УДК 519.248

А. В. Горопашная[1]

ОЦЕНКА ВАЖНОСТИ АРГУМЕНТОВ НЕМОНОТОННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ АНАЛИЗЕ БЕЗОПАСНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение В рамках теории логико-вероятностного исчисления [1] разработаны методы оценки таких характеристик аргументов логической функции, как вес, значимость, вклад, удельный и относительный вклад, активность [2]. Эти параметры указывают, какие события занимают значимое положение и оказывают существенное влияние на безопасность всей технической системы, описываемой данной логической функцией. Аргументами логической функции являются булевские переменные, характеризующие события, которые могут произойти (или не произойти) с системой. Определение указанных параметров очень важно. Во многих случаях в связи со скудностью статистики неизвестны вероятности исходных событий, которые вызывают возникновение аварии, поэтому нет возможности оценить безопасность всей системы. В таком случае определение веса элемента — единственная возможность узнать «слабые места» структуры и оценить безопасность системы.

Методы оценки приведенных выше параметров в настоящее время широко разработаны только для систем, которые описываются *монотонными* логическими функциями. Однако в реальной жизни существуют системы, описываемые *немонотонными* функциями алгебры логики (ФАЛ), которые требуют оценки безопасности. Например, при рассмотрении пожара на любом опасном объекте возможны две ситуации: система пожаротушения сработала и не сработала. От этого напрямую зависит дальнейшее развитие аварии, а значит, и построение логической схемы. В таком случае в логической функции появляется как событие «система пожаротушения сработала» (событие A), так и событие «система пожаротушения не сработала» (событие A').

В данной статье предпринята попытка перенести разработанные ранее результаты для монотонных ФАЛ в область рассмотрения немонотонных функций. В ней под *событием* понимается то, что имеет место, происходит с анализируемой системой, связанное с ней значительное происшествие, явление.

Логико-вероятностный анализ безопасности технических систем. Он используется при оценке надежности, безопасности, живучести, стойкости различных систем. Задача оценки безопасности и риска сложных технических систем, таких как АЭС, корабли и суда, самолеты и т. д., в настоящее время становится все более и более актуальной [1].

Процесс анализа безопасности любой системы является симметричным процессу анализа ее потенциальной опасности (вероятность наступления негативного события и вероятность благоприятного исхода событий в сумме дают единицу). Практика анализа безопасности сложных объектов показала, что удобнее прослеживать их реакцию на аварийные воздействия, чем определять сценарии успешного развития событий. Предположим, что анализ безопасности заключается в выявлении сценариев опасного функционирования, и конечным итогом является вероятность наступления негативного события (вероятность опасного функционирования системы P), которое может привести к серьезным последствиям. На основе полученных данных вычисляется вероятность

[1]Горопашная Анастасия Визвутовна - инженер ФГУП «ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова». Количество опубликованных работ: 7. Научное направлениве: анализ беопасности сложных технических систем. E-mail: torres2005@yandex.ru.

безопасного функционирования системы: $Q = 1 - P$.

При анализе безопасности первоначально определяется перечень аварийных воздействий на систему (пожар, взрыв реактора для АЭС, шторм и затопление для корабля и т. п.). Прослеживая ход развития каждой аварии, инженеры должны выяснить, что и с какой вероятностью может произойти с системой.

Логико-вероятностный анализ включает в себя следующие стадии:

1) разработка физической модели развития аварии с объектом, безопасность которого исследуется. Элементами физической модели являются события, происходящие с системой;

2) составление математической модели на основании созданной физической модели. В качестве математической модели выступает ФАЛ ($F(x_1, ..., x_n)$), состоящая из возможных сценариев развития аварии, аргументами ее являются булевские переменные (x_i), характеризующие события, которые могут произойти (или не произойти) с анализируемым объектом;

3) по полученной на 2-м этапе ФАЛ определяется вероятность $P(F = 1)$, которая зависит от вероятностей событий, входящих в логическую функцию $P(x_i)$; таким образом, $P(F = 1)$ представляет собой полином от n переменных $P(x_1), ..., P(x_n)$. В логико-вероятностном исчислении он называется *вероятностным полиномом*;

4) подставляя в вероятностный полином вероятности входящих событий $P(x_i)$, вычисляется вероятность наступления негативного события, которое может произойти с системой.

С математической точки зрения, весь приведенный процесс универсальный и может применяться при оценке безопасности и риска в любой сфере человеческой деятельности.

Характеристики важности для одного события. ***Основные определения и теоремы.*** *Вес* логической функции, состоящей из m элементов, есть относительная доля наборов элементов, на которых функция равна 1, среди всех 2^m наборов возможных значений элементов [1].

Булева разность <u>любой</u> функции $y(X_m)$ по аргументу x_i есть результат сложения по модулю два функции $y(X_m)$ и симметричной с ней функцией $y_{x'_i}(X_m) = y(x_1, ..., x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, ..., x_m)$:

$$\Delta_{x'_i} y(X_m) = y(X_m) \oplus y_{x'_i}(X_m) = y(x_1, ..., x_i, ..., x_m) \oplus y(x_1, ..., x'_i, ..., x_m) =$$

$$= y \& y'_{x'_i} \vee y' \& y_{x'_i} = \begin{vmatrix} y y'_{x'_i} \\ y' y_{x'_i} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

В формуле (1) приняты обозначения, принятые в логико-вероятностном анализе: знаки конъюнкции опущены, дизъюнкция записывается в виде матрицы, строками которой являются присутствующие в ней конъюнкции [1].

