ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.6

Л. К. Бабаджанянц, К. М. Брэгман

АЛГОРИТМ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Предисловие. Рассматриваются полные системы дифференциальных уравнений в частных производных (и среди них системы обыкновенных дифференциальных уравнений – ОДУ), правые части которых можно записать при помощи четырех действий алгебры и любых допустимых суперпозиций функций конечного числа аргументов, принадлежащих неограниченно пополняемому набору функций, называемому библиотекой. Предлагается основанный на методе дополнительных переменных (МДП) автоматизированный алгоритм их сведения к полиномиальным автономным системам, т. е. к системам с полиномиальными по неизвестным правыми частями. Библиотеку можно пополнять любыми функциями, которые удовлетворяют полным, не обязательно автономным, полиномиальным системам. Например, библиотека может содержать все элементарные функции и очень многие специальные функции, используемые в приложениях. Алгоритм разработан на основе результатов статьи [1] с учетом возможностей пакета «Mathematica»[2], которые позволили наделить его следующими дополнительными свойствами:

– правые части исходных уравнений задаются в терминах функций пакета и библиотеки и могут содержать любые допустимые в них зависимости и от параметров;

– если, кроме самой исходной системы, рассматривается и задача Коши, то начальные данные также могут содержать любые допустимые зависимости от параметров;

– конечные уравнения и данные получаются в аналитической форме.

Алгоритм и пример его применения описываются в п. 2, а в п. 1 приведены необходимые предварительные сведения.

1. Введение в метод дополнительных переменных. Кратко изложим необходимые понятия и результаты из статьи [1].

1.1. Дифференциальные уравнения. Полиномиальные системы. Полагая, что

Бабаджанянц Левон Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики управляемого движения факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 88. Научные направления: дифференциальные уравнения, классическая и небесная механика. E-mail: levon@mail.wplus.net.

Брэгман Константин Михайлович – аспирант кафедры механики управляемого движения факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 1. Научные направления: дифференциальные уравнения, вычислительная математика. E-mail: kostjab@yandex.ru.

$x = (x_1, ..., x_m) \in R^m, \quad t = (t_1, ..., t_s) \in R^s, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_\omega) \in R^\omega, \quad f = (f_i^j), \quad f_i^j \in R,$

рассмотрим уравнения

$$\partial x_i/\partial t_j = f_i^j(x, \alpha), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s], \quad \partial x/\partial t = f(x, \alpha), \tag{1}$$

которые в случае $s = 1$ можно записать в виде системы ОДУ.

Полиномиальной назовем систему (1), в которой все функции f_i^j – полиномы по $x_1, \ldots, x_m$ с коэффициентами, зависящими от параметра α. Будем говорить, что скалярная функция φ аргумента $x = (x_1, ..., x_\sigma)$ удовлетворяет полиномиальной системе, если она является одной из компонент вектор-функции (того же аргумента $x = (x_1, \ldots, x_\sigma)$) – решения некоторой полиномиальной системы. Класс скалярных функций аргумента $x = (x_1, \ldots, x_\sigma)$, удовлетворяющих полиномиальной системе, обозначим Σ_σ. Так как любую функцию аргумента $x = (x_1, \ldots, x_{\sigma_1})$, принадлежащую классу Σ_{σ_1}, можно считать и функцией аргумента $x = (x_1, \ldots, x_{\sigma_2})$ класса Σ_{σ_2} при $\sigma_1 < \sigma_2$, то примем, что $\sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow \Sigma_{\sigma_1} \subset \Sigma_{\sigma_2}$, т. е. $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots$. Большое число специальных функций, представленных в справочниках и компьютерных системах, принадлежит Σ_1 (и тем более Σ_σ при $\sigma > 1$).

1.2. Метод дополнительных переменных. Этот метод сводит уравнения (1) к полиномиальной системе. Он состоит в том, что находят дополнительные переменные, функции $x_{m+1}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, x_{m+k}(x_1, \ldots, x_m)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) правые части уравнений (1) – полиномы по $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}$;

б) $\partial x_{m+l}/\partial x_i$ – полиномы по $x_1, \ldots, x_{m+k}, \;\; l = 1, \ldots, k, \;\; i = 1, \ldots, m$.

