

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ СОВЕТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

НАБЛЮДЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

№ 62

Москва, 1971 г.

С О В Е Щ А Н И Е

Рабочей группы по аналитическим методам
небесной механики

Комиссия по небесной механике Астрономи-
ческого совета АН СССР

Ленинград, 3 - 7 августа 1970г.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ ПЛАНЕТ.
ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛУТОНА ОТ НЕПТУНА.

Л.К.Бабаджянц

Резюме. Рассматривается задача трех материальных тел-точек. Планетный метод Брауэра основан на уравнениях в вариациях в прямоугольных координатах. Так как решение этих уравнений методом Лагранжа, данное Брауэром, оказалось весьма громоздким, предлагается новый метод, приводящий к простым и симметричным формулам для возмущений. Этим методом получены возмущения первого порядка Плутона от Нептуна в виде конечных рядов по кратным половинной истинной аномалии Плутона $\nu/2$. Коэффициенты указанных рядов определены с точностью до пяти значащих цифр максимального (по абсолютной величине) коэффициента. Предлагаются два способа разложения Δ^{-3} гармоническим анализом частных значений в случае, когда орбиты возмущаемого и возмущающего тел пересекаются или близки к пересечению.

Abstract. A METHOD OF INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF PLANETARY MOTION IN RECTANGULAR COORDINATES. THE PLUTO PERTURBATIONS FROM NEPTUNE, by L.K.Babadzhanjanc. - The problem in hand is the three point-body problem. The Brouwer's planetary method is based on the differential equations for the perturbations in rectangular coordinates. Making use of Lagrange's method, D.Brouwer derived the solution of the equations. The form of this solution is not simple. Here other method of integration of the equations is considered. The solution derived by the method is simple and symmetric. First order perturbations of Pluto from Neptune have been calculated by the method. Two ways of expansions of Δ^{-3} (Δ being the distance between Pluto and Neptune) by means of practical harmonic analysis have been described.

I. Вопрос о точности координат, даваемых различными аналитическими теориями, весьма важен. Одним из наиболее очевидных путей повышения точности аналитических теорий является использование средних орбит, т.е. промежуточных, которые приближают истинное движение лучше, чем оскулирующая в эпоху кеплерова орбита. Поэтому целесообразнее получить сразу дифференциальные уравнения для возмущений, отсчитываемых от средней орбиты (а не от оскулирующей в эпоху кеплеровой). Что касается средней орбиты, то здесь мы ограничимся одними определениями. Подробно вопрос о средней орбите и ее выборе рассмотрен в работах автора (Бабаджянц, 1969а, 1969б, 1969в). Будем рассматривать задачу трех тел: Солнца S и двух планет - возмущаемой P и возмущающей P' .

Пусть масса Солнца равна единице, масса возмущаемой планеты m , масса возмущающей планеты m' , а κ означает гауссову постоянную. Тогда в неподвижной гелиоцентрической системе координат $Sx'y'z'$ уравнения возмущенного движения P имеют вид

$$\ddot{q}_i + \mu q_i r^{-3} = \frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (I)$$

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z,$$

где

$$\mu = \kappa^2(1+m), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2,$$

$$R = \kappa^2 m' \left\{ \left[\sum_{i=1}^3 (q_i - q'_i)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - (r')^{-3} \sum_{i=1}^3 q_i q'_i \right\},$$

причем x', y', x' - координаты планеты P' в той же системе координат.

Пусть начальные условия таковы:

$$g_i(t_0) = g_i^0, \quad \dot{g}_i(t_0) = \dot{g}_i^0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1a)$$

Рассмотрим теперь другую систему уравнений

$$\ddot{\tilde{g}}_i + \mu \tilde{g}_i(\tilde{r})^{-3} = \tilde{b}_i(t), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Пусть при этом выполняются такие начальные условия:

$$\tilde{g}_i(t_0) = \tilde{g}_i^0, \quad \dot{\tilde{g}}_i(t_0) = \dot{\tilde{g}}_i^0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2a)$$

Если $\tilde{b}_i(t) \equiv 0$, ($i = 1, 2, 3$), а начальные условия (1a) и (2a) совпадают, то будем говорить, что система (2) определяет оскулирующую в эпоху t_0 орбиту. Если $\tilde{b}_i(t) \equiv 0$, ($i = 1, 2, 3$), а начальные условия (1a) и (2a) не совпадают, то система (2) определяет среднюю кеплерову орбиту. В случае, когда условие $\tilde{b}_i(t) \equiv 0$, ($i = 1, 2, 3$) не выполнено, будем говорить, что уравнения (2) определяют среднюю некеплерову орбиту. Предположим, что функции $\tilde{b}_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) имеют порядок возмущающих сил. Необходимо, конечно, сделать еще оговорку: функции $\tilde{b}_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) должны быть такими, чтобы уравнения (2) имели единственное решение при начальных условиях (2a).

Координаты и элементы оскулирующей в эпоху орбиты будем обозначать прямой чертой сверху (например, \tilde{g}_i , \tilde{r} и т.д.), а кеплеровой орбиты (в частности, и оскулирующей) - нуликом снизу справа (например, g_{i0} , κ и т.д.).

Положим

$$g_i = \tilde{g}_i + \delta g_i, \quad g_i' = \tilde{g}_i' + \delta g_i'. \quad (3)$$

Вычитая из уравнений (1) уравнения (2), получаем

$$\delta \ddot{g}_i + \mu \tilde{r}^{-3} (\tilde{g}_i + \delta g_i) - \mu \tilde{g}_i(\tilde{r})^{-3} = \frac{\partial R}{\partial g_i} - \tilde{b}_i(t), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Правые части, а также вторые члены левых частей этих уравнений могут быть разложены в ряд по степеням величин δx , δy , δz . Когда это выполнено и члены второго и более высоких порядков перенесены направо, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{g}_i + \mu \tilde{r}^{-3} \delta g_i - 3\mu \tilde{g}_i(\tilde{r})^{-5} S^* &= G_i^* - \tilde{b}_i(t), \quad (i = 1, 2, 3), \\ S^* &= x \delta x + y \delta y + z \delta z, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

в принципе аналогичные уравнениям метода Брауэра. Выражения для G_i^* , ($i = 1, 2, 3$), в которых сохранены члены до второго порядка включительно относительно возмущающих сил, будут приведены далее.

Положим

$$\tilde{g}_i = g_{i0} + \Delta g_i, \quad \tilde{g}_i' = g_{i0}' + \Delta g_i', \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Коэффициенты при δg_i в левых частях уравнений (5) разложим по степеням Δg_i и члены второго и выше порядков перенесем направо (Δg_i имеет порядок возмущающих сил). В результате получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{g}_i + \mu \tilde{r}^{-3} \delta g_i - 3\mu g_{i0} \tilde{r}^{-5} S &= G_i^* - \tilde{b}_i(t) - \Delta_i \equiv G_i, \\ S &= x \delta x + y \delta y + z \delta z, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где Δ_i - указанные члены второго и выше порядков.

Известно, что планетный метод Брауэра при вычислении возмущений выше первого порядка имеет преимущества по сравнению с методами Хилла и Энке, так как правые части их уравнений в случае вычисления возмущений высших порядков очень усложняются и алгоритмы разложения в тригонометрические ряды становятся громоздкими. С другой стороны, этот метод значительно уступает методам Хилла и Энке в простоте при вычислении возмущений первого порядка, особенно, если возмущения

отсчитываются от оскулирующей в эпоху t_0 орбиты. Для того, чтобы избавиться от этого недостатка, необходимо найти более простой, чем у Брауэра, метод решения уравнений в вариациях (7). Это, разумеется, упростит также и вычисление возмущений высших порядков.

