ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.91:517.936:519.6

Л. К. Бабаджанянц

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение. Идея метода дополнительных переменных (МДП) восходит к А. Пуанкаре [1] (*J. H. Poincare.* Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle, 1881–1886). Предлагаемый в настоящей работе метод применим как к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), так и к полным системам уравнений в частных производных: он сводит системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, к аналогичным системам большей размерности, но с полиномиальными по неизвестным правыми частями. Привлекательная своей простотой структура полученных полиномиальных дифференциальных уравнений обеспечивает и очевидные преимущества при их приближенном решении. Рассматриваются достаточно общие и естественные классы дифференциальных уравнений, которые могут быть сведены к полиномиальным системам методом дополнительных переменных, причем это сведение может быть автоматизировано. В п. 1 вводятся некоторые классы функций и уравнений; в п. 2 описывается МДП; в п. 3 приведены примеры; п. 4 содержит заключительные замечания.

1. Классы функций и уравнений.

1.1. Дифференциальные уравнения. Используя обозначения

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in C^m,\ t = (t_1, \dots, t_s) \in C^s, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\omega) \in C^\omega,$$

$$dx = (dx_1, \dots, dx_m),\ dt = (dt_1, \dots, dt_s), \quad \partial x/\partial t = (\partial x_i/\partial t_j), \quad f = (f_i^j), f_i^j \in C,$$

систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, разрешенных относительно производных, записывают в любой из трех форм:

$$\partial x_i/\partial t_j = f_i^j(x, \alpha), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s], \tag{1}$$

$$\partial x/\partial t = f(x, \alpha), \quad dx = f(x, \alpha)dt.$$

В случае ОДУ (т. е. при $s = 1$) эти формы сводятся к следующим двум (координатной и векторной):

Бабаджанянц Левон Константинович – доктор физико–математических наук, профессор кафедры механики управляемого движения факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 83. Научные направления: дифференциальные уравнения, классическая и небесная механика. E—mail: levon@mail.wplus.net.

$$dx_i/dt = f_i(x,\alpha), \quad i \in [1:m], \quad dx/dt = f(x,\alpha). \tag{2}$$

З а м е ч а н и е 1.1. Правые части в уравнениях (1) и коэффициенты полиномиальной системы могут зависеть от параметров α, – это важно для приложений. Чтобы искусственно не усложнять обозначения, возможную зависимость уравнений, функций, коэффициентов, пространств и т. п. от параметров α мы будем далее, как правило, предполагать по умолчанию. Вместе с тем, если в уравнениях (1) ввести ω дополнительных переменных $x_{m+1} = \alpha_1, \ldots, x_{m+\omega} = \alpha_\omega$, то новая система не будет зависеть от параметров. Так можно «избавиться» и только от части параметров. Кроме того, система (1) автономна, но от неавтономной системы к автономной можно перейти тем же приемом введения дополнительных переменных $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_{m+s} = t_s$.

Будем рассматривать различные классы правых частей уравнений (1) (т. е. различные классы скалярных функций аргумента $x = (x_1, \ldots, x_m)$) и использовать обозначение $\mathcal{E}^s(\mathcal{K})$ для класса систем (1), все правые части которых принадлежат классу $\mathcal{K}$. Ясно, что $\mathcal{K} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{E}^s(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E}^s(\mathcal{M})$.

1.2. Классы полиномов и полиномиальных систем $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}$,$\mathcal{E}^s(\mathcal{P}_m)$, $\mathcal{E}^s(\mathcal{P})$**.** Класс полиномов по $x_1, \ldots, x_m$ с коэффициентами, зависящими (возможно) от параметра α, обозначим $\mathcal{P}_m(\alpha)$ или $\mathcal{P}_m$, а объединение всех этих классов по $m \in [1:\infty)$ — $\mathcal{P}(\alpha)$ или $\mathcal{P}$. Полиномиальной будем называть систему (1), в которой все функции f_i^j принадлежат $\mathcal{P}_m$. Классы $\mathcal{E}^s(\mathcal{P}_m)$, $\mathcal{E}^s(\mathcal{P})$ связаны равенством $\mathcal{E}^s(\mathcal{P}) = \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}^s(\mathcal{P}_m)$.