1.3. Классы $\mathcal{F}_m^\sigma$. Классом $\mathcal{F}_m^\sigma, \sigma, m \in [1 : +\infty)$ называют множество скалярных функций аргумента $x = (x_1, \ldots, x_m)$, которые можно получить из $x_1, \ldots, x_m$ при помощи конечного числа операций $+, -, \times, /$ и конечного числа функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in \Sigma_\sigma$ и их суперпозиций. Если в число этих функций включить φ такую, что $\varphi(a) = 1/a$, то в определении $\mathcal{F}_m^\sigma$ можно не использовать операцию $/$, так как величина a/b равна $a \times \varphi(b)$.

Как показано в [1], для применимости к системе (1) МДП необходимо и достаточно, чтобы все f_i^j принадлежали какому-нибудь из классов $\mathcal{F}_m^\sigma$. Предлагаемый в п. 2 для таких систем алгоритм МДП основан на понятии библиотеки.

1.4. Расширения и библиотеки. Если $\varphi \in \Sigma_\sigma$, то существует вектор-функция $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – решение полиномиальной системы, где $\varphi_1 = \varphi$. Множество $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ называем расширением φ. Объединение расширений нескольких функций – библиотека. Фактически, библиотека содержит набор полиномиальных систем, а не задач Коши. Всякое подмножество библиотеки называем подбиблиотекой, если оно само – библиотека. Разделом называем подбиблиотеку, которая не пересекается ни с одной другой подбиблиотекой, не являющейся ее частью. Объединение разделов является разделом. Раздел будем считать простым, если он не содержит других разделов. Библиотека объединяет свои разделы, и можно сказать, что она делится на них и, в частности, сама может быть своим единственным (простым) разделом.

2. Алгоритм сведения к полиномиальной системе. Здесь последовательно рассмотрим: структуру библиотеки как таблицы, алгоритм сведения и пример.

2.1. Библиотека как таблица. Библиотеку будем называть автономной или неавтономной соответственно тому, какими уравнениями она представлена – автономными или неавтономными. Ради удобства и большей универсальности предлагаемый алгоритм сведения позволяет пользоваться как автономными, так и неавтономными библиотеками, хотя можно было бы ограничиться автономными, так как неавтономную библиотеку всегда можно свести к автономной.

Для пользователя библиотека – пополняемая таблица, состоящая из потенциально неограниченного количества строк и одиннадцати столбцов:

«IDFun» – идентификатор функции (совпадает с ее именем в пакете «Mathematica», если такая функция в нем определена);

«FName» – второе имя функции;

«CNo» – текущий (current) порядковый номер функции в библиотеке;

«ONo» – исходный (original) порядковый номер функции в главной библиотеке;

«ENo» – порядковый номер функции в ее расширении (extention); так как расширение функции не единственно, то количество функций расширения и его состав зависят от составителя библиотеки;

«FArgN» – количество аргументов функции; у различных функций, входящих в расширение, может быть разное количество аргументов, однако можно (и мы будем) считать, что аргументы (а значит, и их количество) у функций расширения одинаковы, приняв, что производные функций по недостающим аргументам равны нулю;

«jENo» – порядковый номер аргумента, производной по которому соответствует данная строка: если, например, в текущей строке ENo=5, jENo=3, то она содержит информацию о производной пятой функции по третьему аргументу;

«FENoList» – список номеров «ONo» функций расширения данной функции;

«RHSPoly» – полином, правая часть дифференциального уравнения для данной функции φ: число правых частей (а значит, и строк с одним ENo и разными jENo) равно количеству FArgN аргументов $p_1, \ldots$ этой функции (переменные полинома – функции $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из ее списка расширения и их аргументы $p_1, \ldots$);

«LPartNo» – номер раздела библиотеки, содержащего функцию;

«IVFun» – имя программы, вычисляющей значение функции (такой программы может и не быть, в алгоритме этот столбец не используется и носит чисто информационный характер для пользователей).

2.1.1. Зависимость коэффициентов полиномов от параметров. Коэффициенты полиномов (правых частей дифференциальных уравнений) в графе «RHSPoly» могут зависеть от параметров. Относительно них мы предполагаем выполненным единственное условие: во всех уравнениях для функций одного раздела библиотеки параметры, обозначенные одинаково, должны иметь один и тот же смысл. При этом сохраняется возможность использовать одни и те же символы для разных или одинаковых по смыслу параметров в различных разделах. Из сказанного следует, что библиотеку целесообразно представлять разбитой на простые разделы.