Лемма 1: *Монотонная логическая функция $y(X_m)$ является импликантой ее единичной функции $y_1^i(X_m) = y(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_m)$, а нулевая функция $y_0^i(X_m) = y(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_m)$ есть импликанта исходной функции $y(X_m)$, т.е., обозначив $[y(x)]$ множество наборов X_m, на которых $y(x) = 1$, имеет место включение:*

$$[y_0^i(X_m)] \subseteq [y(X_m) \subseteq [y_1^i(X_m)]. \tag{2}$$

Для немонотонных ФАЛ формула (2) не верна.

Доказательство невыполнения леммы 1 для немонотонных ФАЛ:

Функцию $y(X_m)$ можно представить в дизъюнктивно-нормальной форме (ДНФ): $y(X_m) = (\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q)$, где $(\vee_j K_j)$ - конъюнкции, содержащие x_i, $(\vee_L K_L)$ — конъюнкции, содержащие x_i', $(\vee_q K_q)$ — конъюнкции, не содержащие x_i и x_i'.

Из того, что $[y_0^i(X_m)] \subseteq [y(X_m)]$, следует $[\vee_{L0} K_{L0}] \subseteq [(\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L)]$, так как $[\vee_{L0} K_{L0}] \supseteq [\vee_L K_L]$, то часть или все $K_{L0} = K_L(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_m)$ принадлежат $\vee_j K_j$. А это выполняется только для логических функций, удовлетворяющих определенным ограничениям.

Аналогично, из того, что $[y(X_m)] \subseteq [y_1^i(X_m)]$, следует $[(\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L)] \subseteq [\vee_{j1} K_{j1}]$, значит, $[\vee_L K_L] \subseteq [\vee_{j1} K_{j1}]$, где $K_{j1} = K_j(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_m)$. Это также выполняется только для логических функций, удовлетворяющих определенным ограничениям. *Утверждение доказано.*

Вес элемента x_i в системе есть вес булевой разности монотонной логической функции по аргументу x_i [1]:

$$g_{x_i} = g(\Delta_{x_i} y(X_m)).$$

Значимость элемента x_i есть частная производная от вероятности опасного функционирования всей системы $P_c = P(y(X_m) = 1)$ по вероятности опасности данного события $P_i = P(x_i = 1)$ [1]:

$$\xi_i = \frac{\partial P_c}{\partial P_i}. \tag{3}$$

Под записью $P(a)$ понимаем вероятность истинности a, т. е. $P(a = 1)$.

Теорема 1: *Значимость аргумента* x_i *в монотонной логической функции численно равна вероятности истинности булевой разности ФАЛ по аргументу* x_i*:*

$$\xi_i = P(\Delta_{x_i} y(X_m)). \tag{4}$$

Для немонотонных функций данная теорема (4) не выполняется, поскольку в ходе доказательства используется лемма 1, которая справедлива только для монотонных ФАЛ [1].

Вкладом события x_i в безопасность системы назовем полную вероятность опасного функционирования системы, определяемую данным событием [1]:

$$B_i = P_i \cdot \xi_i. \tag{5}$$

Относительный вклад [1]

$$v_i = \frac{B_i}{P_c}. \tag{6}$$

Для вышеприведенных характеристик существуют формулы для их вычисления.

Вес

$$g_i = g_{y_1^i(X_m)} - g_{y_0^i(X_m)} = \sum_{i=1}^{k} 2^{-(r_i - 1)} - \sum_{j=1}^{l} 2^{-(r_l - 1)}, \tag{7}$$

где k, r_i — число и ранг конъюнкций в ортогональной ДНФ (ОДНФ) (все конъюнкции в ОДНФ ортогональны друг другу), содержащих аргумент x_i; l, r_j — число и ранг конъюнкций в ОДНФ, содержащих аргумент x_i' [1].

Формула (7) верна только для монотонных ФАЛ, так как при ее выведении используется включение $[y_0^i(X_m)] \subseteq [y_1^i(X_m)]$ (лемма 1).

Значимость

$$\xi_i = P_{c1}^i - P_{c0}^i, \tag{8}$$

здесь $P_{c1}^i = P(y_1^i = 1), P_{c0}^i = P(y_0^i = 1)$ [1].

Вклад [1]

$$B_i = P_i \cdot \xi_i = P_c - P_{c0}^i, \tag{9}$$

относительный вклад [1]

$$v_i = \frac{B_i}{P_c} = 1 - \frac{P_{c0}^i}{P_c} = \frac{\xi_i P_i}{P_c}. \tag{10}$$

Формулы для вычисления значимости (8) и вклада (9), (10) не зависят от монотонности функции и верны для немонотонных ФАЛ.

А именно, любую ФАЛ по любому аргументу можно разложить как $y = y_1^i x_i \vee y_0^i x_i'$, тогда безопасность всей системы будет определяться как

$$P_c = P(y_1^i x_i) + P(y_0^i x_i') = P_{c1}^i P_i + P_{c0}^i(1 - P_i).$$

Учитывая формулу (3), получаем (8), из чего следуют (9) и (10).

