Экзаменационные вопросы по алгебре

1. Доказать, что число N_{A_n} всех подмножеств конечного множества A_n, состоящего из n элементов, равно $N_{A_n} = 2^n$.

2. Доказать, что операция пересечения множеств дистрибутивна относительно операции их объединения.

3. Доказать, что множества $A \setminus B$ и $A \cap B$ образуют разбиение множества A.

4. Доказать, что для любых конечных множеств A и B имеет место равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

5. Доказать, что два класса эквивалентности на множестве A либо совпадают, либо не пересекаются.

6. Доказать, что классы эквивалентности образуют разбиение множества.

7. Определения инъективного, сюръективного, биективного отображений. Доказать, что композиция инъективных отображений является инъективным отображением.

8. Определения левого и правого обратных отображений. Доказать, что для существования левого обратного отображения необходимо и достаточно, чтобы отображение являлось инъекцией.

9. Доказать единственность обратного отображения.

10. Доказать, что для биективных отображений $h : X \to Y$ и $f : Y \to Z$, для которых определена их композиция, выполняется равенство

$$(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}.$$

11. Сформулировать в терминах прообразов элементов определения инъективного, сюръективного и биективного отображений.

12. Доказать, что равномощность множеств является отношением эквивалентности.

13. Доказать единственность нейтрального элемента в группе.

14. Доказать единственность обратного элемента к любому элементу в группе.

15. Доказать, что необходимыми и достаточными условиями того, что подмножество является подгруппой является то, что операция не выводит из этого подмножества и то, что для любого элемента подмножества обратный ему элемент тоже принадлежит этому подмножеству.

16. Доказать, что гомоморфизм $f : B \to W$ переводит нейтральный элемент e_B группы B в нейтральный элемент e_W группы W.

17. Доказать, что ядро $Ker f$ гомоморфизма $f : B \to W$ групп является подгруппой группы B.

18. Доказать, что обратимые элементы кольца не могут быть делителями нуля.

19. Определение гомоморфизма колец. Определение поля, векторного пространства и алгебры.

20. Деление с остатком в кольце целых чисел. Доказательство единственности остатка и неполного частного при делении любого целого числа на отличное от нуля целое число.

21. Определение и критерий наибольшего общего делителя двух целых чисел, не равных нулю одновременно. Доказательство их эквивалентности.

22. Доказать следующее свойство н.о.д. — (a, b):

$$a, b \in \mathbf{N}, \quad a = bq + r, \quad q \in \mathbf{Z} \quad 0 \leq r < b \rightarrow (a, b) = (b, r).$$

23. Доказать существование и не единственность линейного представления наибольшего общего делителя двух целых чисел, не равных нулю одновременно.

24. Доказать следующее свойство взаимно простых чисел:

$$(a, b) = 1 \rightarrow \forall\, c \in \mathbf{Z} \quad (ac, b) = (c, b).$$

25. Доказать теорему Евклида о множестве простых чисел.

26. Доказать, что если натуральное число большее 1 не делится ни на одно простое число, не превосходящее корня квадратного из него, то это число простое.

27. Доказать, что если произведение нескольких натуральных чисел делится на простое p, то по крайней мере одно из них делится на p.

28. Каноническое представление натуральных и целых чисел. Наименьшее общее кратное $[a, b]$ двух целых чисел a, b; его определение и критерий.

29. Доказать, что для натуральных чисел a и b, не равных нулю одновременно, выполняется равенство

$$ab = (a, b)[a, b].$$

30. Поле комплексных чисел и комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа, алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.

31. Геометрическая интерпретация операций сложения и умножения комплексных чисел.

32. Доказать свойства модуля комплексных чисел $|zu| = |z|\,|u|$ и $|z| - |u| \leq |z + u| \leq |z| + |u|$.

33. Доказать следующие свойства операции комплексного сопряжения: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ и $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

34. Возведение комплексного числа в любую целую степень. Множество корней n-ой степени из ненулевого комплексного числа. Геометрическая интерпретация корней n-ой степени из комплексного числа.

35. Кольцо многочленов. Образующий элемент кольца многочленов. Степень многочленов и свойства степени.

36. Доказать, что кольцо многочленов является целостным над любым полем.

37. Доказать единственность деления с остатком в кольце многочленов.

38. Доказательство теоремы Безу и схемы Горнера.

39. Определение и критерий наибольшего общего делителя двух многочленов, не равных одновременно нулевому многочлену. Доказательство эквивалентности определения и критерия.

40. Доказать, что последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида является наибольшим общим делителем двух многочленов, не равных одновременно нулевому многочлену.

41. Доказать, что унитарный н.о.д. двух многочленов равен 1 ($(f_1, f_2) = 1$), если дано, что для многочленов f_1, f_2 существуют многочлены u, v такие, что $uf_1 + vf_2 = 1$.

42. Доказать, что взаимно простые многочлены не могут иметь общих корней.

43. Доказать следующее свойство производной от многочленов: $(f^k)' = kf^{k-1}f'$ для $k \in \mathbf{N}$, считая свойство $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$ доказанным.

44. Доказать, что k-кратный корень многочлена f является корнем $(k-1)$-ой кратности для его производной f'.