2.1.2. Разбиение библиотеки на разделы. Для такого разбиения можно предложить различные алгоритмы, основанные на очевидном утверждении: если в списке расширения функции есть функция из некоторого раздела, то и сама функция принадлежит тому же разделу. Кроме того, пользуясь данным утверждением, при пополнении библиотеки новыми функциями имевшуюся нумерацию разделов можно сохранить, а новым разделам (если появятся) присвоить иные номера (старые разделы могут пополниться новыми функциями).

2.1.3. Зависимость функций от аргументов и параметров. Имя в графе «FName» задается в формате $\mathrm{Name}(\beta_1, \ldots; p_1, \ldots)$, где $p_1, \ldots$ – список аргументов функции, а $\beta_1, \ldots$ – список параметров.

2.1.4. О б р а з о в а н и е п о д б и б л и о т е к и. Обсудим, как из основной библиотеки выделить подбиблиотеку, содержащую функции $\psi_1, \ldots, \psi_k$, в терминах которых записаны исходные дифференциальные уравнения, причем желательно, чтобы полученная подбиблиотека содержала меньше функций. Процесс выделения следующий:

а) находим все различные номера ONo из всех списков в графе «FENoList» для функций $\psi_1, \ldots, \psi_k$,

б) образуем библиотеку той же структуры, в которую переписываем из исходной библиотеки все строки с этими различными номерами.

2.2. Алгоритм сведения. Вначале опишем элементарное преобразование уравнений вида (1), составляющее основу алгоритма, а затем схему алгоритма.

2.2.1. Э л е м е н т а р н о е п р е о б р а з о в а н и е с и с т е м ы. Рассмотрим систему (1) при условии, что все f_i^j принадлежат $\mathcal{F}_m^\sigma$. Алгоритм преобразования следующий:

а) ищем в правых частях функцию вида $\varphi^k(P_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, P_\vartheta(x_1, \ldots, x_m))$, где P_ν – алгебраические полиномы, $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_\vartheta)$ – функция из библиотеки, а k, ϑ – натуральные числа;

б) пусть $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ – все функции расширения функции φ и пусть

$$\partial\varphi_i/\partial p_\nu = Q_i^\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu), \quad i \in [1:\mu],$$

где Q_i^ν – полиномы. Вводим новые дополнительные переменные

$$\begin{aligned}
&x_{m+1} = \varphi_1(P_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, P_\vartheta(x_1, \ldots, x_m)),\\
&\ldots\\
&x_{m+\mu} = \varphi_\mu(P_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, P_\vartheta(x_1, \ldots, x_m));
\end{aligned}$$

в) заменяя все функции $\varphi_1(P_1, \ldots, P_\vartheta), \ldots, \varphi_\mu(P_1, \ldots, P_\vartheta)$ в правых частях уравнений (1) на новые переменные $x_{m+1}, \ldots, x_{m+\mu}$ соответственно, получаем

$$\partial x_i/\partial t_j = g_i^j(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+\mu}), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s];$$

г) выписываем уравнения для введенных переменных ($i \in [1:\mu]$, $j \in [1:s]$):

$$\partial x_{m+i}/\partial t_j = \sum_{\nu=1}^{\vartheta} Q_i^\nu(x_{m+1}, \ldots, x_{m+\mu}) \cdot \sum_{k=1}^{m} \partial P_\nu/\partial x_k \cdot g_k^j(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+\mu}).$$

2.2.2. С х е м а с в е д е н и я.

Шаг 1. Заносим правые части (1) и начальные данные в пакете «Mathematica»:

$$\partial x_i/\partial t_j = f_i^j(x_1, ..., x_n), \quad i \in [1:n], \quad j \in [1:s], \tag{2}$$

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n,0}.$$

Введенные правые части и начальные данные могут содержать параметры. Если для обозначения каких-то из этих параметров использованы символы вида α_i, где i – натуральное число, то полагаем, что Ω равно максимальному из таких i, а если таких параметров нет, то считаем, что $\Omega = 0$.