1.3. Классы функций Σ_σ**.** Будем говорить, что скалярная функция $\varphi \in C$ аргумента $x = (x_1, \ldots, x_\sigma) \in C^\sigma$ удовлетворяет полиномиальной системе, если она является одной из компонент вектор-функции (того же аргумента $x = (x_1, \ldots, x_\sigma)$) – решения некоторой полиномиальной системы. Класс скалярных функций аргумента $x = (x_1, \ldots, x_\sigma)$, удовлетворяющих полиномиальной системе, обозначим Σ_σ. Так как любую функцию аргумента $x = (x_1, \ldots, x_{\sigma_1}) \in C^{\sigma_1}$, принадлежащую классу Σ_{σ_1} можно считать также и функцией аргумента $x = (x_1, \ldots, x_{\sigma_2}) \in C^{\sigma_2}$ класса Σ_{σ_2} при $\sigma_1 < \sigma_2$, то можем (и, ради удобства, будем) считать, что $\sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow \Sigma_{\sigma_1} \subset \Sigma_{\sigma_2}$, т. е. $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots$. Большое число специальных функций анализа и математической физики, представленных в справочниках и компьютерных системах, принадлежит Σ_1 (и тем более Σ_σ при $\sigma > 1$).

1.4. Расширения. Если l функций $\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{l,1}$ аргумента $x = (x_1, \ldots, x_\sigma)$ принадлежат Σ_σ, то каждая из них есть компонента решения некоторой полиномиальной системы. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, l$ решение полиномиальной системы для $\varphi_{i,1}$ состоит из компонент $\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n(i)}$. Тогда множество $\cup_{i=1}^{l} \left\{\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n(i)}\right\}$ будем называть расширением множества $\{\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{l,1}\}$. Так как одна и та же функция удовлетворяет различным полиномиальным системам и с разным составом компонент, то расширение множества $\{\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{l,1}\}$ не единственное.

1.5. Классы функций $\mathcal{H}_m$. Класс $\mathcal{H}_m$ скалярных функций от $x = (x_1, \ldots, x_m)$ определим условием $K(x) \in \mathcal{H}_m$ тогда и только тогда, когда найдется какое-то число k скалярных функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ таких, что

$$K(x) = P(\psi_1, \ldots, \psi_k, x), \quad \partial\psi_r/\partial x_i = \Psi_{r,i}(\psi_1, \ldots, \psi_k, x), \quad r \in [1:k], \quad i \in [1:m],$$

причем все функции $P, \Psi_{r,i}$ — алгебраические полиномы по $x_1, \ldots, x_m, \psi_1, \ldots, \psi_k$.

Иначе говоря, $K(x) \in \mathcal{H}_m$ означает, что $K(x)$ можно представить полиномом относительно $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$,$x_1, \ldots, x_m$, где $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ удовлетворяют какой-то (любой, неавтономной, вообще говоря) полной системе уравнений в частных производных первого порядка.

1.6. Классы функций $\mathcal{F}_m^\sigma$. Прежде чем дать формальное определение, поясним, что $\mathcal{F}_m^\sigma$, σ, $m \in [1:+\infty)$ – множество скалярных функций аргумента $x = (x_1, \ldots, x_m)$, которые можно получить из $x_1, \ldots, x_m$ при помощи конечного числа операций $+, -, \times, /$ и конечного числа функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in \Sigma_\sigma$ и их суперпозиций. Если в число этих функций включить φ такую, что $\varphi(a) = 1/a$, то в определении $\mathcal{F}_m^\sigma$ можно не использовать операцию деления, так как величина a/b равна $a \times \varphi(b)$. Итак, $K \in \mathcal{F}_m^\sigma$ должно означать, что величину $K(x)$ можно получить как последний член последовательности $K_1 = x_1, \ldots, K_m = x_m, K_{m+1}, \ldots, K_{m+p}$, в которой величина $K_{m+r}, r \in [1:p]$ либо равна $\varphi_{\Lambda(r)}(K_{\Omega(1,r)}, \ldots, K_{\Omega(\sigma,r)})$ при каких-то $\Lambda(r) \in [1:l]$, $\Omega(i,r) \in [1:m+r-1]$, либо является полиномом $Q_r(K_1, \ldots, K_{m+r-1})$ по переменным $K_1, \ldots, K_{m+r-1}$.