45. Доказать, что в алгебраически замкнутом поле P любой многочлен $f \in P[t]$ степени n имеет n корней, среди которых могут быть равные, и допускает следующее разложение на линейные множители:

$$f(t) = a_0(t - c_1) \dots (t - c_n), \quad a_0, c_i \in P,\ i \in [1, \dots, n].$$

46. Каноническое разложение многочленов над полем комплексных чисел. Общий вид неприводимых многочленов над полем вещественных чисел.

47. Доказать, что многочлен f с вещественными коэффициентами, имеющий комплексный корень z с ненулевой мнимой частью, делится на многочлен $\varphi(t) = (t - z)(t - \bar{z})$; доказать, что многочлен φ имеет вещественные коэффициенты и является неприводимым над полем $\mathbf{R}$.

48. Каноническое разложение многочленов над полем вещественных чисел.

49. Алгоритм отделения кратных корней многочлена.

50. Доказать, что два многочлена над одним и тем же полем равны, если их степени не превосходят n и они принимают одинаковые значения в $(n+1)$ попарно различных элементах поля.

51. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

52. Интерполяционный многочлен Ньютона.

53. Доказать, что произведение AB обратимых матриц является обратимой матрицей, равной $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

54. Доказать следующие свойства обратимых матриц: A — обратима $\quad \to A^T$ — обратима; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

55. Элементарные матрицы и их свойства.

56. Определение D_r-матрицы и доказательство того, что любую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к D_r виду.

57. Определение эквивалентных матриц. Доказательство того, что отношение эквивалентности матриц рефлексивно, симметрично и транзитивно.

58. Доказать, что любая прямоугольная матрица эквивалентна соответствующей D_r-матрице. Первое определение ранга матрицы.

59. Доказать, что квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она есть произведение элементарных матриц.

60. Доказать, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях ее строк и столбцов.

61. Доказать, что ранг прямоугольной матрицы равен рангу транспонированной с ней матрицы.

62. Доказать, что матрица обратима тогда и только тогда, когда ее ранг равен порядку.

63. Определение линейной независимости набора элементов векторного пространства. Определение максимального числа $\nu(A)$ линейно независимых строк прямоугольной матрицы A. Доказательство того, что $\nu(D_r) = r$.

64. Второе определение ранга матриц. Доказательство эквивалентности первого и второго определений ранга матриц.

65. Доказать, что максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

66. Доказать:

$$\boxed{\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2.}$$

67. Доказать, что если квадратные матрицы удовлетворяют равенству $AB = E$, то они обратимы и для них выполняются равенства: $A^{-1} = B, \quad B^{-1} = A$.

68. Условия существования и единственности решения системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (обобщенная теорема Кронекера-Капелли). Доказательство для случая

$m = r, m < n, r = \operatorname{rank} A$, где A — матрица коэффициентов системы.

69. Определение ступенчатого вида прямоугольной матрицы и доказательство возможности приведения любой прямоугольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований только строк.

70. Метод Гаусса решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.

71. Общее и частное решения системы m алгебраических уравнений с n неизвестными в случае ее совместности.

72. Условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.

73. Связь решений системы неоднородных линейных уравнений $AX = B$ с решениями соответствующей системы однородных уравнений $AX = \mathbb{O}$.

Экзаменационные вопросы по алгебре (min)

1. Понятия пересечения, объединения и разности двух множеств.
2. Условия того, что подмножества образуют разбиение множества.
3. Определения инъективного, сюръективного и биективного отображений.
4. Понятие равномощности двух множеств.
5. Определение группы.
6. Определение гомоморфизма групп.
7. Определение ядра и образа гомоморфизма $f : B \to W$ из группы B в группу W.
8. Определение кольца.
9. Определение делителя нуля в кольце.
10. Определение поля.
11. Деление с остатком в кольце целых чисел.
12. Определение и критерий Н.О.Д. двух целых чисел, не равных одновременно нулю.
13. Алгоритм Евклида.
14. Взаимно простые числа.
15. Теорема Евклида о множестве простых чисел.
16. Наименьшее общее кратное.
17. Каноническое представление целых чисел.
18. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Модуль и аргумент.
19. Возведение в n-ую степень и извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.
20. Определение многочлена, его степени. Свойства степенни.
21. Формулировка теоремы Безу.
22. Н.О.Д. двух многочленов. Линейное представление Н.О.Д. двух многочленов.
23. Понятие корня многочлена. Определение взаимно простых многочленов.
24. Понятия алгебраически замкнутого поля и неприводимого над полем многочлена.
25. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных и над полем вещественных чисел.
26. Умножение прямоугольных матриц. Транспонированная матрица.
27. Обратимая матрица. Три элементарные матрицы. D_r матрица.
28. Определение эквивалентных матриц.
29. Два определения ранга матрицы.
30. Обобщенная теорема Кронекера-Капелли.
31. Определение ступенчатого и трапецевидного вида прямоугольной матрицы.
32. Общее и частное решения системы неоднородных алгебраических уравнений.
33. Фундаментальная система решений системы однородных алгебраических уравнений. Связь решений системы неоднородных алгебраических уравнений с решением соответствующей системы однородных уравнений.