Образуем подбиблиотеку, состоящую из объединения расширений всех функций, участвующих в написании правых частей системы (2) (см. п. 2.1.4). Параметры, от которых зависят функции подбиблиотеки, переобозначим символами $\alpha_{\Omega+1}, \alpha_{\Omega+2}, \ldots$ и заполним таблицу соответствий вида

NewParam	OldParam	LPartNo
$\alpha_{\Omega+1}$	$a2$	2
$\alpha_{\Omega+2}$	c'	7
...		

Шаг 2. Преобразуем (2) шаг за шагом, пока не сведем систему к полиномиальной форме, применяя на каждом шаге элементарное преобразование к системе, полученной на предыдущем шаге (см. п. 2.2.1). На последнем шаге для переменных $x_1, \ldots, x_{n+M}$ выводим систему

$$\partial x_i/\partial t_j = R_i^j(x_1, \ldots, x_{n+M}), \quad i \in [1 : n+M], \quad j \in [1 : s],$$

где R_i^j – полиномы.

Шаг 3. Вычисляем начальные значения для переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+M}$.

Таким образом, исходная задача Коши сведена к полиномиальной.

Приведенная на рисунке блок-схема отражает описанный выше алгоритм сведения системы (1) к полиномиальной форме и соответствует тексту программы, электронный вариант которой можно получить по электронной почте: kostjab@yandex.ru.

2.2.3. П р и м е р с в е д е н и я. Рассмотрим сведение к полиномиальной форме полной системы из шести уравнений в частных производных для трех функций от двух аргументов, причем правые части зависят от шести элементарных функций одного аргумента, одной специальной функции двух аргументов и трехпараметрического семейства функций Вебера. Как можно заметить, эти уравнения выбраны так, что при $s = 1$ образуют систему ОДУ. Данный модельный, но отнюдь не тривиальный пример не только иллюстрирует алгоритм сведения п. 2.2.2, но и предназначен для отладки соответствующей программы. Вначале опишем используемую библиотеку.

Библиотека. Она является объединением шести подбиблиотек Пб1, ... , Пб6, которые рассмотрим вместе с соответствующими дифференциальными уравнениями. Функции будем обозначать $\varphi, \varphi_1, \ldots$, а их аргументы – $p, p_1, \ldots$.

Пб1. Состоит из одной функции одного аргумента – $\varphi = \mathrm{inv}(p) = p^{-1}$, которая удовлетворяет уравнению $d\varphi/dp = -\varphi^2$, а расширение этой функции включает только ее одну.

Пб2. Входят две функции одного аргумента $\varphi_1 = \ln p, \varphi_2 = \mathrm{inv}(p)$, которые удовлетворяют системе $d\varphi_1/dp = \varphi_2$, $d\varphi_2/dp = -\varphi_2^2$, причем расширение функции φ_1 состоит из функций φ_1, φ_2, а расширение функции φ_2 – из нее одной (т. е. совпадает с Пб1).

