \dfrac{\partial P_c}{\partial P_i}$.

Надежность – способность системы сохранять свойства, необходимые для выполнения заданного назначения, при нормальной эксплуатации.

ФАЛ вида $y_0^{(i)}(X_m) = y(x_1, ..., 0, ..., x_m)$ называется ***нулевой по аргументу*** x_i.

Две конъюнкции называются ***ортогональными***, если их логическое произведение равно нулю.

ДНФ называется ***ортогональной дизъюнктивно-нормальной формой (ОДНФ)***, если все ее конъюнкции попарно ортогональны.

Отказ **–** событие, после возникновения которого, система утрачивает работоспособность.

Относительный вклад есть отношение вклада события к вероятности опасного функционирования всей системы $v_i = \dfrac{B_i}{P_c}$.

Раздельный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес результата сложения по модулю два булевых разностей ФАЛ по аргументам x_i и x_j $g_{x_i \oplus x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}$.

ФАЛ вида $y_{x_i'}(X_m) = y(x_1,..., x_i',..., x_m)$ называется ***симметричной для ФАЛ*** $y(X_m)$ ***по аргументу*** x_i**.**

ФАЛ вида $y_{x_i' x_j'}(X_m) = y(x_1,..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1},..., x_{j-1}, x_j', x_{j+1},..., x_m)$ называется ***симметричной для ФАЛ*** $y(X_m)$ ***по аргументам*** x_i ***и*** x_j.

Система – множество действующих элементов, взаимосвязанных между собой и рассматриваемых как единое структурное целое.

Если функция f($x_1, x_2,..., x_m$) записана в ДНФ и ранг каждой *К* равен *m*, то такая ДНФ называется ***совершенно дизъюнктивно-нормальной формой (СДНФ)***.

Совместный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес логического произведения булевых разностей ФАЛ по аргументам x_i и x_j $g_{x_i \wedge x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}$.

Суммарный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес логической суммы булевых разностей ФАЛ по аргументам x_i и x_j $g_{x_i \vee x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}$.

Сложность системы характеризуется габаритами, массой, объемом оборудования, разветвленностью связей, квалификацией персонала, стоимостью изготовления и т.п. Сложность относится и к структуре системы и к функциям, реализуемых системой.

ФАЛ, допускающие непосредственный переход к ВФ заменой логических переменных вероятностями, а логических операций арифметическими, будем называть ***формами перехода к замещению (ФПЗ)***.

В ***форме перехода к полному замещению (ФППЗ)*** производится замещение одновременно всех логических переменных.

Выражение вида $x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_r^{\alpha_r}$ называется ***элементарной дизъюнкцией ранга r***.

Выражение вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots x_r^{a_r}$ называется ***элементарной конъюнкцией ранга r***.

Лемма 4.1.1: Монотонная логическая функция $y(X_m)$ является импликантой ее единичной функции $y_1^{(i)}(X_m)$, а нулевая функция $y_0^{(i)}(X_m)$ есть импликанта исходной функции $y(X_m)$, т.е., обозначив через [y(x)] множество наборов X_m, на которых y(x)=1, имеет место включение $[y_0^{(i)}(X_m)] \subseteq [y(X_m)] \subseteq [y_1^{(i)}(X_m)]$.

Лемма 4.1.2: Немонотонная логическая функция $y(X_m)$ типа (2.2) является импликантой ее нулевой функции $y_0^{(i)}(X_m) = y(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_m)$, а единичная функция $y_1^{(i)}(X_m) = y(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_m)$ есть импликанта исходной функции $y(X_m)$, т.е., обозначив через [y(x)] множество наборов X_m, на которых y(x)=1, имеет место включение $[\mathrm{y}_1^{(\mathrm{i})}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}(X_m)] \subseteq [\mathrm{y}_0^{(\mathrm{i})}(X_m)]$.

Лемма 5.1: Двукратная булева разность ФАЛ не зависит от порядка аргументов, по которым она вычисляется, т. е. $\Delta\Delta x_i x_j Y(X_m) = \Delta\Delta x_j x_i Y(X_m)$.