Обозначим правые части в (7) через G_i . Умножая каждое из уравнений (7) на g_{i0} соответственно и складывая их, получим

$$\sum_{i=1}^3 g_{i0} \delta \ddot{g}_i + \mu r_0^{-3} S - 3\mu r_0^{-3} S = \sum_{i=1}^3 g_{i0} G_i. \quad (8)$$

Учитывая (2) ($b_i = 0$, $\tilde{g}_i = g_{i0}$), имеем

$$\ddot{S} - 2 \sum_{i=1}^3 \dot{g}_{i0} \delta \dot{g}_i - \mu r_0^{-3} S = \sum_{i=1}^3 g_{i0} G_i. \quad (9)$$

Положим $\sum_{i=1}^3 \dot{g}_{i0} \delta \dot{g}_i \equiv \dot{q}$. Дифференцируя это выражение по t и используя (7), получим

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\mu r_0^{-3} \sum_{i=1}^3 (g_{i0} \delta \dot{g}_i + \dot{g}_{i0} \delta g_i) + \sum_{i=1}^3 (\dot{g}_{i0} G_i + 3\mu S r_0^{-5} g_{i0} \dot{g}_{i0}) = \\ &= -\mu r_0^{-3} \dot{S} + 3\mu r_0^{-5} r_0 \dot{r}_0 S + \sum_{i=1}^3 \dot{g}_{i0} G_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, дифференцируя (9) по t и учитывая (10), приходим к уравнению третьего порядка для S

$$\ddot{S} + \mu r_0^{-3} \dot{S} - 3\mu r_0^{-4} \dot{r}_0 S = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{d}{dt} (g_{i0} G_i) + 2 \dot{g}_{i0} G_i \right]. \quad (11)$$

Заметим, что $\ddot{S} + \mu r_0^{-3} \dot{S} - 3\mu r_0^{-4} \dot{r}_0 S = \frac{d}{dt} (\dot{S} + \mu r_0^{-3} S)$. Поэтому вместо (11) можно написать следующее уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{S} + \mu r_0^{-3} S &= [\dot{S} + \mu r_0^{-3} S]_{t=t_0} + \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (g_{i0} G_i) + 2 \dot{g}_{i0} G_i \right) dt = \\ &= [\dot{S} + \mu r_0^{-3} S - \sum_{i=1}^3 g_{i0} G_i] + \sum_{i=1}^3 g_{i0} G_i + 2 \int_{\nu(t_0)}^{\nu(t)} \left(\sum_{i=1}^3 G_i \frac{d}{d\nu} g_{i0} \right) d\nu \equiv G, \end{aligned} \quad (12)$$

где ν - истинная аномалия в движении планеты P вдоль среднего или оскулирующего в эпоху t_0 кеплерова эллипса.

Уравнение вида (12) хорошо известно. Хилл предложил записывать его решение в следующем изящном виде:

$$S = r_0 (\mu p)^{-1} \int G r_0^3 \sin[(\nu) - \nu] d\nu. \quad (13)$$

Здесь $p = a(1 - e^2)$ (a - полуось, e - эксцентриситет кеплеровой орбиты). Величина (ν) при интегрировании должна считаться постоянной, после интегрирования круглые скобки следует убрать.

Вернемся к уравнениям (7).

При вычислении возмущений первого порядка в выражениях для G_i следует ограничиться членами первого и теми членами второго порядков, которые появляются, если средняя орбита некеплерова. Возмущения первого порядка для удобства будем обозначать δg_{i1} , ($i = 1, 2, 3$). Аналогично (единичкой снизу справа) отмечаются и другие буквы при построении теории первого порядка, например G_{i1} , S_1 , G_{i2} , b_{i1} , Δ_{i1} и т.д.

В этих обозначениях уравнения (7) имеют вид

$$\delta \ddot{g}_{i1} + \mu r_0^{-3} \delta g_{i1} - 3\mu g_{i0} r_0^{-5} S_1 = G_{i1}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Для вычисления возмущений второго порядка в выражениях для G_i следует ограничиться членами второго порядка и, возможно, теми членами третьего порядка, которые появляются, если средняя орбита некеплерова. Так как возмущения первого порядка уже получены, то целесообразно возмущения, точные до второго порядка, представить в виде суммы возмущений первого и второго порядков, т.е.

$$\delta q_i = \delta q_{i1} + \delta q_{i2} \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad (I5)$$

Подставляя (I5) в (7), учитывая (I4) и используя очевидные теперь обозначения G_{i2}, S_2 и т.д., получим

$$\delta q_{i2} + \mu \tau_0^{-3} \delta q_{i2} - 3\mu q_{i0} \tau_0^{-5} S_2 = G_i - G_{i1} = G_{i2} \quad . \quad (I6)$$

Запишем (I4) и (I6) в общем виде

$$\delta q_{iN} + \mu \tau_0^{-3} \delta q_{iN} - 3\mu q_{i0} \tau_0^{-5} S_N = G_{iN} \quad , \quad (I7)$$

$$(i = 1, 2, 3 ; \quad N = 1, 2) \quad .$$

В методе Брауэра $b_i \equiv 0, \Delta_i \equiv 0, x_0 \equiv 0$. Он состоит в непосредственном решении вариацией постоянной системы (7), что возможно, так как фундаментальная система решений для (7) известна согласно теореме Пуанкаре. Выбор указанной выше системы координат ($x_0 \equiv 0$) вызван необходимостью - он существенно упрощает как сами выражения для возмущений, так и их получение.

Уравнение (I3) приводит к решению системы (7), значительно более простому, чем в методе Брауэра.

Предлагаемая модификация метода Брауэра вычисления возмущений в прямоугольных координатах удобна для программирования, так как она основана на симметричных формулах. Уравнения ее следующие:

$$\left. \begin{aligned} S_N &= \tau_0 (\mu p)^{-1} \int G_N \tau_0^3 \sin[(v) - v] dv + a_{01}^N q_1 + a_{02}^N q_2 \\ \delta q_{iN} &= \tau_0 (\mu p)^{-1} \left\{ G_{iN} + 3\mu q_{i0} \tau_0^{-5} S_N \right\} \tau_0^3 \sin[(v) - v] dv + a_{i1}^N q_1 + a_{i2}^N q_2 \\ q_1 &= \tau_0 \cos v \quad , \quad q_2 = \tau_0 \sin v \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (I8)$$

где $a_{i1}^N, a_{i2}^N, (i = 0, 1, 2, 3)$ - постоянные интегрирования.