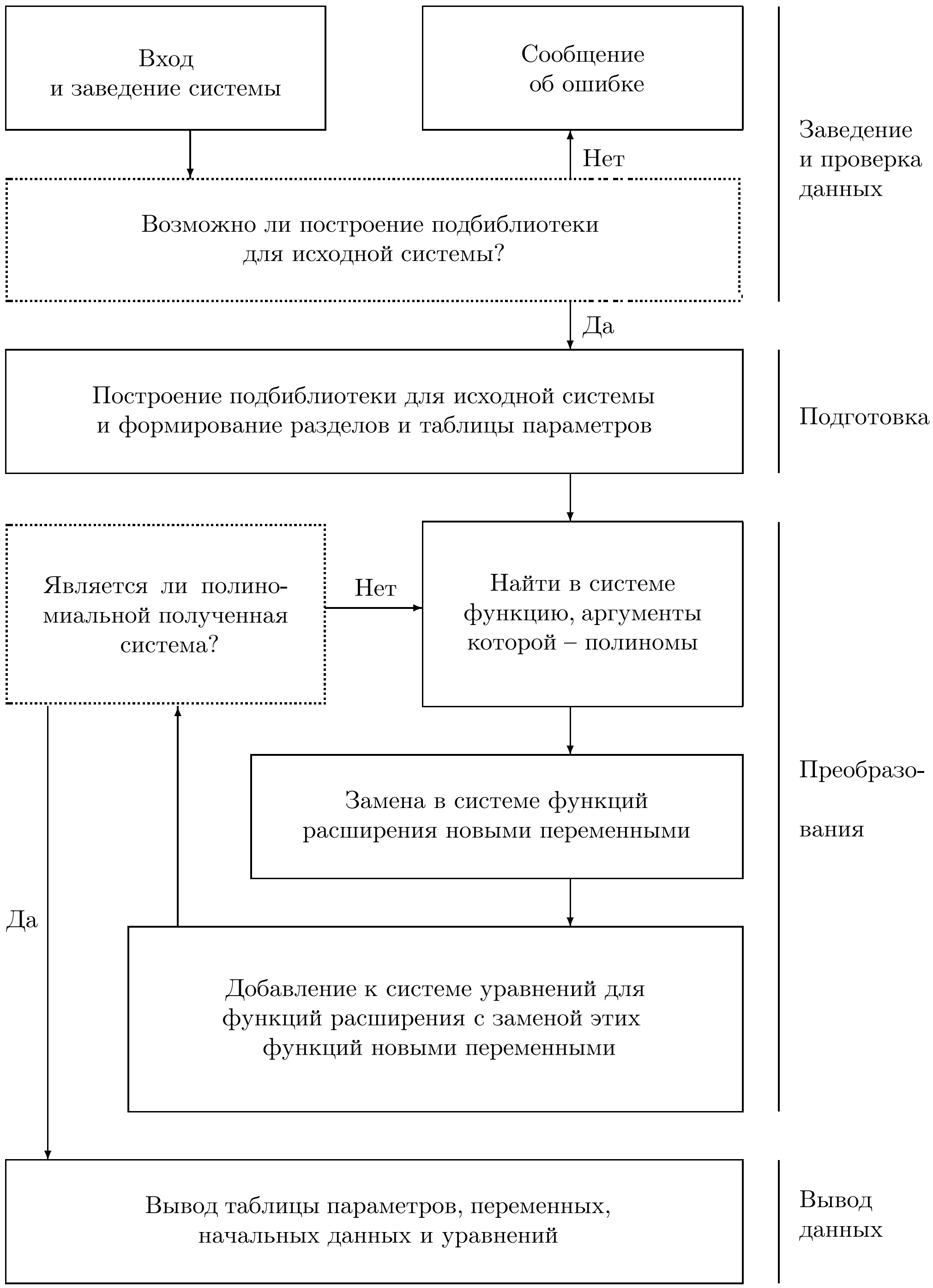
Пб3. Содержит две функции одного аргумента – $\varphi_1 = \sin p, \quad \varphi_2 = \cos p$, которые удовлетворяют системе $d\varphi_1/dp = \varphi_2$, $d\varphi_2/dp = -\varphi_1$, а расширение каждой из функций φ_1, φ_2 включает функции φ_1, φ_2.

Пб4. Состоит из двух функций одного аргумента – $\varphi_1 = \mathrm{sh}(p)$, $\varphi_2 = \mathrm{ch}(p)$, которые удовлетворяют системе $d\varphi_1/dp = \varphi_2$, $d\varphi_2/dp = \varphi_1$, а расширение каждой из функций φ_1, φ_2 содержит функции φ_1, φ_2.

Пб5. Состоит из четырех функций двух аргументов: $\varphi_1 = EK(p_1, p_2) = E(e, M)$, где $EK = E$ – эксцентрическая аномалия, $p_1 = e$ – эксцентриситет, $p_2 = M$ — средняя аномалия [3]:

$$\varphi_2 = EKs(p_1, p_2) = \sin\varphi_1,$$

$$\varphi_3 = EKc(p_1, p_2) = \cos\varphi_1,$$



Блок-схема алгоритма и программы сведения

$$\varphi_4 = EKi(p_1, p_2) = (1 - p_1 \cos\varphi_1)^{-1},$$

которые удовлетворяют системе

$$\partial\varphi_1/\partial p_1 = \varphi_2\varphi_4, \quad \partial\varphi_1/\partial p_2 = \varphi_4,$$

$$\partial\varphi_2/\partial p_1 = \varphi_2\varphi_3\varphi_4, \quad \partial\varphi_2/\partial p_2 = \varphi_3\varphi_4,$$

$$\partial\varphi_3/\partial p_1 = -\varphi_2^2\varphi_4, \quad \partial\varphi_3/\partial p_2 = -\varphi_2\varphi_4,$$

$$\partial\varphi_4/\partial p_1 = \varphi_3\varphi_4^2 - p_1\varphi_2^2\varphi_4^3, \quad \partial\varphi_4/\partial p_2 = -p_1\varphi_4^3\varphi_2,$$