Лемма 5.2.1: Двойная нулевая функция по аргументам x_i и x_j является импликантой нулевой единичной (единичной нулевой) функции по тем же аргументам, которая, в свою очередь, является импликантой двойной единичной функции для всех монотонных ФАЛ, т. е. имеют место включения

$$[y_{00}^{i,j}] \subseteq [y_{01}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{11}^{i,j}];$$
$$[y_{00}^{i,j}] \subseteq [y_{10}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{11}^{i,j}].$$

Лемма 5.2.2: Двойная единичая функция по аргументам x_i и x_j является импликантой нулевой единичной (единичной нулевой) функции по тем же аргументам, которая, в свою очередь, является импликантой двойной нулеой функции для всех немонотонных ФАЛ типа (2.2), т. е. имеют место включения

$$[y_{11}^{i,j}] \subseteq [y_{01}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{00}^{i,j}];$$

$$[y_{11}^{i,j}] \subseteq [y_{10}^{i,j}] \subseteq [(y_{01}^{i,j} \vee y_{10}^{i,j})] \subseteq [y_{00}^{i,j}]$$

***Лемма 5.3*:** Двукратная булева разность ФАЛ по аргументам x_i и x_j может быть вычислена по формуле

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} y_{11} y'_{10} y'_{01} y'_{00} \\ y_{11} y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{01} y_{00} \\ y_{11} y_{10} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{10} y'_{01} y'_{00} \\ y'_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{vmatrix}.$$

Лемма 5.4: Двойная булева разность ФАЛ по аргументам x_i и x_j может быть вычислена по формуле

$$\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} x_i x_j \\ x'_i x'_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} y'_{00} \\ y'_{11} y_{00} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_i x_j \\ x_i x'_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{10} y'_{01} \\ y'_{10} y_{01} \end{vmatrix} \end{matrix} \right\|.$$

Лемма 5.5: Для ФАЛ логическое произведение булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j может быть вычислено по формуле

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \,\&\, \Delta_{x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} x_i x_j \begin{vmatrix} y_{11} y'_{10} y'_{01} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} \end{vmatrix} \\ x'_i x_j \begin{vmatrix} y_{11} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{01} y'_{00} \end{vmatrix} \\ x_i x'_j \begin{vmatrix} y'_{11} y_{10} y'_{00} \\ y_{11} y'_{10} y_{00} \end{vmatrix} \\ x'_i x'_i \begin{vmatrix} y_{10} y_{01} y'_{00} \\ y'_{10} y'_{01} y_{00} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \qquad)$$

Лемма 5.6: Для ФАЛ логическую сумму булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j можно вычислить по формуле

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y'_{11} y_{10} \\ x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y'_{11} y_{01} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y'_{01} y_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y'_{10} y_{00} \end{vmatrix}.$$

Лемма 5.7: Для ФАЛ результат сложения по модулю два булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j может быть определен по формуле

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m) = \begin{Vmatrix} x_i x_j & y'_{10} y_{01} \\ x'_i x'_i & y_{10} y'_{01} \\ x'_i x_j & y_{11} y'_{00} \\ x_i x'_j & y'_{11} y_{00} \end{Vmatrix}.$$

Лемма 5.8: Для ФАЛ имеет место соотношение

$$\begin{vmatrix} \Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) \\ y_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} y'_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.1.1: Значимость аргумента x_i в монотонной логической функции численно равна вероятности истинности булевой разности ФАЛ по аргументу x_i: $\xi_i = P(\Delta_{x_i} y(X_m))$.

Теорема 4.1.2: Значимость аргумента x_i в немонотонной логической функции численно типа (2.2) равна вероятности истинности булевой разности ФАЛ по аргументу x_i со знаком минус: $\xi_i = -P(\Delta_{x_i} y(X_m))$.

Теорема 4.2: Верно соотношение $v_i \le a_i$, где v_i – относительный вклад i-го аргумента, а a_i – его активность.

Теорема 5.1: Двукратный вес элементов x_i и x_j в системе и совместный вес этих элементов связаны соотношением

$$4g_{x_i \wedge x_j} = 2g_{2x_i x_j} + P\left(\begin{vmatrix} y_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} y'_{00} \end{vmatrix}\right).$$

Теорема 5.2: Двойной вес элементов x_i и x_j в системе численно равен раздельному весу этих элементов $g_{x_i x_j} = g_{x_i \oplus x_j}$.