Запишем уравнения (I8) в еще более симметричном виде, для чего введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} G_N \tau_0^3 &\equiv Q_{0N} \quad , \quad S_N \tau_0^{-1} \equiv V_{0N} \quad , \quad \delta q_{iN} \tau_0^{-1} \equiv V_{iN} \quad , \\ \tau_0^3 (G_{iN} + 3\mu q_{i0} \tau_0^{-5} S_N) &\equiv Q_{iN} \quad , \quad G_{iN} \tau_0^3 \equiv \Gamma_{iN}^* \quad , \\ G_{iN} \tau_0^3 &\equiv \Gamma_{iN} \quad , \quad b_{iN} \tau_0^3 \equiv c_{iN} \quad , \quad \Delta_{iN} \tau_0^3 \equiv \partial_{iN} \quad , \\ (\mu p)^{-1} \int Q_{iN} \sin[(v) - v] dv &\equiv J_{iN} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3 ; \quad N = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (I9)$$

Тогда имеем

$$V_{iN} = a_{i1}^N \sin v + a_{i2}^N \cos v + J_{iN} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3 ; \quad N = 1, 2) \quad . \quad (20)$$

где

$$Q_{0N} \equiv \tau_0^3 \left\{ \Pi_N + \tau_0^{-2} \sum_{i=1}^3 q_{i0} \tau_0^{-1} \Gamma_{iN} + 2 \int_{v_0}^v (\tau_0^{-1} \sum_{i=1}^3 \Gamma_{iN} \tau_0^{-2} \frac{d}{dv} q_{i0}) dv \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{iN} &\equiv \Gamma_{iN} + 3\mu q_{i0} \tau_0^{-1} V_{0N} \quad , \quad \Gamma_{iN} \equiv \Gamma_{iN}^* - c_{iN} - \partial_{iN} \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \\ \Pi_N &\equiv \left\{ \ddot{S}_N + \mu \tau_0^{-3} S_N - \sum_{i=1}^3 q_{i0} G_{iN} \right\}_{t=t_0} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Известно, что

$$r_0^2 = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) p^2 + 2ep^2 \cos v + \frac{e^2}{2} p^2 \cos 2v, \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{r_0}{a}\right)^3 &= \frac{1}{2} E_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^k E_k \cos kv, \\ E_k &= \sqrt{1-e^2} \left[2 + e^2 + 3k\sqrt{1-e^2} + k^2(1-e^2) \right] \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^k, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$r_0^{-1} = p^{-1} + ep^{-1} \cos v, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{i0} r_0^{-1} &= \alpha_i \cos v + \beta_i \sin v, \quad (i=1, 2, 3), \\ \alpha_1 &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \quad \beta_1 = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ \alpha_2 &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \quad \beta_2 = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ \alpha_3 &= \sin \omega \sin i, \quad \beta_3 = \cos \omega \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Кроме того, легко показать, что

$$r_0^{-2} \frac{d}{dv} g_{i0} = e \beta_i p^{-1} + \beta_i p^{-1} \cos v - \alpha_i p^{-1} \sin v, \quad (i=1, 2, 3). \quad (27)$$

Получим теперь формулы для определения постоянных интегрирования a_{i2}^N , a_{i1}^N . Ясно, что

$$\left. \begin{aligned} V_{iN} &= a_{i2}^N \sin v + a_{i1}^N \cos v + J_{iN}, \\ \frac{d}{dv} V_{iN} &= a_{i2}^N \cos v - a_{i1}^N \sin v + \frac{d}{dv} J_{iN}, \quad (i=0, 1, 2, 3), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} a_{i2}^N &= \left\{ (V_{iN} - J_{iN}) \sin v + \left[\frac{d}{dv} (V_{iN} - J_{iN}) \right] \cos v \right\}_{t=t_0}, \\ a_{i1}^N &= \left\{ (V_{iN} - J_{iN}) \cos v - \left[\frac{d}{dv} (V_{iN} - J_{iN}) \right] \sin v \right\}_{t=t_0}. \end{aligned} \right\}$$

или с обозначениями A_{iN} , B_{iN} , $v_0 = v(t_0)$

$$\left. \begin{aligned} a_{i2}^N &= A_{iN} \sin v_0 + B_{iN} \cos v_0, \\ a_{i1}^N &= A_{iN} \cos v_0 - B_{iN} \sin v_0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Если средняя орбита оскулирующая в эпоху t_0 , то

$$\left. \begin{aligned} a_{i2}^N &= -J_{iN}(v_0) \sin v_0 - J'_{iN}(v_0) \cos v_0, \\ a_{i1}^N &= -J_{iN}(v_0) \cos v_0 + J'_{iN}(v_0) \sin v_0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Величины J_{iN} , $V_{iN}(t_0)$ изменяются от порядка к порядку и зависят также от выбора средней орбиты. Среднюю орбиту удобно выбирать одну и ту же для всех порядков, так как в этом

случае для $N=2$ выражения для Γ_{iN} проще, а $\delta g_{iN}|_{t=t_0} = \delta \dot{q}_{iN}|_{t=t_0} = 0$, и, как следствие этого,

$$\Pi_2 = S_2(t_0) = \dot{S}_2(t_0) = V_{i2}(t_0) = \dot{V}_{i2}(t_0) = 0, \quad (i=0, 1, 2, 3). \quad (31)$$

Рассмотрим выражение для Γ_{i1} в случае вычисления возмущений относительно кеплеровой орбиты

$$\Gamma_{i1} = \Gamma_{i1}^* = r_0^3 G_{i1}^* = r_0^3 \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \right)_0,$$

где $\left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \right)_0$ означает величину $\frac{\partial R}{\partial q_i}$, вычисляемую при помощи координат и элементов указанной кеплеровой орбиты. Аналогичные обозначения (нулик снизу справа) далее поясняться не будут. Поскольку

$$R = \kappa^2 m' \left\{ \Delta^{-1} - (xx' + yy' + zz')(r')^{-3} \right\},$$

то имеем

$$\Gamma_{i1} = \kappa^2 m' r_0^3 \left\{ \Delta^{-3} (q'_i - \dot{q}_i) - \dot{q}'_i (r')^{-3} \right\}_0. \quad (32)$$

Если возмущения отсчитываются от некеплеровой средней орбиты, то величины Γ_{i1} будут иными:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{i1} &= \Gamma_{i1}^* - c_{i1} - \Delta_{i1}, \quad \Delta_{i1} = \Delta_{i1} r_0^3, \\ \Gamma_{i1}^* &= \kappa^2 m' r_0^3 \left\{ (\tilde{\Delta})^{-3} (\tilde{q}'_i - \tilde{q}_i) - \tilde{q}'_i (\tilde{r}')^{-3} \right\}, \\ \Delta_{i1} &= \sum_{\kappa=1}^3 \delta g_{\kappa}^* \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_{\kappa}} (\mu r^{-3} q_i) \right\}_0 \Delta q_j, \\ \delta g_{\kappa}^* &= \delta g_{\kappa 0} - \Delta g_{\kappa}, \quad \delta g_{\kappa 0} = g_{\kappa} - g_{\kappa 0}, \\ c_{i1} &= r_0^3 \left\{ \ddot{\tilde{q}}_i + \mu (\tilde{r})^{-3} \tilde{q}_i \right\} = \\ &= r_0^3 \left\{ \mu r_0^{-4} \frac{d^2}{dv^2} \tilde{q}_i - 2\mu e r_0^{-3} \sin v \frac{d}{dv} \tilde{q}_i + \mu (\tilde{r})^{-3} \tilde{q}_i \right\} = \\ &= \mu r_0^{-4} \frac{d^2}{dv^2} \tilde{q}_i - 2\mu e \sin v \frac{d}{dv} \tilde{q}_i + \mu r_0^3 (\tilde{r})^{-3} \tilde{q}_i. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Если вычисляются возмущения, отсчитываемые от кеплеровой орбиты и точные до второго порядка, то в этом случае

$$\Gamma_{i2} = z^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j} \right) \delta q_{jt} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q'_j} \right) \delta q'_{jt} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^3 \delta q_{\kappa t} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_\kappa} (\mu z^{-3} q_i) \right] \delta q_{jt} \right\} \quad (34)$$