Активность аргументов немонотонных ФАЛ. И. А. Рябинин и Ю. М. Парфенов в работе [2] ссылаются на книгу J. Henley и H. Kumamoto [3], в которой приведен показатель, характеризующий активность в смысле отказа.

$$I_i^{FV} = \frac{Q(S_i)}{Q_c} \equiv a_i(Q). \tag{11}$$

Если условия работоспособности системы записаны через логическую функцию в ДНФ, то показатель идентичный (11) выразится соотношением

$$a_i(R) = \frac{P(\vee_j K_j)}{P_c}, \tag{12}$$

где $P(\bigvee_j K_j)$ — вероятность безотказной работы системы, вычисленная только по тем конъюнкциям, которые содержат i -ый элемент. Активность (12) в книге [2] названа *активностью элемента в смысле безотказности.* Это может быть легко переформулировано в терминах безопасности (элемент — событие, работоспособность — безопасность), но математическая форма не изменится.

Активность в таком определении учитывает только события, входящие без отрицания. Потому это определение не отражает реальной активности аргументов немонотонных функций, входящих с отрицаниями.

Более объективной, на мой взгляд, будет следующая формула активности для немонотонных функций

$$a_i = \frac{P((\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L))}{P_c}, \tag{13}$$

здесь $\vee_j K_j$ — конъюнкции, которые содержат x_i; $\vee_L K_L$ — конъюнкции, содержащие x_i'; $P((\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) = 1)$ — вероятность опасной работы системы, вычисленная по конъюнкциям, содержащих x_i и x_i'. При этом, формула (13) имеет смысл как для немонотонных, так и для монотонных ФАЛ, поскольку последние не содержат конъюнкции $\vee_L K_L$, и формула (13) превращается в (12).

Теорема 2: *Для активности, вычисленной по формуле (13), верно соотношение*

$$v_i \leq a_i, \tag{14}$$

где v_i — относительный вклад i-го аргумента, а a_i — его активность.

Доказательство: Любую немонотонную функцию алгебры логики можно представить в ДНФ:

$$y(X_m) = (\vee_j K_j) \vee (\vee_L K_L) \vee (\vee_q K_q),$$

в которой $\vee_j K_j$- конъюнкции, содержащие x_i, $\vee_L K_L$ — конъюнкции, содержащие x_i', $\vee_q K_q$ — конъюнкции, не содержащие x_i и x_i'. Это можно записать в более удобной форме:

$$y(X_m) = \left| \begin{array}{c} \vee_j K_j \\ \vee_L K_L \\ \vee_q K_q \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \vee_j (K_{j1} \& x_i) \\ \vee_L (K_{L1} \& x_i') \\ \vee_q K_q \end{array} \right|.$$

Следовательно,

$$y_{x_i'}(X_m) = \left| \begin{array}{c} \vee_j K_{jx_i'} \\ \vee_L K_{Lx_i} \\ \vee_q K_q \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \vee_j (K_{j1} \& x_i') \\ \vee_L (K_{L1} \& x_i) \\ \vee_q K_q \end{array} \right|; \quad y_0^i = \left| \begin{array}{c} \vee_L K_{L1} \\ \vee_q K_q \end{array} \right|; \quad y_1^i = \left| \begin{array}{c} \vee_j K_{j1} \\ \vee_q K_q \end{array} \right|,$$

где $\vee_j K_{j1}$ — конъюнкции, в которых аргумент x_i заменен на единицу; $\vee_L K_{L1}$ — конъюнкции, в которых аргумент x_i' заменен на единицу.

Тогда вероятность истинности логической функции будет вычисляться следующим образом:

$$P_c = P(((\vee_j K_{j1}) \& x_i) \vee ((\vee_L K_{L1}) \& x_i')) + P(\vee_q K_q) -$$
$$-P((\vee_q K_q) \& (((\vee_j K_{j1}) \& x_i) \vee ((\vee_L K_{L1}) \& x_i'))).$$

После раскрытия скобок имеем:

$$P_c = P(((\vee_j K_{j1}) \& x_i) \vee ((\vee_L K_{L1}) \& x_i')) + P(\vee_q K_q) -$$

$$-P((\vee_q K_q) \& (\vee_j K_{j1}) \& x_i) - P((\vee_q K_q) \& (\vee_L K_{L1}) \& x_i').$$

Учитывая, что элемент x_i не входит ни в одну из присутствующих конъюнкций и $P(x_i) = P_i, \quad P(x_i') = 1 - P_i$, получаем

$$P_c = P(((\vee_j K_{j1}) \& x_i) \vee ((\vee_L K_{L1}) \& x_i')) + P(\vee_q K_q) -$$

$$-P((\vee_q K_q) \& (\vee_j K_{j1}))P_i - P((\vee_q K_q) \& (\vee_L K_{L1})) + P((\vee_q K_q) \& (\vee_L K_{L1}))P_i.$$

Поскольку $P_{c0}^i = P(y_0^i = 1) = P(\vee_L K_{L1}) + P(\vee_q K_q) - P((\vee_q K_q) \& (\vee_L K_{L1}))$, и учитывая, что $P((\vee_q K_q) \& (\vee_L K_{L1})) = P(\vee_L K_{L1}) P((\vee_q K_q) | (\vee_L K_{L1}))$, находим:

$$P_c = P(((\vee_j K_{j1}) \& x_i) \vee ((\vee_L K_{L1}) \& x_i')) + P_{c0}^i -$$

$$-P((\vee_q K_q) \& (\vee_j K_{j1}))P_i + P_i P(\vee_L K_{L1}) P((\vee_q K_q) | (\vee_L K_{L1})) - P(\vee_L K_{L1}).$$