Множество всех q значений $r \in [1:p]$, при которых реализуется первый из случаев, назовем Γ, а множество остальных $p-q$ значений $r \in [1:p]$ обозначим Γ'. Итак, по определению, класс $\mathcal{F}_m^\sigma$ – это множество таких скалярных функций $K = K(x)$ аргумента $x = (x_1, \ldots, x_m)$, которые можно задать формулой

$$K_r = x_r,\ r \in [1:m];$$
$$K_{m+r} = \begin{cases} \varphi_{\Lambda(r)}(K^{\Omega(r)}), & r \in \Gamma \\ Q_r(K_1, \ldots, K_{m+r-1}), & r \in \Gamma' \end{cases},\ r \in [1:p], \quad K = K_{m+p}, \tag{3}$$

где $\Lambda(r) \in [1:l]$; $\Omega(r) = (\Omega(1,r), \ldots, \Omega(\sigma,r))$; $\Omega(\nu,r) \in [1:m+r-1]$; $K^{\Omega(r)} = (K_{\Omega(1,r)}, \ldots, K_{\Omega(\sigma,r)})$; $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$, $\Gamma \cup \Gamma' = [1:p]$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in \Sigma_\sigma$, а l, p – некоторые натуральные числа.

Предложение 1.1. Для классов $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{F}_m^\sigma$ истинны формулы

$$(\forall m, \sigma \in [1:\infty))\,(\mathcal{F}_m^\sigma \subset \mathcal{H}_m)\,, \tag{4}$$

$$(\forall m \in [1:\infty))\,(\forall \sigma \in [m:\infty))\,(\mathcal{F}_m^\sigma = \mathcal{H}_m) \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем включения (4), т. е. $K \in \mathcal{F}_m^\sigma \Rightarrow K \in \mathcal{H}_m$. Если $K \in \mathcal{F}_m^\sigma$, то $K = K(x)$ определяется формулой (3). При любом $i \in [1:l]$ расширение каждого из одноэлементных множеств $\{\varphi_i\}$ (см. п. 1.4) запишем в виде множества $\{\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n(i)}\}$, а соответствующую полиномиальную систему – в форме системы скалярных уравнений

$$\partial\varphi_{i,\nu}/\partial x_j = \Phi_{i,\nu}^j(\varphi^i, \alpha), \quad \nu \in [1:n(i)], j \in [1:\sigma] \tag{6}$$

относительно компонент вектор-функции $\varphi^i = (\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n(i)})$. Из (3), (6) следует, что в качестве $\psi_1, \ldots, \psi_k$ из определения $K \in \mathcal{H}_m$ можно взять все функции множества

$$\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\} = \left\{\varphi_{\Lambda(r),\nu}(K_{\Omega(1,r)}, \ldots, K_{\Omega(\sigma,r)})\,|r \in \Gamma,\ \nu \in [1:n(\Lambda(r))]\right\}.$$

Тем самым включения (4) доказаны. Чтобы доказать равенства (5), остается показать, что $(\forall m \in [1:\infty))\,(\forall \sigma \in [m:\infty))\,(\mathcal{F}_m^\sigma \supset \mathcal{H}_m)$. Если использовать обозначения $\psi_{k+i} = x_i$, $\Psi_{r,i}(\psi_1, \ldots, \psi_{k+m}) = \delta_{r-k}^i$, $i \in [1:m]$, $r \in [k+1:k+m]$ (δ_p^q – символ Кронекера), то из $K \in \mathcal{H}_m$ следует, что $K(x) = P(\psi_1, \ldots, \psi_{k+m})$ и $\partial\psi_r/\partial x_i = \Psi_{r,i}(\psi_1, \ldots, \psi_{k+m})$, $i \in [1:m]$, $r \in [1:k+m]$. Так как P – полином по своим аргументам, а из последних равенств вытекает, что $\varphi_1 = \psi_1, \ldots, \varphi_l = \psi_{k+m} \in \Sigma_m$, то $K \in \mathcal{F}_m^m$, и (так как $\mathcal{F}_m^m \subset \mathcal{F}_m^{m+1} \subset \ldots$) тем самым доказаны равенства (5). Что и требовалось.