Выражения для величин $\frac{\partial R}{\partial q_i}$, $\kappa_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j}$, $\kappa'_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q'_j}$, $L_{ijk} = \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_\kappa} (\mu z^{-3} q_i)$

необходимо иметь в любом методе, основанном на уравнениях (7), так как

$$\Delta_i = \sum_{j, \kappa=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_\kappa} (\mu q_i z^{-3}) \right] \delta q_\kappa \Delta q_j + \dots \quad (35)$$

$$G_i^* = \left(\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial q_i} \right) + \sum_j \left(\frac{\partial^2 \widetilde{R}}{\partial q_i \partial q_j} \right) \delta q_j + \dots \\ \dots - \frac{1}{2} \sum_{j, \kappa=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_\kappa} (\mu z^{-3} q_i) \right] \delta q_j \delta q_\kappa - \dots \quad (36)$$

Удобно для программирования следующее представление L_{ijk} :

$$L_{ijk} = -3\mu \left\{ z^{-5} (\delta_{ij}^k q_\kappa + \delta_{ik}^j q_j + \delta_{jk}^i q_i) - z^{-7} 5 q_i q_j q_\kappa \right\} \quad (37)$$

где символ Кронекера $\delta_{pq}^r = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$.

Кроме того, получим

$$\kappa_{ij} = \kappa^2 m' \left[3 \Delta^{-5} (q_i - q'_i)(q_j - q'_j) - \Delta^{-3} \delta_{ij} \right] \quad (38)$$

$$\kappa'_{ij} = \kappa^2 m' (z')^{-5} \left[3 q'_i q'_j - (z')^2 \delta_{ij} \right] - \kappa_{ij} \quad (39)$$

Имеет смысл записать κ_{ij} иначе:

$$\kappa_{ij} = \kappa^2 m' \Delta^{-5} \left[3 (q_i - q'_i)(q_j - q'_j) - \delta_{ij} \Delta^2 \right] \quad (40)$$

Последняя формула удобнее, так как Δ^{-5} придется разлагать в ряд всего один раз что значительно уменьшит затраты машинного времени и необходимую память. Заметим, что именно наличие формул (37)-(40) представляет одно из основных достоинств вычисления возмущений в прямоугольных координатах. Симметричность этих формул является прямым следствием симметричности уравнений движения планет в прямоугольных координатах. Осталось рассмотреть вопрос о вычислении постоянной интегрирования

$$\Pi_N = \left\{ \ddot{s}_N + \mu z^3 s_N - \sum_i q_{i0} G_{iN} \right\}_{t=t_0}$$

Аналогичную постоянную

$$C = \left\{ (r_0 \dot{\delta r}) + \mu r_0^{-3} (r_0 \delta r) - r \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{d^2 (\delta r)^2}{dt^2} + \frac{\mu (\delta r)^2}{r_0^2 r} \right\}_{t=t_0} \quad (\text{ж})$$

в методе Хилла считают лишней и определяют при помощи интеграла энергии, что приводит к громоздким выкладкам.

Легко показать, что

$$\Pi_N = 2 \left[\mu r_0^{-3} s_N + \sum_1^3 \dot{q}_{i_0} \delta \dot{q}_{i_N} \right]_{t=t_0} \quad (41)$$

Действительно, согласно (9),

$$\ddot{s}_N = 2 \sum_1^3 \dot{q}_{i_0} \delta \dot{q}_{i_N} + \mu r_0^{-3} s_N + \sum_1^3 q_{i_0} G_{i_N} \quad (42)$$

Формула (41) удобна для вычисления Π_N . Заметим, что с точностью до первого порядка $C = \Pi_1$.

Несколько слов о контроле вычислений. Во-первых, хорошим контролем может служить тождество

$$s_N \equiv \sum_1^3 q_{i_0} \delta q_{i_N} \quad (43)$$

Предположим, что возмущения отсчитываются от оскулирующего в эпоху t_0 кеплерова эллипса и система координат ориентирована так, что $x_0 \equiv 0$. Очевидно, что при $N=1$ уравнение для s_N в точности совпадает с уравнением для $r_0 \delta r$, которое фигурирует в методах Энке и Хилла. Ясно также, что

$$(r_0 \delta r)_{t=t_0} = (s_1)_{t=t_0} = \left[\frac{d}{dt} (r_0 \delta r) \right]_{t=t_0} = (\dot{s}_1)_{t=t_0} = 0.$$

Значит, в этом случае и остальные уравнения описанного метода совпадают с соответствующими уравнениями метода Энке. Если ввести обозначения

$(\delta r)_{H-E}^I$ - возмущение первого порядка радиуса-вектора, подсчитанное методом Хилла (или Энке, что то же самое),

$(\delta x)_E^I, (\delta y)_E^I$ - возмущение первого порядка прямоугольных координат, подсчитанные методом Энке,

$(\delta x)_B^I, (\delta y)_B^I$ - возмущения первого порядка прямоугольных координат, подсчитанные методом Брауэра

то сказанное можно резюмировать так:

$$\left. \begin{aligned} r_0 (\delta r)_{H-E}^I &= x_0 (\delta x)_B^I + y_0 (\delta y)_B^I, \\ (\delta x)_B^I &= (\delta x)_E^I, \quad (\delta y)_B^I = (\delta y)_E^I. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Напомним, что возмущение третьей прямоугольной координаты z во всех указанных методах вычисляется одинаково.

2. Рассмотрим вопрос о разложении величины Δ^{-3} в тригонометрический ряд в случае, когда кеплеровы орбиты возмущаемого и возмущающего тел пересекаются или близки к пересечению.

Как известно, величина Δ есть $2\mathcal{R}$ -- периодическая функция двух аргументов - аномалий, которые сами являются функциями времени t . Именно $\Delta^2 = (x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0 - z_0')^2$,

где x_0, \dots, x'_0, \dots - прямоугольные координаты возмущаемой и возмущающей планет соответственно (в их кеплеровом движении).

Известно, что 2π -периодические по двум аргументам функции при определенных условиях могут быть достаточно точно представлены отрезками двойного ряда Фурье.

Разложение в ряд Фурье величины Δ^{-3} считается эффективным, если его коэффициенты убывают достаточно быстро, т.е., когда функция двух аномалий Δ^{-3} многократно непрерывно дифференцируема (в том числе и смешанно) по этим аргументам и величины соответствующих частных производных достаточно малы в квадрате $A = \{0, 2\pi; 0, 2\pi\}$. Об этом свидетельствуют хорошо известные асимптотические оценки.

Если орбиты возмущающего и возмущаемого тел пересекаются, то в квадрате A функция Δ^{-3} имеет особенность и поэтому неразложима в ряд Фурье. Если же орбиты указанных тел близки к пересечению, то можно ожидать (и на это указывают упомянутые выше асимптотические оценки для коэффициентов Фурье), что для достаточно точного представления величины Δ^{-3} понадобится удерживать в ряде Фурье очень много членов. Ясно, что в этом случае эффективность применения ряда Фурье становится сомнительной. В то же время величина Δ^{-3} как функция времени t может не иметь особенностей. Такое положение имеет место при вычислении возмущений кометы от планеты, орбиту которой указанная комета пересекает. Оно также имеет место в случае задачи типа "Плутон - Нептун". Орбиты этих планет близки к пересечению. Минимальное расстояние между орбитами указанных планет приблизительно равно 0.15 а.е. (эта величина получена нами перебором на ЭВМ для орбит Плутона и Нептуна, оскулирующих в эпоху 1966, март 16).