Приводя подобные члены, получаем

$$P_c = P(((\vee_j K_{j1})\&x_i) \vee ((\vee_L K_{L1})\&x_i')) + P^i_{c0}-$$

$$-[P((\vee_q K_q)\&(\vee_j K_{j1}))P_i + P(\vee_L K_{L1})[1 - P_i P((\vee_q K_q)|(\vee_L K_{L1}))]].$$

Так как $[1 - P_i P((\vee_q K_q)|(\vee_L K_{L1}))] \geq 0$, значит, $[P((\vee_q K_q)\&(\vee_j K_{j1}))P_i + P(\vee_L K_{L1})[1 - P_i P((\vee_q K_q)|(\vee_L K_{L1}))]] \geq 0$, следовательно, $P_c - P^i_{c0} \leq P(((\vee_j K_{j1})\&x_i) \vee ((\vee_L K_{L1})\&x_i'))$, тогда справедливо следующее неравенство:

$$v_i = \frac{P_c - P^i_{c0}}{P_c} \leq \frac{P(((\vee_j K_{j1})\&x_i) \vee ((\vee_L K_{L1})\&x_i'))}{P_c} = a_i \Rightarrow v_i \leq a_i.$$

Теорема доказана.

Характеристики важности для двух событий немонотонной ФАЛ. *Двукратная булева разность* <u>любой</u> функции $y(X_m)$ по аргументам x_i и x_j есть выражение [1]

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} = \Delta_{x_i}[\Delta_{x_j} y(X_m)]. \tag{15}$$

Двойная булева разность <u>любой</u> функции $y(X_m)$ по аргументам x_i и x_j есть результат сложения по модулю два исходной функции $y(X_m)$ и симметричной с ней функции $y_{x_i' x_j'}(X_m) = y(x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j', x_{j+1}, ..., x_m)$ [1]:

$$\Delta_{x_i x_j} = y(X_m) \oplus y_{x_i' x_j'}(X_m) = y\&y'_{x_i' x_j'} \vee y'\&y_{x_i' x_j'} = \left| \begin{array}{c} yy'_{x_i' x_j'} \\ y' y_{x_i' x_j'} \end{array} \right|. \tag{16}$$

Лемма 2: *Двукратная булева разность* <u>*любой*</u> *ФАЛ не зависит от порядка аргументов, по которым она вычисляется, т. е.*

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} = \Delta\Delta_{x_j x_i}. \tag{17}$$

Доказательство данной леммы одинаково для монотонных и немонотонных ФАЛ [1].

Лемма 3: *Двойная нулевая функция по аргументам x_i и x_j является импликантой нулевой единичной (единичной нулевой) функции по тем же аргументам, которая, в свою очередь, является импликантой двойной единичной функции для всех монотонных ФАЛ, т. е. имеют место включения*

$$[y^{i,j}_{00}] \subseteq [y^{i,j}_{01}] \subseteq [y^{i,j}_{01} \vee y^{i,j}_{10}] \subseteq [y^{i,j}_{11}]; \qquad [y^{i,j}_{00}] \subseteq [y^{i,j}_{10}] \subseteq [y^{i,j}_{01} \vee y^{i,j}_{10}] \subseteq [y^{i,j}_{11}]. \tag{18}$$

<u>Для немонотонных функций данная лемма (см. (18)) не выполняется.</u>

Доказательство невыполнения леммы 3 для немонотонных ФАЛ:

Рассмотрим конъюнкции (далее в обозначениях $y^{i,j}_{00}, y^{i,j}_{01}, y^{i,j}_{10}, y^{i,j}_{11}$ верхние индексы опущены)

	y	y_{00}	y_{10}	y_{01}	y_{11}
$\prod_i$	x_i	$-$	1	$-$	1
$\prod_{i'}$	x_i'	1	$-$	1	$-$
$\prod_j$	x_j	$-$	$-$	1	1
$\prod_{j'}$	x_j'	1	1	$-$	$-$
$\prod_{ij}$	$x_i x_j$	$-$	$-$	$-$	$1,1$
$\prod_{i'j}$	$x_i' x_j$	$-$	$-$	$1,1$	$-$
$\prod_{ij'}$	$x_i x_j'$	$-$	$1,1$	$-$	$-$
$\prod_{i'j'}$	$x_i' x_j'$	$1,1$	$-$	$-$	$-$
K_m	K_m	K_m	K_m	K_m	$K_m.$

Здесь $\prod_i, \prod_{i'}, \prod_j, \prod_{j'}, \prod_{ij}, \prod_{i'j}, \prod_{ij'}, \prod_{i'j'}, K_m$ – - конъюнкции, содержащие элементы соответственно $x_i, x_i', x_j, x_j', (x_i, x_j), (x_i', x_j), (x_i, x_j'), (x_i', x_j')$, не содержащие (x_i, x_i', x_j, x_j'). Для удобства в функциях выписаны только элементы x_i, x_i', x_j, x_j'. В функциях $y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{11}$ на местах, отвечающих элементам x_i, x_i', x_j, x_j', стоят соответственно нули или единицы. При таком представлении наглядно видно, что ни одна из рассматриваемых функций не может быть включена ни в другую, ни в объединение нескольких функций, поскольку конъюнкции $\prod_{ij}, \prod_{i'j}, \prod_{ij'}, \prod_{i'j'}$ для них имеются только в одном экземпляре.