причем расширение функции φ_1 состоит из $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, а расширение каждой из функций $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – из всех этих трех функций.

Пб6. Состоит из функций φ_1, φ_2 аргумента p, причем первая из них – функция Вебера Dv [4], а вторая – ее производная, которую обозначим DV. Как известно, они удовлетворяют системе уравнений (a, b, c – параметры)

$$d\varphi_1/dp = \varphi_2,$$

$$d\varphi_2/dp = -(ap^2 + bp + c)\varphi_1.$$

Расширение каждой из функций φ_1, φ_2 есть $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Перейдем к самому примеру.

Шаг 1. Пользователь заносит систему и начальные условия ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
\partial x_1/\partial t_j &= x_3^3(\sin\cos(a\ln^2 x_2 + bx_3) + b\ln^4 x_2) + \sin^5(a\ln^2 x_2 + bx_3) + \\
&\quad + \mathrm{Dv}(g^2, 1, -1; x_1), \\
\partial x_2/\partial t_j &= x_2^2 \cos\sin(a\ln^2 x_2 + bx_3) + \cos^4(a\ln^2 x_2 + bx_3) + \\
&\quad + EK^j(\sin\sin(a\ln^2 x_2 + bx_3), x_1), \\
\partial x_3/\partial t_j &= x_1^j(\mathrm{ch}^2(a\ln^2 x_2 + bx_3) + \sin(a\ln^2 x_2 + bx_3)) + \\
&\quad + \mathrm{sh}^5(a\ln^2 x_2 + bx_3),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (a, b) \text{ – вещественные постоянные (параметры),}$$

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \quad x_2(t_0) = x_{2,0}, \quad x_3(t_0) = x_{3,0}.$$

Подбиблиотека состоит из объединения Пб1,…,Пб6, т. е. из функций

$$\ln p,\ p^{-1}, \quad \sin p, \quad \cos p, \quad \mathrm{sh}\, p, \quad \mathrm{ch}\, p;$$

$$EK(p_1, p_2), \quad EKs(p_1, p_2), \quad EKc(p_1, p_2), \quad EKi(p_1, p_2), \quad \mathrm{Dv}(a, b, c; p).$$

Шаг 2. Преобразуем систему (3) шаг за шагом (шаг 2.1, шаг 2.2,…), пока не будем иметь ее в полиномиальной форме, применяя на каждом шаге элементарное преобразование к системе, полученной на предыдущем шаге:

Шаг 2.1:

а) в качестве первой функции $\varphi(P)$ возьмем, например, $\ln x_2$;

б) функциями расширения $\ln p$ будут функции $\varphi_1 = \ln p, \varphi_2 = p^{-1}$, которые удовлетворяют системе

$$d\varphi_1/dp = \varphi_2, \quad d\varphi_2/dp = -\varphi_2^2.$$

Введем дополнительные переменные $x_4 = \ln x_2$, $x_5 = x_2^{-1}$;

в) заменяя $\ln x_2$, x_2^{-1} во всех их вхождениях в правые части уравнений (3) на x_4, x_5 соответственно, получаем новую запись этих исходных уравнений ($j = 1, 2$):

$$\partial x_1/\partial t_j = x_3^3(\sin\cos(ax_4^2 + bx_3) + bx_4^4) + \sin^5(ax_4^2 + bx_3) + \mathrm{Dv}(g^2, 1, -1; x_1),$$

$$\partial x_2/\partial t_j = x_2^2 \cos\sin(ax_4^2 + bx_3) + \cos^4(ax_4^2 + bx_3) + + EK^j(\sin\sin(ax_4^2 + bx_3), x_1),$$

$$\partial x_3/\partial t_j = x_1^j(\mathrm{ch}^2(ax_4^2 + bx_3) + \sin(ax_4^2 + bx_3)) + \mathrm{sh}^5(ax_4^2 + bx_3);$$