Таким образом

$$m_A = \max_A \Delta^{-3} \approx (0,15)^{-3} (a.e.)^{-3}.$$

В то же время для реального движения

$$m_\pm = \max_{t > t_0} \Delta^{-3} \approx (19)^{-3} (a.e.)^{-3} \ll m_A. \quad (45)$$

Два способа разложения величины Δ^{-3} , использующие неравенство (45), предлагаются ниже.

Первый способ. Пусть возмущаемая и возмущающая планеты есть Плутон и Нептун соответственно.

Положим $\Theta = \Delta^2 \cdot 19^{-2}$. Тогда $\Delta^{-3} = 19^{-3} \Theta^{-3/2}$.

Если на рис.1 деформировать произвольным образом часть графика слева от единицы по оси Θ , то функция времени $\Delta^{-3}(t)$ не изменится, так как из (*) ясно, что $\Delta^{-3}(t) \cdot 19^3 \leq 1$. Именно эта часть графика "портит" ряд Фурье, а соответствующая деформация "исправит" его.

Функцию $\Theta^{-3/2}$ разложим в ряд Тейлора в окрестности $\Theta=1$:

$$\Theta^{-3/2} \sim 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2j+1)}{2^j j!} (1-\Theta)^j. \quad (46)$$

Обозначим через P_N N -ый отрезок ряда (46).
Положим

$$\Phi_N(\Theta) = \begin{cases} 19^{-3} \Theta^{-3/2}, & \Theta \geq 1, \\ 19^{-3} P_N, & \Theta < 1. \end{cases} \quad (47)$$

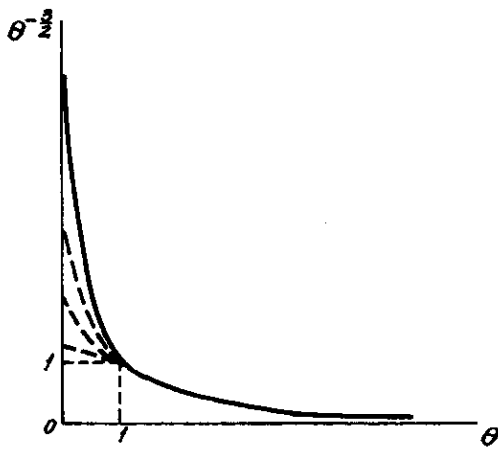


Рис. 1

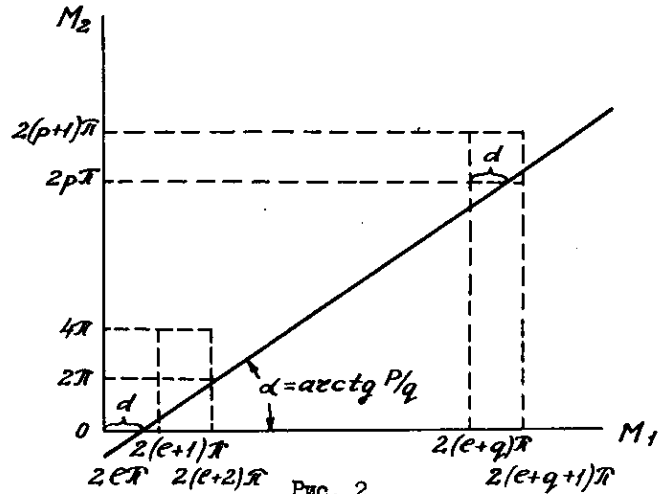


Рис. 2

Ясно, что $\bar{\Psi}_N(\Theta(t)) \stackrel{t \rightarrow t_0}{\equiv} \Delta^{-3}(t)$.

Таким образом, формула (47) определяет деформацию, о которой говорилось выше. Функция $\bar{\Psi}_N(\Theta)$ на промежутке $[0, \infty)$ непрерывна вместе со своими N производными по Θ . Поэтому $\bar{\Psi}_N(\Theta)$ как функция двух аномалий может быть разложена в сходящийся ряд Фурье. Легко видеть, что с увеличением N производные функции $\bar{\Psi}_N$ по Θ в точках левее $\Theta=1$ растут. Поэтому N следует подбирать опытным путем. Заметим, что описанная деформация не обязательно наилучшая.

Второй способ. Пусть дана функция $f(M_1, M_2)$, 2π -периодическая по своим двум аргументам M_1 и M_2 . Пусть, кроме того, $M_1 = M_1^0 + n_1 t$, $M_2 = M_2^0 + n_2 t$, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{p}{q}$, где M_1^0, M_2^0, n_1, n_2 - суть некоторые постоянные, t - время, а p и q целые. В случае «Плутон-Нептун» $p/q \approx 2/3$ (M_1, M_2 - средние аномалии, n_1, n_2 - средние суточные движения).

Тогда

$$n_1 = \frac{p}{q} n_2$$

и поэтому

$$M_1 = \frac{p}{q} M_2 + (M_1^0 - \frac{p}{q} M_2^0), \quad (48)$$

$$M_2 = \frac{q}{p} M_1 + (M_2^0 - \frac{q}{p} M_1^0). \quad (49)$$

Уравнение (48), как и (42), определяет прямую на плоскости переменных M_1, M_2 (рис.2). (используя (48) и (49) можно записать $f(M_1, M_2)$ в виде функции любой из двух переменных M_1 и M_2 . Обозначим эти функции соответственно через $\varphi(M_1)$ и $\Psi(M_2)$.

Из рис.2 видно, что эти функции периодические, их периоды $2p\pi$ и $2q\pi$ соответственно. Аргументы M_1, M_2 - суть линейные функции времени и, если функция $f(M_1(t), M_2(t))$ на временном промежутке $[t_0, +\infty)$ не имеет особенностей, то не будут иметь таковых и функции φ, Ψ .

Пусть аргумент M_1 в свою очередь является функцией некоторой переменной v , причем

$$M_1(v + 2\pi) = M_1(v) + 2\pi^2, \quad (50)$$

где $v = v(t)$ - монотонная функция времени. Тогда ясно, что функция $\varphi(M_i(v)) = \Phi(v)$ аргумента v периодична с периодом $2p\pi$.

Если $f = \Delta^{-3}$ и имеется в виду случай Плутона-Нептуна, то все рассмотренные функции φ, ψ, Φ мажорируются сверху числом $m_i \approx 19^3$ (а.е.⁻³). Все эти функции обладают хорошими дифференциальными свойствами, и согласно упомянутым выше асимптотическим оценкам, ряды Фурье должны сходиться весьма быстро.

Заметим, что хотя второй из рассмотренных выше способов и менее общий (так как не всегда $\frac{n_1}{n_2} = \frac{p}{q}$, где p и q - целые и достаточно малые), но значительно эффективнее в применении. Тот факт, что разложение в ряд возможно по одной переменной, значительно упрощает вычисления при отыскании возмущений. При этом и окончательные выражения для возмущений будут гораздо проще. Следовательно, этот способ разложения выгодно применять и в случае, когда обычные методы применимы, например, при вычислении возмущений многих малых планет от Юпитера, ввиду того, что средние движения этих планет и Юпитера близки к соизмеримости.