Утверждение доказано.

Лемма 4: *Двукратная булева разность <u>любой</u> ФАЛ по аргументам x_i и x_j может быть вычислена по формуле*

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} y_{11}y_{10}'y_{01}'y_{00}' \\ y_{11}y_{10}y_{01}y_{00}' \\ y_{11}y_{10}'y_{01}y_{00} \\ y_{11}y_{10}y_{01}'y_{00} \\ y_{11}'y_{10}'y_{01}'y_{00} \\ y_{11}'y_{10}y_{01}y_{00} \\ y_{11}'y_{10}y_{01}'y_{00}' \\ y_{11}'y_{10}'y_{01}'y_{00} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим

$$\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = y_{11} \oplus y_{10} \oplus y_{01} \oplus y_{00} = (y_{11}\&y_{00}' \vee y_{11}'\&y_{00}) \oplus (y_{10}\&y_{01}' \vee y_{10}'\&y_{01}) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_{11}y_{00}' \\ y_{11}'y_{00} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{10}'y_{01}' \\ y_{10}y_{01} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} y_{10}y_{01}' \\ y_{10}'y_{01} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11}'y_{00}' \\ y_{11}y_{00} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_{11}y_{10}'y_{01}'y_{00}' \\ y_{11}y_{10}y_{01}y_{00}' \\ y_{11}'y_{10}'y_{01}'y_{00} \\ y_{11}'y_{10}y_{01}y_{00} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} y_{11}'y_{10}y_{01}'y_{00}' \\ y_{11}y_{10}y_{01}'y_{00} \\ y_{11}'y_{10}'y_{01}y_{00}' \\ y_{11}y_{10}'y_{01}y_{00} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 5: *Двойная булева разность <u>любой</u> ФАЛ по аргументам x_i и x_j может быть вычислена по формуле*

$$\Delta_{x_i x_j} y(X_m) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11}y_{00}' \\ y_{11}'y_{00} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_i' x_j \\ x_i x_j' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{10}y_{01}' \\ y_{10}'y_{01} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $y(X_m)$ и $y_{x_i' x_j'}(X_m)$ можно представить в виде

$$y(X_m) = x_i x_j y_{11} \vee x_i' x_j y_{01} \vee x_i x_j' y_{10} \vee x_i' x_j' y_{00} = \begin{vmatrix} x_i x_j y_{11} \\ x_i' x_j y_{01} \\ x_i x_j' y_{10} \\ x_i' x_j' y_{00} \end{vmatrix},$$

$$y_{x_i'x_j'}(X_m) = x_i'x_j'y_{11} \vee x_ix_j'y_{01} \vee x_i'x_jy_{10} \vee x_ix_jy_{00} = \left| \begin{array}{l} x_i'x_j'y_{11} \\ x_ix_j'y_{01} \\ x_i'x_jy_{10} \\ x_ix_jy_{00} \end{array} \right|.$$

Тогда, подставляя в формулу для вычисления двойной булевой разности функции $y(X_m)$ и $y_{x_i'x_j'}(X_m)$, представленные в таком виде, и проведя все необходимые упрощения, получим формулу (20).

Лемма доказана.

Лемма 6: *Для* <u>*любой*</u> *ФАЛ логическое произведение булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j может быть вычислено по формуле*

$$\Delta_{x_i}y(X_m)\&\Delta_{x_j}y(X_m) = \left| \begin{array}{l} x_ix_j \left| \begin{array}{l} y_{11}y_{10}'y_{01}' \\ y_{11}'y_{10}y_{01} \end{array} \right| \\ \\ x_i'x_j \left| \begin{array}{l} y_{11}y_{01}'y_{00} \\ y_{11}'y_{01}y_{00}' \end{array} \right| \\ \\ x_ix_j' \left| \begin{array}{l} y_{11}'y_{10}y_{00}' \\ y_{11}y_{10}'y_{00} \end{array} \right| \\ \\ x_i'x_j' \left| \begin{array}{l} y_{10}y_{01}y_{00}' \\ y_{10}'y_{01}'y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right|. \tag{21}$$

Доказательство: Учтем, что $\Delta_{x_i}y(X_m) = y_1^i \oplus y_0^i = (x_jy_{11} \vee x_j'y_{10}) \oplus (x_jy_{01} \vee x_j'y_{00})$. Упрощая и раскрывая скобки, получим, что

$$\Delta_{x_i}y(X_m) = \left| \begin{array}{l} x_j \left| \begin{array}{l} y_{11}y_{01}' \\ y_{11}'y_{01} \end{array} \right| \\ \\ x_j' \left| \begin{array}{l} y_{10}y_{00}' \\ y_{10}'y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right|.$$

Аналогично, $\Delta_{x_j}y(X_m) = y_1^j \oplus y_0^j = (x_iy_{11} \vee x_i'y_{01}) \oplus (x_iy_{10} \vee x_i'y_{00})$. Упростив имеем

$$\Delta_{x_j}y(X_m) = \left| \begin{array}{l} x_i \left| \begin{array}{l} y_{11}y_{10}' \\ y_{11}'y_{10} \end{array} \right| \\ \\ x_i' \left| \begin{array}{l} y_{01}y_{00}' \\ y_{01}'y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right|.$$

Находя конъюнкцию полученных булевых разностей, приходим к (21).