г) уравнения для введенных дополнительных переменных следующие:

$$\partial x_4/\partial t_j = \partial \ln x_2/\partial t_j = x_2^{-1} \cdot \partial x_2/\partial t_j = x_5(x_2^2 \cos\sin(ax_4^2 + bx_3) + \\ + \cos^4(ax_4^2 + bx_3) + EK^j(\sin\sin(ax_4^2 + bx_3), x_1)),$$

$$\partial x_5/\partial t_j = \partial x_2^{-1}/\partial t_j = -x_2^{-2} \cdot \partial x_2/\partial t_j = -x_5^2(x_2^2 \cos\sin(ax_4^2 + bx_3) + \\ + \cos^4(ax_4^2 + bx_3) + EK^j(\sin\sin(ax_4^2 + bx_3), x_1)).$$

Итак, в результате шага 2.1 будем иметь систему ($j = 1, 2$)

$$\partial x_1/\partial t_j = x_3^3(\sin\cos(ax_4^2 + bx_3) + bx_4^4) + \sin^5(ax_4^2 + bx_3) + \mathrm{Dv}(g^2, 1, -1; x_1),$$

$$\partial x_2/\partial t_j = x_2^2 \cos\sin(ax_4^2 + bx_3) + \cos^4(ax_4^2 + bx_3) + \\ + EK^j(\sin\sin(ax_4^2 + bx_3), x_1),$$

$$\partial x_3/\partial t_j = x_1^j(\mathrm{ch}^2(ax_4^2 + bx_3) + \sin(ax_4^2 + bx_3)) + \mathrm{sh}^5(ax_4^2 + bx_3),$$

$$\partial x_4/\partial t_j = \partial \ln x_2/\partial t_j = x_2^{-1} \cdot \partial x_2/\partial t_j = x_5(x_2^2 \cos\sin(ax_4^2 + bx_3) + \\ + \cos^4(ax_4^2 + bx_3) + EK^j(\sin\sin(ax_4^2 + bx_3), x_1)),$$

$$\partial x_5/\partial t_j = \partial x_2^{-1}/\partial t_j = -x_2^{-2} \cdot \partial x_2/\partial t_j = -x_5^2(x_2^2 \cos\sin(ax_4^2 + bx_3) + \\ + \cos^4(ax_4^2 + bx_3) + EK^j(\sin\sin(ax_4^2 + bx_3), x_1)).$$

Шаг 2.2 – шаг 2.7. Действуя аналогично, вводим переменные

$$x_6 = \sin(ax_4^2 + bx_3), \quad x_7 = \cos(ax_4^2 + bx_3),$$

$$x_8 = \mathrm{sh}(ax_4^2 + bx_3), \quad x_9 = \mathrm{ch}(ax_4^2 + bx_3),$$

$$x_{10} = \cos x_6, \quad x_{11} = \sin x_6, \quad x_{12} = \sin x_7, \quad x_{13} = \cos x_7,$$

$$x_{14} = EK(x_{11}, x_1), \quad , x_{15} = EKs(x_{11}, x_1),$$

$$x_{16} = EKc(x_{11}, x_1), \quad x_{17} = EKi(x_{11}, x_1),$$

$$x_{18} = \mathrm{Dv}(g^2, 1, -1; x_1), \quad x_{19} = DV(g^2, 1, -1; x_1),$$

и в результате шага 2.7 получаем итоговую систему ($j = 1, 2$)

$$\partial x_1/\partial t_j = x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j,$$

$$\partial x_2/\partial t_j = x_2^2 x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j,$$

$$\partial x_3/\partial t_j = x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5,$$

$$\partial x_4/\partial t_j = x_5(x_2^2 x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j),$$

$$\partial x_5/\partial t_j = -x_5^2(x_2^2 x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j),$$

$$\partial x_6/dt_j = x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_7/\partial t_j = -x_6(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_8/\partial t_j = x_9(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_9/\partial t_j = x_8(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_{10}/\partial t_j = -x_{11}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_{10}/\partial t_j = -x_{11}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_{11}/\partial t_j = x_{10}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_{12}/\partial t_j = -x_{13}x_6(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_{13}/\partial t_j = x_{12}x_6(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)),$$