3. В качестве примера нами вычислены возмущения первого порядка Плутона от Нептуна. Ниже предлагается алгоритм вычисления этих возмущений, приводятся результаты в виде рядов по истинной аномалии Плутона, полученные на ЭВМ М-20 (оперативная память 4096 ячеек, скорость 20000 операций в секунду). Вся программа с промежуточными результатами помещается в оперативной памяти, время счета составляет около 5 мин.

В основу вычислений положена система элементов Плутона A' из работы Ш.Г.Шараф и Н.А. Будниковой (1964). Элементы Нептуна взяты из работы Ш.Г.Шараф (Шараф, 1955) с той лишь разницей, что среднее движение Нептуна незначительно изменено (менее, чем на единицу третьей значащей цифры), чтобы выполнялось соотношение $n' = \frac{3}{2} n$. Тем самым мы выбрали некоторую среднюю кеплерову орбиту для Нептуна.

Эпоха 1930, сентябрь 20.0, эклиптика и равноденствие 1950.0

Система элементов Плутона A'

$$\begin{aligned} \omega &= 1.96625759, & n &= 0.688409247 \cdot 10^{-4}, \\ \Omega &= 1.91344320, & M_0 &= 4.80414981, \\ i &= 0.298622635, & e &= 0.24706226, \\ a &= 39.672599, & m &= 0.2(7) \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Средние элементы Нептуна

$$\begin{aligned} \omega' &= 4.76860604, & e' &= 0.00853341, \\ \Omega' &= 2.29046539, & M'_0 &= 1.891590001, \\ i' &= 0.0309621409, & m' &= 0.517759138 \cdot 10^{-4} \\ a' &= 30.070672, & n' &= \frac{3}{2} n. \end{aligned}$$

Вместо переменной v (истинная аномалия в невозмущенном движении Плутона) удобно ввести переменную $w = v/2$ (функции $\Gamma_i(v) = \Gamma_i(2w)$ становятся $2\mathcal{K}$ -периодическими по w). При этом формулы метода, изложенного в пункте I, несколько изменятся. Выпишем их:

$$V_i = a_{i1} \sin 2w + a_{i2} \cos 2w + \mathcal{J}_i, \quad (51)$$

где
$$V_i = \begin{cases} \beta \tau_i^{-1}, & i=0, \\ \delta g_i \tau_i^{-1}, & i=1,2,3 \end{cases} \quad (s = x_0 \delta x + y_0 \delta y + z_0 \delta z), \quad (52)$$

$$\mathcal{J}_i = \int Q_i \sin 2[(w) - w] dw, \quad (53)$$

$$Q_i = \tau_i^3 \left\{ \Pi + \tau_i^{-2} \sum_1^3 g_{i0} \tau_i^{-1} \Gamma_i + 4 \int_w^w \tau_i^{-1} \sum_1^3 \Gamma_i \left(\tau_i^{-2} \frac{d}{dv} g_{i0} \right) dw \right\}, \quad (54)$$

$$Q_i = \Gamma_i + G p^{-1} g_{i0} \tau_i^{-1} V_0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (55)$$

$$\Gamma_i = \frac{2m'p^{-1}r_0^3}{1+m} \left\{ (g'_i - g_i) \Delta^{-3} - g'_i (r')^{-3} \right\}, \quad (i=1,2,3), \quad (56)$$

$$4r_0^{-1} = 4p^{-1}e \cos 2w + 4p^{-1}, \quad (57)$$

$$g_{i0} r_0^{-1} = \alpha_i \cos 2w + \beta_i \sin 2w, \quad (i=1,2,3), \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, & \beta_1 &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ \alpha_2 &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, & \beta_2 &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ \alpha_3 &= \sin \omega \sin i, & \beta_3 &= \cos \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$r_0^{-2} = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) p^{-2} + 2ep^{-2} \cos 2w + \frac{e^2}{2} p^{-2} \cos 4w, \quad (60)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0^{-3} &= \frac{a^3}{2} E_0 + \sum_1^{13} (-1)^k a^3 E_k \cos 2kw, \\ E_k &= \sqrt{1-e^2} \left[2 + e^2 + 3k\sqrt{1-e^2} + k^2(1-e^2) \right] \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \right)^k, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$r_0^{-2} \frac{d}{dv} g_{i0} = e\beta_i p^{-1} + \beta_i p^{-1} \cos 2w - \alpha_i p^{-1} \sin 2w, \quad (i=1,2,3) \quad (62)$$

В качестве промежуточной орбиты для Плутона выбран оскулирующий в эпоху t_0 эллипс, поэтому имеем еще

$$\Pi = 0, \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i1} &= -J_i(w_0) \sin 2w_0 - \frac{1}{2} J'_i(w_0) \cos 2w_0, \\ \alpha_{i2} &= -J_i(w_0) \cos 2w_0 + \frac{1}{2} J'_i(w_0) \sin 2w_0, \end{aligned} \right\} \quad (i=0,1,2,3).$$

Согласно второму способу из пункта 2, функции Γ_i могут быть записаны как функции аргумента $w = v/2$, 2π -периодические по этому аргументу. Здесь v - истинная аномалия в движении Плутона вдоль оскулирующего в эпоху t_0 эллипса.

Для того чтобы применить к этим функциям практический гармонический анализ, необходимо уметь вычислять частные значения их для $w \in [0, 2\pi]$.

Поясним, как это делается. Частные значения $\Gamma_i(w)$ вычисляются по формуле (56), причем величины, относящиеся к Плутону (g_{i0} , α_0 и т.д.), вычисляются обычным образом, как функции истинной аномалии $v = 2w$; величины, относящиеся к Нептуну (g'_{i0} , α'_0 и т.д.), определяются при помощи предварительно найденного по v значения истинной аномалии Нептуна v' . Указанное значение получается в несколько шагов.

1). Определение M по $v = 2w$. Пусть u - эксцентриская аномалия Плутона в его невозмущенном движении. Тогда имеем

$$\sin u = (\sqrt{1 - e^2} \sin v) / (1 + e \cos v),$$

$$u = v - 2 \arcsin \left[\sqrt{(1 + e \cos v)(1 - e^2)^{-1}} \sin \frac{\varphi}{2} \sin u \right];$$

и $\frac{\varphi}{2} = \frac{\arcsin e}{2}$,

и, наконец, $M = u - e \sin u$.

2). Определение M' . $M' = \frac{3}{2} M + M'_0 - \frac{3}{2} M_0$.

3). Определение u' . Из уравнения Кеплера

$$u' = M' + e' \sin u'.$$

Так как эксцентриситет Нептуна e' очень мал (≈ 0.01), то итерации, определяемые формулами

$$u'_{k+1} = M' + e' \sin u'_k, \quad u'_1 = M',$$

сходятся быстро.

4). Определение v' . Осталось еще использовать следующие формулы:

$$v' = a'(1 - e' \cos u'), \quad v' = u' + 2 \arcsin \left[\sqrt{a'(v')^{-2}} \sin \frac{\varphi'}{2} \sin u' \right],$$

где $\frac{\varphi'}{2} = \frac{\arcsin e'}{2}$.

Применение гармонического анализа дает для функций Γ_i аппроксимации, имеющие вид

$$\Gamma_i(w) = \sum_{k=0}^N (a_k^i \cos kw + b_k^i \sin kw).$$

После того, как разложения $\Gamma_i(w)$ получены, последовательно определяются выражения для Q_0 и V_0 .