Лемма доказана.

Лемма 7: *Для любой ФАЛ логическую сумму булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j можно вычислить по формуле*

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{c} x_i y_{11} y'_{10} \\ x_i y'_{11} y_{10} \\ x_j y_{11} y'_{01} \\ x_j y'_{11} y_{01} \\ x'_i y_{01} y'_{00} \\ x'_i y'_{01} y_{00} \\ x'_j y_{10} y'_{00} \\ x'_j y'_{10} y_{00} \end{array} \right|, \qquad (22)$$

Доказательство: Учитывая найденные при доказательстве леммы 6

$$\Delta_{x_i} y(X_m) = \left| \begin{array}{c} x_j \left| \begin{array}{c} y_{11} y'_{01} \\ y'_{11} y_{01} \end{array} \right| \\ \\ x'_j \left| \begin{array}{c} y_{10} y'_{00} \\ y'_{10} y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right|, \quad \Delta_{x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{c} x_i \left| \begin{array}{c} y_{11} y'_{10} \\ y'_{11} y_{10} \end{array} \right| \\ \\ x'_i \left| \begin{array}{c} y_{01} y'_{00} \\ y'_{01} y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right|,$$

получаем (22).

Лемма 8: *Для любой ФАЛ результат сложения по модулю два булевых разностей от одной и той же функции по аргументам x_i и x_j может быть определен по формуле*

$$\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m) = \left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} x_i x_j \\ x'_i x'_j \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} y'_{10} y_{01} \\ y_{10} y'_{01} \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{c} x'_i x_j \\ x_i x'_j \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} y_{11} y'_{00} \\ y'_{11} y_{00} \end{array} \right| \end{array} \right| \qquad (23)$$

Доказательство: Аналогично, учитывая полученные при доказательстве леммы 6 $\Delta_{x_i} y(X_m)$ и $\Delta_{x_j} y(X_m)$, после выполнения всех действий при нахождении $\Delta x_i y(X_m) \oplus \Delta x_j y(X_m)$, приходим к (23).

Лемма 9: *Для любых ФАЛ имеет место соотношение*

$$\left| \begin{array}{c} \Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m) \\ y_{11} y'_{10} y'_{01} y_{00} \\ y'_{11} y_{10} y_{01} y'_{00} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \end{array} \right|. \qquad (24)$$

Доказательство: Вычислим значение каждой конъюнкции в правой части. $\Delta_{x_i} y(X_m) \& \Delta_{x_j} y(X_m)$ уже найдена при доказательстве леммы 6. Аналогично

$$\Delta_{x_i} y_{x'_j} \& \Delta_{x_j} y = \left| \begin{array}{c|c|} x_i x'_j & \begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \end{array} \\ & \\ x'_i x'_j & \begin{array}{c} y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \end{array} \\ & \\ x_i x_j & \begin{array}{c} y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \end{array} \\ & \\ x'_i x_j & \begin{array}{c} y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y'_{00} \end{array} \end{array} \right|, \quad \Delta_{x_i} y \& \Delta_{x_j} y_{x'_i} = \left| \begin{array}{c|c|} x'_i x_j & \begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \end{array} \\ & \\ x_i x_j & \begin{array}{c} y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \end{array} \\ & \\ x'_i x'_j & \begin{array}{c} y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \end{array} \\ & \\ x_i x'_j & \begin{array}{c} y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y'_{00} \end{array} \end{array} \right|,$$

$$\Delta_{x_i} y_{x'_j} \& \Delta_{x_j} y_{x'_i} = \left| \begin{array}{c|c|} x'_i x'_j & \begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \end{array} \\ & \\ x_i x'_j & \begin{array}{c} y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \end{array} \\ & \\ x'_i x_j & \begin{array}{c} y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \end{array} \\ & \\ x_i x_j & \begin{array}{c} y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y'_{00} \end{array} \end{array} \right|,$$

значит,

$$\left| \begin{array}{c} \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y(X_m) \\ \Delta_{x_i} y(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \\ \Delta_{x_i} y_{x'_j}(X_m) \Delta_{x_j} y_{x'_i}(X_m) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \\ y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \\ y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y'_{00} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} y_{11} & y'_{10} & y'_{01} & \bullet \\ y'_{11} & y_{10} & y_{01} & \bullet \\ y_{11} & \bullet & y'_{01} & y_{00} \\ y'_{11} & \bullet & y_{01} & y'_{00} \\ y'_{11} & y_{10} & \bullet & y'_{00} \\ y_{11} & y'_{10} & \bullet & y_{00} \\ \bullet & y_{10} & y_{01} & y'_{00} \\ \bullet & y'_{10} & y'_{01} & y'_{00} \end{array} \right|.$$

При умножении каждой строчки на дизъюнкцию, состоящую из недостающего элемента и его отрицания, например на $y_{00} \vee y'_{00} = 1$, получаем (24).

Лемма доказана.