$$\partial x_{14}/\partial t_j = x_{15}x_{17}x_{10}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)) + \\ + x_{17}(x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j),$$

$$\partial x_{15}/\partial t_j = x_{15}x_{16}x_{17}x_{10}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)) + \\ + x_{16}x_{17}(x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j),$$

$$\partial x_{16}/\partial t_j = -x_{15}^2x_{17}x_{10}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)) - \\ - x_{15}x_{17}(x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j),$$

$$\partial x_{17}/\partial t_j = (x_{16}x_{17}^2 - x_{11}x_{15}^2x_{17}^3)x_{10}x_7(2ax_4x_5(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) + \\ + b(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5)) - x_{11}x_{15}^2x_{17}^3(x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j),$$

$$\partial x_{18}/\partial t_j = x_{19}(x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j) - x_{18}^2x_{19}(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) - \\ - x_{18}^3x_{19}(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5),$$

$$\partial x_{19}/\partial t_j = -x_{18}(g^2x_1^2 + x_1 - 1)(x_3^3(x_{12} + bx_4^4) + x_6^5 + x_{18}^j) - \\ - x_{18}^2x_{19}(x_2^2x_{10} + x_7^4 + x_{14}^j) - x_{18}^3x_{19}(x_1^j(x_9^2 + x_6) + x_8^5).$$

Исходные и дополнительные переменные и начальные данные для них следующие:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3; \quad x_{1,0}, \quad x_{2,0}, \quad x_{3,0};$$

$$x_4 = \ln x_2, \quad x_{4,0} = \ln x_{2,0};$$

$$x_5 = x_2^{-1}, \quad x_{5,0} = x_{2,0}^{-1};$$

$$x_6 = \sin(ax_4^2 + bx_3), \quad x_{6,0} = \sin(ax_{4,0}^2 + bx_{3,0});$$

$$x_7 = \cos(ax_4^2 + bx_3), \quad x_{7,0} = \cos(ax_{4,0}^2 + bx_{3,0});$$

$$x_8 = \mathrm{sh}(ax_4^2 + bx_3), \quad x_{8,0} = \mathrm{sh}(ax_{4,0}^2 + bx_{3,0});$$

$$x_9 = \mathrm{ch}(ax_4^2 + bx_3), \quad x_{9,0} = \mathrm{ch}(ax_{4,0}^2 + bx_{3,0});$$

$$x_{10} = \cos x_6, \quad x_{10,0} = \cos x_{6,0};$$

$$x_{11} = \sin x_6, \quad x_{11,0} = \sin x_{6,0};$$

$$x_{12} = \sin x_7, \quad x_{12,0} = \sin x_{7,0};$$
$$x_{13} = \cos x_7, \quad x_{13,0} = \cos x_{7,0};$$
$$x_{14} = EK(x_{11}, x_1), \quad x_{14,0} = EK(x_{11,0}, x_{1,0});$$
$$x_{15} = EKs(x_{11}, x_1), \quad x_{15,0} = EKs(x_{11,0}, x_{1,0});$$
$$x_{16} = EKc(x_{11}, x_1), \quad x_{16,0} = EKc(x_{11,0}, x_{1,0});$$
$$x_{17} = EKi(x_{11}, x_1), \quad x_{17,0} = EKi(x_{11,0}, x_{1,0});$$
$$x_{18} = \mathrm{Dv}(g^2, 1, -1; x_1), \quad x_{18,0} = \mathrm{Dv}(g^2, 1, -1; x_{1,0});$$
$$x_{19} = DV(g^2, 1, -1; x_1), \quad x_{19,0} = DV(g^2, 1, -1; x_{1,0}).$$

Литература

1. *Бабаджанянц Л. К.* Метод дополнительных переменных // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 1. С. 3–11 .

2. Wolfram Mathematica Documentation Center // URL: http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html.

3. *Холшевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 180 с.

4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по элементарным функциям / пер. с англ.; под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной. М.: Наука, 1968. 800 с. (*Abramowitz M., Stegun I. A.*, Handbook of mathematical functions)

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья принята к печати 28 февраля 2012 г.