Теорема 5.3: Суммарный вес элементов x_i и x_j в системе равен сумме раздельного и совместного весов этих элементов в системе $g_{x_i \vee x_j} = g_{x_i \oplus x_j} + g_{x_i \wedge x_j}$.

Теорема: дизъюнкция ортогональных бесповторных форм в базисе конъюнкция-отрицание является ФППЗ.

Приложение 3

Список рисунков и таблиц

Список рисунков

Список таблиц

Список литературы

1. Ryabinin I.A. Reliability of Engineering Systems. Principles and Analysis. Moscow, “Mir”, 1976, –532p.
2. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. - СПб.: Политехника, 2000, –248с.
3. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007, –276с.
4. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Надежность, живучесть и безопасность корабельных электроэнергетических систем. СПб, изд-во ВМА, 1997, –430с.
5. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. – М.: Радио и связь, 1981, –264с.
6. Парфенов Ю.М. Надежность, живучесть и эффективность электроэнергетических систем. ВМА им. А.А. Гречко, ЛВМА, 1989, –324с.
7. Рябинин И.А. Логико-вероятностные методы и их создатели. СПб, изд-во ВВМИУ 1998, –34с.
8. Рябинин И.А. Теоретические основы проектирования электроэнергетических систем кораблей. Л.: ВМА, 1964г, –282с.
9. Рябинин И.А., Киреев Ю.Н. Надежность судовых электро–энергетических систем и судового электрооборудования. Л. Судостроение, 1974, –264с.
10. Рябинин И.А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. Л. Судостроение, 1967, – 362с.
11. Рябинин И.А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. Л. Судостроение, 1971, 2-е изд, –456с.
12. Рябинин И.А. со авт. Вилесов Д.В. Судовые самовозбуждающиеся синхронные генераторы. М., 1962, –180с.
13. Парфенов. Ю.М., Цыглин В.А. Статика и ее применение в технике ВМФ. Уч. пособие. СПб: ВМИ–СПб, 2000, –121с.

14. Надежность и эффективность в технике. Справочник. Том 5. Проектный анализ надежности под. ред. В.И. Патрушева и А.И. Рембезы (Гл.3 Расчет надежности систем со структурной избыточностью (Рябинин, Черкесов 58-134с), гл.4 Расчет надежности систем с временной избыточностью (Черкесов, Креденцер, 135-239с)). М., Машиностроение, 1988, –316с.
15. Гливенко В.И. Курс теории вероятностей. Гос. объединение научно-техническое изд-во. Ред. технико-теоретической лит-ры. М.-Л., 1939, –220с.
16. Хенли Дж. Э., Кумамото Х. Надежность технических систем и оценка риска. М.: Машиностроение, 1984, –528с.
17. Ernest J. Henley and Hiromitsu Kumamoto. Reliability engineering and risk assessment**.** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1981.
18. Birnbraun Z.W. On the importance of different components in a multicomponent system. Multivariate Analyses – 2; New York: Academic Press, 1969. p.581-592.
19. Порецкий П.С. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики. //Труды Казанской сессии физ. мат. Наук. Сер.1, Т.5, 1987, с.112.
20. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Булевы разности для монотонных функций алгебры логики. //Автоматика и телемеханика, № 10, 1997, с193–204.
21. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Определение «веса» и «значимости» отдельных элементов при оценке надежности сложной системы. //Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1978, № 6, с22-32.
22. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М., Хватов В.А. Определение приращения надежности системы при изменениях ее структуры и характеристик. //Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1980, № 1, с36-43.
23. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Определение характеристик важности совокупности элементов энергетической системы при исследовании ее безопасности. //Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1991, №1, с44-57.

24. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М., Цыпин О.Д. Логико-вероятностная теория безопасности технических систем. //Электричество, № 7, 1994, с17-23.
25. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Надежность и эффективность структуры сложных технических систем. //Основные вопросы теории и практики надежности. Минск, «Наука и техника», 1982, с25-39.
26. Можаев А.С. Современное состояние и некоторые направления развития логико-вероятностных методов анализа систем. //Теория и информационная технология моделирования безопасности сложных систем. Выпуск 1, Препринт 101. Санкт-Петербург, 1994, с23-53.
27. Рябинин И.А. Концепция логико-вероятностной теории безопасности. //Приборы и системы управления, 1993, № 10, с6-9.
28. Рябинин И.А. Научная школа «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах» и ее смысл. //Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах: Труды международной научной школы МАБР-2004 (Санкт-Петербург, 22-25 июня, 2004). ГОУ ВПО, СПб ГУАП, 2004, с24-29.
29. Рябинин И.А. Задача № 35 и история ее исследований. //Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах: Труды международной научной школы МАБР-2004 (Санкт-Петербург, 22-25 июня, 2004). ГОУ ВПО, СПб ГУАП, 2004, с408-415.
30. Рябинин И.А. Некоторые понятия и результаты в области логико-вероятностных методов. //Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах: Труды международной научной школы МАБР-2004 (Санкт-Петербург, 22-25 июня, 2004). ГОУ ВПО, СПб ГУАП, 2004,с459-463.
31. Рябинин И.А. Феномен логико-вероятностного исчисления. //Морской вестник, 2005, №1(13), с36-40.

32. Рябинин И.А. Феномен логико-вероятностного исчисления. //Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах: Труды международной научной школы МАБР-2005 (Санкт-Петербург, 28 июня-1 июля, 2005). ГОУ ВПО, СПб ГУАП, 2005, с16-27.
33. Рябинин И.А. Логика теории безопасности и реальный мир. //Морской вестник, 2005, №3(19), с109-112.
34. Рябинин И.А. Математико-компьютерное обозрение проблем надежности, живучести и безопасности. //Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах: Труды международной научной школы МАБР-2007 (Санкт-Петербург, 4-8 сентября, 2007). СПб ГУАП, 2007, с17-23.
35. Рябинин И.А. О связи математической логики с теорией вероятностей. //Ученые записки. Российский государственный гидрометеорологический университет. СПб, 2008, №6, с170-176.
36. Нечипоренко В.И. Структурный анализ и методы построения надежных систем. М.: Сов. Радио, 1968,–255с.
37. Ryabinin I.A. A suggestion of a new measure of system components importance by means of boolean difference. //Microelectronics and reliability, vol.34, №4. Printed in Great Britain, 1994, pp603-613.
38. Ryabinin I.A. Logic-probabilistic theory of safety of complex systems. //International Conference on Informatics and Control (ICI&C97), Proceedings, vol.3, 1997, pp1069-1075.
39. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике. //Труды математического института им. В.А.Стеклова. Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского. М.: АН СССР, 1958, том L1, с5-142.
40. Яблонский С.В. и др. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966, –119с.
41. Яблонский С.В. Теория графов и сетей. М., 1972, –49с.

42. Яблонский С.В. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974, –312с.
43. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 1е издание. М.: Наука, 1979, –272с.
44. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 2е издание. М.: Наука, 1986, –384с.
45. Яблонский С.В. и др. Учебное пособие по курсу «Дискретная математика». Анализ и синтез схем в многозначных логиках. Ч.1. М.: МЭИ, 1989, –117с.
46. Яблонский С.В. и др. Предполные классы в многозначных логиках. Учебное пособие по курсу «Дискретная математика». М.: МЭИ, 1997, –142с.
47. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Учебное пособие для ВУЗов. 4е издание. М.: Высш. шк., 2003, –384с.
48. Труды математического института им. В.А.Стеклова. Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского. М.: Акад. Наук СССР, 1958, том L1, –364с. с5-142.
49. Дискретная математика и математическая кибернетика: [Сборник статей] Под ред С.В. Яблонского. М.: Научный совет по комплекс. пробл. «Кибернетика», 1982, Вып. 86, –168с.
50. Яблонский С.В. Надежность и контроль управляющих систем. Материалы всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М: МГУ, 1986. –203с.
51. Лупанов О.Б. Лекции по математической логике. ч.1, М., 1970, –80с.
52. Лупанов О.Б. Лекции по математической логике. ч.2, М., 1970, –27с.
53. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1984, –138с.
54. Лупанов О.Б. Алгебра, логика и теория чисел. М., 1986, –102с.
55. Лупанов О.Б. Теоретические и прикладные аспекты математических исследований. М.: Изд-во МГУ, 1994, –111с.