Для определения Q_0 в виде тригонометрического полинома служит формула (54). Интегрирование в этой формуле дает вековой член, что приводит к появлению чисто векового члена в выражении для V_0 . Это является следствием принятого способа разложения величин Γ_i : при их разложении по двум аномалиям подынтегральное выражение в (54) не содержит постоянной так же, как и в методах Хилла, Энке, Лапласа-Ньюкома, Брауэра.

Таким образом

$$Q_0 = \sum_{k=0}^M \{ c_k^0 \cos kw + d_k^0 \sin kw \} + r_0^0 (w - w_0).$$

Чтобы определить V_0 сначала, согласно (53), находим J_0 . При этом интегрирование производится по формулам

$$\int \left\{ \begin{array}{l} \cos \kappa w \\ \sin \kappa w \end{array} \right\} \sin 2[(w) - w] dw = \frac{2}{4 - \kappa^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \kappa w \\ \sin \kappa w \end{array} \right\}, \quad \kappa \neq 2,$$

$$\int \left\{ \begin{array}{l} \cos 2w \\ \sin 2w \end{array} \right\} \sin 2[(w) - w] dw = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} \cos 2w \\ \sin 2w \end{array} \right\} \pm \frac{w}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sin 2w \\ \cos 2w \end{array} \right\}$$

$$\int (w - w_0) \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\kappa w \\ \sin 2\kappa w \end{array} \right\} \sin 2[(w) - w] dw =$$

$$= \frac{(w - w_0)}{2(1 - \kappa^2)} \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\kappa w \\ \sin 2\kappa w \end{array} \right\} \pm \frac{\kappa}{2(1 - \kappa^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\kappa w \\ \cos 2\kappa w \end{array} \right\}, \quad \kappa \neq 1,$$

$$\int (w - w_0) \left\{ \begin{array}{l} \cos 2w \\ \sin 2w \end{array} \right\} \sin 2[(w) - w] dw =$$

$$= \frac{(w - w_0)}{8} \left\{ \begin{array}{l} \cos 2w \\ \sin 2w \end{array} \right\} \pm \frac{(w - w_0)^2}{4} \left\{ \begin{array}{l} \sin 2w \\ \cos 2w \end{array} \right\}.$$

(к)

Затем по (63) определим постоянные интегрирования $a_{0\kappa}$, $a_{0\kappa}$. Окончательно выражение V_0 получается в следующем виде:

$$V_0 = \sum_{\kappa=0}^M (\Psi_{\kappa}^{\circ} \cos \kappa w + \Phi_{\kappa}^{\circ} \sin \kappa w) + (w - w_0) \sum_{\kappa=0}^{13} (\bar{\Psi}_{\kappa}^{\circ} \cos 2\kappa w + \bar{\Phi}_{\kappa}^{\circ} \sin 2\kappa w) + (w - w_0)^2 \bar{\Phi}_1^{\circ} \sin 2w,$$

$$w_0 = 2.1588696,$$

$$\bar{\Phi}_{\kappa}^{\circ} = 0 \quad \text{для } \kappa > 1,$$

Перейдем к определению V_i , ($i = 1, 2, 3$), согласно (55)

$$Q_i = \sum_{\kappa=0}^{M-2} \left\{ a_{\kappa}^i \cos \kappa w + d_{\kappa}^i \sin \kappa w \right\} + (w - w_0) \sum_{\kappa=0}^{14} \left(\bar{a}_{\kappa}^i \cos 2\kappa w + \bar{d}_{\kappa}^i \sin 2\kappa w \right) + (w - w_0)^2 (g_3^i + g_1^i \cos 4w + g_2^i \sin 4w), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для получения величин J_i , кроме формул (*), необходимы следующие формулы интегрирования:

$$\int (w - w_0)^2 \left\{ \begin{array}{l} \cos 4w \\ \sin 4w \\ 1 \end{array} \right\} \sin 2[(w) - w] dw =$$

$$= (w - w_0)^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\cos 4w}{6} \\ -\frac{\sin 4w}{6} \\ +\frac{1}{2} \end{array} \right\} + (w - w_0) \left\{ \begin{array}{l} +\frac{2}{9} \sin 4w \\ -\frac{2}{9} \cos 4w \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} +\frac{13}{108} \cos 4w \\ +\frac{13}{108} \sin 4w \\ -\frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Далее, по формуле (63) определяем постоянные интегрирования a_{i1} , a_{i2} .
В результате,

$$V_i = \sum_{k=0}^{M+2} (\Psi_k^i \cos kw + \Phi_k^i \sin kw) + (w - w_0) \sum_{k=0}^{14} (\bar{\Psi}_k^i \cos 2kw + \bar{\Phi}_k^i \sin 2kw) +$$

$$+ (w - w_0)^2 \sum_{k=0}^2 (\bar{\bar{\Psi}}_k^i \cos 2kw + \bar{\bar{\Phi}}_k^i \sin 2kw), \quad (i=1, 2, 3), \quad w_0 = 2.1588696.$$

Полиномы V_i , ($i=1, 2, 3$) представлены в табл. I-4.

Окончательный контроль работы программы проводился по тождеству

$$S \equiv x \cdot \delta x + y \cdot \delta y + z \cdot \delta z$$

Кроме того, полученные результаты дали хорошее согласие с численными результатами Ш.Г.Шараф (1955), Ш.Г.Шараф и Н.А.Будниковой (1964).

Промежуточные результаты, контроль и сравнение здесь не приводятся (см.: Бабаджянц, 1969в).

Л и т е р а т у р а

1. Б а б а д ж а н я н ц Л.К. 1969а. Аналитические методы вычисления возмущений в координатах планет. Ч.1. - Вестник ЛГУ, № 7.
2. Б а б а д ж а н я н ц Л.К. 1969б. Аналитические методы вычисления возмущений в координатах планет. Ч. 2. - Вестник ЛГУ, №19.
3. Б а б а д ж а н я н ц Л.К. 1969в. Аналитические методы вычисления возмущений в координатах планет. Канд.дисс. ЛГУ.
4. Ш а р а ф Ш. Г. 1955. Теория движения Плутона. Ч.1. - Тр. ИТА, вып.4, с. 3-131.
5. Ш а р а ф Ш. Г., Б у д н и к о в а Н. А. 1964. Теория движения Плутона. Ч. 2-4. - Тр. ИТА, вып. 10, с. 3-162.

Таблица I

Таблица 2

$$\delta u \approx V_0 = v_0^2 (x_0 \delta x + y_0 \delta y + z_0 \delta z) =$$

$$V_1 = v_1^2 \delta x =$$

$$= (w - w_0)^2 \bar{\Psi}_1^0 \sin 2\kappa w +$$

$$= (w - w_0)^2 \sum (\bar{\Psi}_\kappa^1 \cos 2\kappa w + \bar{\Psi}_\kappa^1 \sin 2\kappa w) +$$

$$+ (w - w_0) \sum (\bar{\Psi}_\kappa^0 \cos 2\kappa w + \bar{\Psi}_\kappa^0 \sin 2\kappa w) +$$

$$+ (w - w_0) \sum (\bar{\Psi}_\kappa^0 \cos 2\kappa w + \bar{\Psi}_\kappa^0 \sin 2\kappa w) +$$

$$+ \sum (\Psi_\kappa^0 \cos \kappa w + \Psi_\kappa^0 \sin \kappa w)$$

$$+ \sum (\Psi_\kappa^1 \cos \kappa w + \Psi_\kappa^1 \sin \kappa w)$$

κ	$\Psi_\kappa^0 \cdot 10^6$	$\bar{\Psi}_\kappa^0 \cdot 10^6$
0	-11707	-
1	-3296	+3709
2	+3551	-9848
3	+111	-436
4	+1303	+805
5	-309	+176
6	-140	-225
7	+136	-21
8	-1	+83
9	-52	-15
10	+17	-29
11	+17	+16
12	-14	+8
13	-3	-10
14	+8	-1
15	-1	+6
16	-4	-2
17	+2	-2
18	+1	+2
19	-2	+1
20	0	-1