Двукратный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес двукратной булевой разности логической функции по аргументам x_i и x_j [1]

$$g_{2x_i x_j} = P(\Delta\Delta_{x_i x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \tag{25}$$

Двойной вес элементов x_i и x_j в системе есть вес двойной булевой разности логической ФРС по аргументам x_i и x_j [1]:

$$g_{x_i x_j} = P(\Delta_{x_i x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \tag{26}$$

Совместный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес логического произведения булевых разностей ФРС по аргументам x_i и x_j [1]:

$$g_{x_i \wedge x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \wedge \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \tag{27}$$

Суммарный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес логической суммы булевых разностей ФРС по аргументам x_i и x_j [1]:

$$g_{x_i \vee x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \vee \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \tag{28}$$

Раздельный вес элементов x_i и x_j в системе есть вес результата сложения по модулю два булевых разностей ФРС по аргументам x_i и x_j [1]:

$$g_{x_i \oplus x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m))|_{R_i=0.5, i=\overline{1,m}}. \tag{29}$$

Формулы (25)—(29) для вычисления весов не зависят от монотонности функции и верны для немонотонных ФАЛ.

Теорема 3: *Двукратный вес элементов x_i и x_j в системе и совместный вес этих элементов связаны соотношением*

$$4g_{x_i \wedge x_j} = 2g_{2x_ix_j} + P\left(\left|\begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{array}\right|\right). \tag{30}$$

Данная теорема имеет место для любых ФАЛ, но доказательство для всех ФАЛ отличается от доказательства для монотонных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о для всех ФАЛ:

$$g_{x_i \wedge x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \& \Delta_{x_j} y(X_m)) = P\left(\left|\begin{array}{c} x_ix_j \left| \begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \end{array}\right| \\ \\ x'_ix_j \left| \begin{array}{c} y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \end{array}\right| \\ \\ x_ix'_j \left| \begin{array}{c} y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \end{array}\right| \\ \\ x'_ix'_j \left| \begin{array}{c} y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y'_{00} \end{array}\right| \end{array}\right|\right) =$$

$$= 0.25 \cdot P\left(\left|\begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01} \\ y'_{11}y_{10}y_{01} \\ y_{11}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{01}y'_{00} \\ y'_{11}y_{10}y'_{00} \\ y_{11}y'_{10}y_{00} \\ y_{10}y_{01}y'_{00} \\ y'_{10}y'_{01}y'_{00} \end{array}\right|\right) = (\text{По лемме 9}) = 0.25 \cdot P\left(\left|\begin{array}{c} \Delta\Delta_{x_ix_j} y(X_m) \\ y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{array}\right|\right) =$$

$$= 0.25\left(P(\Delta\Delta_{x_ix_j} y(X_m)) + P\left(\left|\begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{array}\right|\right)\right) = 0.25\left(g_{2x_ix_j} + P\left(\left|\begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{array}\right|\right)\right),$$

значит, $4g_{x_i \wedge x_j} = 2g_{2x_ix_j} + P\left(\left|\begin{array}{c} y_{11}y'_{10}y'_{01}y_{00} \\ y'_{11}y_{10}y_{01}y'_{00} \end{array}\right|\right)$.

Теорема доказана.

Теорема 4: *Двойной вес элементов x_i и x_j в системе численно равен раздельному весу этих элементов*

$$g_{x_i x_j} = g_{x_i \oplus x_j}. \qquad (31)$$

Данная терема имеет место для <u>любых</u> ФАЛ, но доказательство для всех ФАЛ отличается от доказательства для монотонных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о для всех ФАЛ: Найдем отдельно $g_{x_i x_j}$ и $g_{x_i \oplus x_j}$

$$g_{x_i x_j} = P(\Delta_{x_i x_j} y(X_m)) = P\left(\left|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} y_{11} y_{00}' \\ y_{11}' y_{00} \end{array}\right| \\ \\ \left|\begin{array}{c} x_i' x_j \\ x_i x_j' \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} y_{10} y_{01}' \\ y_{10}' y_{01} \end{array}\right| \end{array}\right|\right) = P\left(\left|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{array}\right|(y_{11} \oplus y_{00}) \\ (x_i \oplus x_j)(y_{10} \oplus y_{01}) \end{array}\right|\right) =$$

$$= P\left(\left|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{array}\right|(y_{11} \oplus y_{00}) \end{array}\right|\right) + P((x_i \oplus x_j)(y_{10} \oplus y_{01})) = 0.5P(y_{11} \oplus y_{00}) + 0.5P(y_{10} \oplus y_{01}) =$$

$$= 0.5(P(y_{11}) + P(y_{00}) - 2P(y_{11}y_{00}) + P(y_{01}) + Py_{10}) - 2P(y_{10}y_{01}))$$

$$g_{x_i \oplus x_j} = P(\Delta_{x_i} y(X_m) \oplus \Delta_{x_j} y(X_m)) = P\left(\left|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j' \\ x_i' x_j \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} y_{11} y_{00}' \\ y_{11}' y_{00} \end{array}\right| \\ \\ \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} y_{10} y_{01}' \\ y_{10}' y_{01} \end{array}\right| \end{array}\right|\right) =$$

$$= P\left(\left|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} x_i x_j \\ x_i' x_j' \end{array}\right|(y_{10} \oplus y_{01}) \end{array}\right|\right) + P((x_i \oplus x_j)(y_{11} \oplus y_{00})) = 0.5P(y_{11} \oplus y_{00}) + 0.5P(y_{10} \oplus y_{01}) =$$

$$= 0.5(P(y_{11}) + P(y_{00}) - 2P(y_{11}y_{00}) + P(y_{01}) + P(y_{10}) - 2P(y_{10}y_{01}))$$

Теорема доказана.