56. Материалы всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. Под ред. О.Б. Лупанова. М.: Изд-во МГУ, 1986, –203с.
57. Труды семинара по дискретной математики и ее приложениям. Под ред. О.Б. Лупанова. М.: Изд-во МГУ, 1989, –295с.
58. Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. Под ред. О.Б. Лупанова. – М.: Изд-во МГУ, 1991, –204с.
59. Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. Под ред. О.Б. Лупанова. – М., 1992, –199с.
60. Аналитическая теория чисел и приложения. Под ред. О.Б. Лупанова. М.: Наука, 1997, т.218, –447с.
61. Кудрявцев В.Б. К теории функциональных систем. М.: Б.и., 1981, –8с.
62. Кудрявцев В.Б. О функциональных системах. М.: ВЦ АН СССР, 1981, –64с.
63. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982, –157с.
64. Кудрявцев В.Б. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985, –319с.
65. Кудрявцев В.Б. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1985, –174с.
66. Кудрявцев В.Б. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990, –296с.
67. Гаврилов Г.П. Методы линейной алгебры в теории графов. М.: Изд-во МГУ, 1996, –71с.
68. Логический подход к искусственному интеллекту. Под ред. Г.П. Гаврилова. М.: «Мир», 1990, –429с.
69. Сапоженко А.А. Дизъюнктивно-нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975, –90с.
70. Сапоженко А.А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. М.: фак-т. ВМиК МГУ, 2001, –46с.
71. Сапоженко А.А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. М.: фак. ВМиК МГУ, 2005, –124с.

72. Комбинаторный анализ и теория графов: [Доклады и сообщения 3-го Всесоюзного семинара по комбиноторной математике. Москва, 31 янв.-3 февр. 1975]. Под общ. ред. А.А. Сапоженко. М.: АН СССР, 1978. –155 с. (Науч. совет по комплексной пробл. "Кибернетика" Вып 26).

73. Комбинаторный анализ и теория графов: [Сборник статей]. Под ред. А.А. Сапоженко. М.: Науч. совет по комплексной пробл. "Кибернетика", 1980, Вып 64, –130с.

74. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, Физматлит, 1972, –288с.

75. Горьковой В.Ф. Лекции по дискретной математике: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. –160с.

76. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997, –368с.

77. Гладкий А.В. Математическая логика. М.: Рос. Гос. Гуманитарный ун-т, 1998, –479с.

78. Ермолов Ю.Л., Палютин Е.А, Математическая логика. Учебное пособие для вузов. 2-е издание, испр. и доп. М.: Наука, 1987, –336с.

79. Игонин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. М.: «Академия», 2004, –448с.

80. Кац М., Улам С. Математическая логика. Ретроспективы и перспективы. М.: «Мир», 1971, –254с.

81. Клини С.К. Математическая логика. Пер с англ. Под ред. Г.Е. Минца. 2-е издание. М.: Едиториал: УРСС, 2005, –480с.

82. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М. Едиториал: УРСС, 2004, –240с.

83. Косовский Н.К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Учебное пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, –192с.

84. Кузнецов А.В. Об одном свойстве функций, реализуемых неплоскими бесповторными схемами. //Труды математического института им. В.А.Стеклова. Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского. М.: Акад. Наук СССР, 1958, том L1, с174-185.
85. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. 2-е издание. М.: Энергоатомиздат, 1988, –480с.
86. Лексаченко В.А, Логика. Множества. Вероятность. М.: Вузовская книга, 2001, –128с.
87. Линдон Р. Заметки о логике. М.: «Мир», 1968, –128с.
88. Лихтарников И.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. СПб.: Изд-во «Лань», 1998, –288с.
89. Марков А.А. Элементы математической логики. М.:Изд-во МГУ,1984,–80с.
90. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984, –320с.
91. Новиков П.С. Элементы математической логики. М. 1973, –400с.
92. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2000, –304с.
93. Слупецкий Е, Борковский Л. Элементы математической логики и теории множеств. М.: «Прогресс», 1965, –368с.
94. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебник. М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2004, –224с.
95. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. вводный курс математической логики. 2-е издание. М.: Физматлит, 2002, –128с.
96. Харин Н.Н Математическая логика и теория множеств. Росвузиздат, 1963, –192с.
97. Черт А. Введение в математическую логику. М.: Изд-во ин. Лит-ры, 1960, –486с.
98. Шенфилд Д. Математическая логика. М. 1975, –528с.