κ	$\bar{\Psi}_\kappa^0 \cdot 10^6$	$\bar{\Psi}_\kappa^0 \cdot 10^6$
0	+3277	-
1	-2398	+10605
2	-194	-
3	+15	-
4	-2	-

$$\Psi_1^0 = -10^6 \cdot 1178$$

κ	$\Psi_\kappa^1 \cdot 10^9$	$\bar{\Psi}_\kappa^1 \cdot 10^9$
0	-35486	-
1	+22816	+157
2	-16928	-58823
3	+56	+8649
4	+3657	-16463
5	-147	+904
6	+819	-222
7	-40	-72
8	-107	+7
9	+22	-10
10	+33	+13
11	-16	+11
12	-11	-12
13	+11	-5
14	+3	+8
15	-6	0
16	0	-5
17	+3	+1
18	-1	+2
19	-1	-1
20	+1	-1
21	0	+1
22	0	0

κ	$\bar{\Psi}_\kappa^1 \cdot 10^9$	$\bar{\Psi}_\kappa^1 \cdot 10^9$
0	+34822	-
1	+62702	+72995
2	+5628	+13495
3	-69	+64
4	+3	-3
5	0	0
6	0	0

κ	$\bar{\Psi}_\kappa^1 \cdot 10^9$	$\bar{\Psi}_\kappa^1 \cdot 10^9$
0	-3117	-
1	-8924	-8980
2	-1037	-1109

ПРИБЛИЖЕННАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРОЯНЦЕВ

Г.М. Баженов

Резюме. Приводятся приближенные формулы для вычисления возмущений элементов орбиты троянца, вызываемых действием Юпитера. Рассматриваются возмущения первого порядка относительно массы Юпитера. Предлагаемая теория рассчитана на ограниченный промежуток времени, охватывающий два-три десятилетия до и после момента оскуляции.

Abstract. An approximate analytic theory of the Trojan motion, by G.M. Baženov. - In approximate formulae for calculation of perturbations in orbital elements of Trojan's due to Jupiter is offered.

Only first-order perturbations from Jupiter are considered.

The theory obtained is valid for only a limited time interval during two-three decade before and after the moment of osculation.

I. Уравнения, определяющие возмущенные элементы орбиты троянца

Движение троянца вокруг Солнца при возмущающем действии Юпитера определяется уравнением

$$\ddot{\vec{r}} + K^2 \frac{\vec{r}}{z^3} = K^2 m' \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{\Delta^3} - \frac{\vec{r}'}{z'^3} \right) = \vec{F} \quad (I)$$

в котором \vec{r} и z - радиус-вектор троянца и длина этого вектора соответственно, \vec{r}' и z' то же для Юпитера, \vec{F} - ускорение троянца, Δ - расстояние между троянцем и Юпитером, K - постоянная Гаусса, m' - масса Юпитера, \vec{F} - вектор возмущающего ускорения.

В качестве элементов орбиты троянца взяты следующие величины:

μ - среднее движение троянца, связанное с большой полуосью a соотношением $\ln \mu = \ln k - \frac{3}{2} \ln a$, e - эксцентриситет орбиты, $M = M_0 + \int_{t_0}^t \mu dt$ - средняя аномалия троянца в момент t и три величины A , B и C , равные нулю в момент оскуляции t_0 и определяемые по формулам

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} \bar{P}; \quad \frac{dB}{dt} = \frac{d\bar{R}}{dt} \bar{P}; \quad \frac{dC}{dt} = \frac{d\bar{R}}{dt} \bar{Q},$$

в которых \bar{P} , \bar{Q} и \bar{R} - орты орбитальной системы координат троянца.

Матрица возмущенных проективных коэффициентов троянца

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix}$$

и матрица его невозмущенных проективных коэффициентов \bar{M}_0 связаны друг с другом соотношением

Таблица 3

$$V_2 = \nu_0^{-1} \delta y = (\omega - \omega_0)^2 \sum (\bar{\Psi}_k^2 \cos 2k\omega + \bar{\Psi}_k^2 \sin 2k\omega) + (\omega - \omega_0) \sum (\bar{\Psi}_k^2 \cos 2k\omega + \bar{\Psi}_k^2 \sin 2k\omega) + \sum (\Psi_k^2 \cos k\omega + \Psi_k^2 \sin k\omega)$$

κ	$\Psi_k^2 \cdot 10^8$	$\bar{\Psi}_k^2 \cdot 10^8$
0	+15631	-
1	+271	+20090
2	+55735	-7030
3	-8446	-1484
4	+17314	+4809
5	-1240	+125
6	+84	+593
7	+246	-89
8	0	+14
9	-72	+7
10	+10	-21
11	+22	+9
12	-10	+8
13	-5	-8
14	+7	-1
15	0	+5
16	-4	-1
17	+1	-2
18	+2	+1
19	-1	+1
20	0	-1
21	0	0
22	0	+1

κ	$\bar{\Psi}_k^2 \cdot 10^8$	$\Psi_k^2 \cdot 10^8$
0	-25471	-
1	-80884	+55918
2	-14110	+5397
3	-65	-72
4	+3	+3
5	0	0
6	0	0

κ	$\bar{\bar{\Psi}}_k^2 \cdot 10^8$	$\bar{\bar{\Psi}}_k^2 \cdot 10^8$
0	+3538	-
1	+10128	-8440
2	+1179	-1043

Таблица 4

$$V_3 = \nu_0^{-1} \delta z = (\omega - \omega_0)^2 \sum (\bar{\Psi}_k^3 \cos 2k\omega + \bar{\Psi}_k^3 \sin 2k\omega) + (\omega - \omega_0) \sum (\bar{\Psi}_k^3 \cos 2k\omega + \bar{\Psi}_k^3 \sin 2k\omega) + \sum (\Psi_k^3 \cos k\omega + \Psi_k^3 \sin k\omega)$$

κ	$\Psi_k^3 \cdot 10^8$	$\bar{\Psi}_k^3 \cdot 10^8$
0	+9080	-
1	-6697	-1480
2	-426	+18710
3	+886	-3004
4	-3137	+4102
5	+217	-130
6	-70	+93
7	+14	+1
8	+34	-49
9	-13	+11
10	-14	+22
11	+11	-12
12	+4	-8
13	-7	+9
14	0	+1
15	+4	-5
16	-1	+1
17	-2	+3
18	+1	-1
19	0	-1
20	0	+1
21	0	0
22	0	-1

κ	$\bar{\Psi}_k^3 \cdot 10^8$	$\bar{\bar{\Psi}}_k^3 \cdot 10^8$
0	-7462	-
1	-10136	-27800
2	-172	-4471
3	+27	-11
4	-1	0
5	0	0
6	0	0

κ	$\bar{\bar{\Psi}}_k^3 \cdot 10^8$	$\bar{\bar{\Psi}}_k^3 \cdot 10^8$
0	+538	-
1	+1540	+3476
2	+179	+429