Теорема 5: *Суммарный вес элементов x_i и x_j в системе равен сумме раздельного и совместного весов этих элементов в системе:*

$$g_{x_i \vee x_j} = g_{x_i \oplus x_j} + g_{x_i \wedge x_j}. \qquad (32)$$

Данная терема имеет место для <u>любых</u> ФАЛ, но доказательство для всех ФАЛ отличается от доказательства для монотонных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о для всех ФАЛ:

$$g_{x_i \vee x_j} = P(\Delta_{x_i} \vee \Delta_{x_j}) = ((5.122)\ [2])) = P((\Delta_{x_i} \oplus \Delta_{x_j}) \vee \Delta_{x_i}\Delta_{x_j}) =$$

$$= P(\Delta_{x_i} \oplus \Delta_{x_j}) + P(\Delta_{x_i}\Delta_{x_j}) - P((\Delta_{x_i} \oplus \Delta_{x_j}) \& \Delta_{x_i}\Delta_{x_j}) = g_{x_i \oplus x_j} + g_{x_i \wedge x_j}.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим логические функции $y_1 = \left|\begin{array}{c} x_1 x_3 \\ x_2 x_4 \\ x_1 x_4 x_5 \end{array}\right|$ и $y_2 = \left|\begin{array}{c} x_1 x_3 \\ x_2 x_4 \\ x_1' x_4' x_5 \end{array}\right|$. Для этих функций можно вычислить величины:

	y_1	y_2
g_{y_1}	0.46875	0.5625
g_{x_1}	0.4375	0.5
ξ_1	$P_3 - P_2P_3P_4 + P_4P_5 - P_3P_4P_5 - P_2P_4P_5 + P_2P_3P_4P_5$	$P_3 - P_2P_3P_4 - P_5 + P_4P_5$
a_{x_1}	$(P_1P_3 + P_1P_4P_5 - P_1P_3P_4P_5)/P_c$	$(P_1P_3 + P_5 - P_4P_5 - P_1P_5 + P_1P_4P_5)/P_c$
v_{x_1}	$(P_1P_3 - P_1P_2P_3P_4 + P_1P_4P_5 - P_1P_3P_4P_5 - P_1P_2P_4P_5 + P_1P_2P_3P_4P_5)/P_c$	$(P_1P_3 - P_1P_2P_3P_4 - P_1P_5 + P_1P_4P_5)/P_c$
$g_{x_1 \wedge x_4}$	0.09375	0.25
$g_{2x_1x_4}$	$P_2P_3 + P_5 - P_3P_5 - P_2P_5 + P_2P_3P_5 = 0.375$	$P_5 - P_2P_5 + P_2P_3P_5 = 0.375$

Исходя из данных таблицы, можно сделать вывод, что, вхождение в логическую функцию аргумента с отрицанием меняет значение веса как функции, так и самого аргумента. Так же меняются другие параметры аргумента: значимость, активность, вклад. Поскольку в данном примере логические функции небольшие, различия между значениями параметров составляют не больше 0.1, но при рассмотрении большой структуры они могут быть больше. И хотя двукратные веса для монотонной и немонотонной функций равны, полиномы, по которым они вычисляются, разные, поэтому для какого-нибудь иного примера их значения могут отличаться.

На основании этого можно утверждать, что, действительно, вычисление вышеупомянутых параметров аргумента для немонотонной ФАЛ не может производиться по формулам, разработанным ранее для монотонных функций [1, 2].

Заключение. Для немонотонных ФАЛ вычисление таких показателей как значимость (3) и вклад (5),(6) оказалось возможным по тем же формулам, что и для монотонных ФАЛ ((8)-(10)). Формулы для определения веса (7), приведенные в книге [2] не подходят для расчетов весов аргументов немонотонных ФАЛ, поэтому необходимы научные разработки в этой области. Активность, вычисленная по формуле (12), не учитывает элементы, входящие с отрицаниями, и не может адекватно отражать реальную «активность» элементов для немонотонных ФАЛ. Предложено определение активности (13), которое справедливо для любых ФАЛ. Введена зависимость между активностью и относительным вкладом (14). Определения двойной и двукратной булевых разностей, а также характеристик важности для двух событий, сформулированные для монотонных функций, верны и для немонотонных ФАЛ ((15), (16), (25)-(29)). Приведены формулы для вычисления двойной и двукратной булевых разностей, логического произведения, логической суммы, сложения по модулю два булевых разностей по разным аргументам, а также двукратного, двойного и суммарного весов ((17), (19)-(24), (30)-(32)).

Список литературы

[1] *Рябинин И. А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 276 с.

[2] *Рябинин И. А., Парфёнов Ю. М.* Надежность, живучесть и безопасность корабельных электроэнергетических систем. СПб.: Изд-во военно-морской академии, 1997. 430 с.

[3] *Дж. Э. Хенли, Х. Кумамото.* Надежность технических систем и оценка риска. М.: Машиностроение, 1984. 528 с.

Статья рекомендована к печати проф. А.П. Жабко. Статья принята к печати 7 октября 2008 года.