99. Избранные вопросы алгебры логики. Сборник. АН СССР Сибирское отделение. Институт математики. Новосибирск: Изд-во «Наука», Сибирское отделение. 1973, –340с.
100. Математическая логика и ее применения: [Сборник статей]. Под ред. Э. Нагела, П. Сапса, Л. Торского. Пер. с англ. Под ред. А.Н. Мельцева. М.: «Мир», 1965, –344с.
101. Математческая логика и алгоритмические проблемы. АН СССР Сибирское отделение. Труды института математики. Под ред. Ю.Л. Ершова. т. 12 Новосибирск: Изд-во «Наука», Сибирское отделение. 1989, –188с.
102. Математическая логика и алгебра: [Сборник статей]. Под ред. С.И. Адаяна. М.: «Наука». 2003, т.243, –207с.
103. Москалев Ю.И., Журавлев В.Ф. Уровни риска при различных условиях лучевого воздействия. М. Энергоатомиздат, 1983, –108с.
104. Математика. Большой энциклопедический словарь. Гл.ред. Ю.В. Прохоров. 2-е изд. М.: Большая Российская Энциклопедия, 1998.
105. Хованов Н.В., Математические модели риска и неопределенности. –СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998, –201с.
106. Федеральный закон «Об обязательном социальном страховании от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний». Свод законов РФ, 1998, №26 - Ст. 3009.
107. Чухин С.Г. Социально-экономические критерии приемлемости радиационного риска новых радиационных технологий. М. Энергоатомиздат. 1991 –63с.
108. Швыряев Ю.В. и др. Вероятностный анализ безопасности атомных станций. Методика выполнения. М.: ИАЭ им. И.В. Курчатова, 1992.

109. Горопашная А.В., Тюрин Г.А. О возможностях упрощения логико-вероятностных расчетов в задачах оценки безопасности структурно сложных систем. //«Modelling and analysis of safety and risk in complex systems». Proceedings of the Forth International Scientific School MA-SR-2005. Saint-Petersburg, June 28 – July 1, 2005. SUIAI. SPb. 2005, с378-383.
110. Горопашная А.В., Тюрин Г.А. Анализ трудоемкости алгоритмов перевода функции алгебры логики в вероятностную функцию при оценке безопасности структурно сложных систем. //«Modelling and analysis of safety and risk in complex systems». Proceedings of the Forth International Scientific School MA-SR-2005. Saint-Petersburg, June 28 – July 1, 2005. SUIAI. SPb. 2005, с375-378.
111. Горопашная А.В. Анализ безопасности эксплуатации гражданских судов и кораблей ВМФ. //Вопросы механики и процессов управления №24: Устойчивость и процессы управления. СПб: изд-во СПбГУ, 2006, с3-14.
112. Горопашная А.В. Адаптация логико-вероятностных методов оценки веса, значимости, вклада, ущерба и активности элементов для немонотонных логических функции. //Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды международной научной школы МАБР-2007. (Санкт–Петербург, 4-8 сентября 2007). СПб ГУАП, 2007, с409-412.
113. Горопашная А.В. Применение MATLAB для анализа безопасности и оценки риска сложных технических систем. //Труды Всероссийской научной конференции «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». СПб.: изд-во СПбГУ, 2007, с157-164.
114. Горопашная А.В. Оценка важности аргументов немонотонных логических функций при логико-вероятностном анализе сложных технических систем. //Вестник СПбГУ, серия 10, выпуск 1, 2009, с19-32.
115. Горопашная А.В. Логико-вероятностный анализ безопасности кораблей ВМФ при возникновении аварийных ситуаций. //Судостроение № 2 2009г, с32-34.

116. Горопашная А.В. Построение функционала Ляпунова одной дифференциально-разностной системы. //Процессы управления и устойчивость: труды 36-й межвузовской конференции аспирантов и студентов. СПб.: изд-во СПбГУ, 2005, с19-23.