1.7. Классы уравнений $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m)$,$\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$. Из определения $\mathcal{H}_m$ следует, что система (1) принадлежит классу $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m)$ тогда и только тогда, когда найдется какое-то число k скалярных функций $\psi_1(x),\ldots,\psi_k(x)$ таких, что $f_1^1,\ldots,f_m^s$, $\partial\psi_1/\partial x_1,\ldots,\partial\psi_k/\partial x_m$ можно представить в виде

$$f_i^j(x)=P_i^j(\psi_1,\ldots,\psi_k,x),\quad \partial\psi_r/\partial x_i=\Psi_{r,i}(\psi_1,\ldots,\psi_k,x),$$
$$i\in[1:m],\;\; j\in[1:s],\;\; r\in[1:k], \tag{7}$$

где функции $P_i^j,\Psi_{r,\,i}$ являются алгебраическими полиномами по $\psi_1,\ldots,\psi_k,x_1,\ldots,x_m$.

Система (1) принадлежит классу $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$ тогда и только тогда, когда $f_i^j\in\mathcal{F}_m^\sigma$ при любых $i\in[1:m]$, $j\in[1:s]$, т. е. когда каждую функцию f_i^j можно получить как последний член последовательности $f_{i,\,r}^j,\; r=1,\ldots,p_i^j$, определяемой формулами

$$f_{i,\,r}^j=x_r,\;\; r\in[1:m];$$
$$f_{i,\,m+r}^j=\begin{cases}\varphi_{\Lambda_i^j(r)}(f_{i,\Omega_i^j(1,\,r)}^j,\ldots,f_{i,\Omega_i^j(\sigma,\,r)}^j),\; r\in\Gamma_i^j\\ Q_{i,\,r}^j(f_{i,\,1}^j,\ldots,f_{i,\,m+r-1}^j),\qquad r\in\Gamma_i^{j\,\prime}\end{cases},\quad r\in[1:p_i^j]; \tag{8}$$
$$f_i^j=f_{i,\,m+p_i^j}^j,\quad i\in[1:m],\quad j\in[1:s],$$

здесь $\varphi_1,\ldots,\varphi_l\in\Sigma_\sigma$, $\Lambda_i^j(r)\in[1:l]$, $\Omega_i^j(1,r),\ldots,\Omega_i^j(\sigma,r)\in[1:m+r-1]$, $\Gamma_i^j\cup\Gamma_i^{j\,\prime}=[1:p_i^j]$, $\Gamma_i^j\cap\Gamma_i^{j\,\prime}=\emptyset$, а l,p_i^j – некоторые натуральные числа.

Предложение 1.2. Для классов $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m)$, $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$ истинны формулы

$$(\forall m,\sigma\in[1:\infty))\,(\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)\subset\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m))\,, \tag{9}$$

$$(\forall m\in[1:\infty))\,(\forall\sigma\in[m:\infty))\,(\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)=\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m))\,. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предложения 1.1.

2. Метод дополнительных переменных.

2.1. Формулировка МДП. Этот метод [2] (см. также [3–5]) позволяет сводить систему вида (1) к полиномиальной. Он заключается в том, что находят такой набор дополнительных переменных – функций $x_{m+1}(x_1,\ldots,x_m),\ldots,x_{m+k}(x_1,\ldots,x_m)$, который удовлетворяет условиям:

(a) правые части уравнений (1) – полиномы по $x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k}$;

(b) все производные $dx_{m+l}/dt_j=\sum_{i=1}^m f_i^j(x,\alpha)\,\partial x_{m+l}/\partial x_i$ дополнительных переменных $x_{m+1},\ldots,\,x_{m+k}$, в силу уравнений (1), также полиномы по $x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k}$.

В этом случае, как легко проверить, переменные $x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k}$ удовлетворяют некоторой полиномиальной системе.

2.2. Метод Пуанкаре. Он был предложен для автономных ОДУ вида (2) и состоит в том, что находят такую одну дополнительную переменную $z=z(x_1,\ldots,x_m)$ и полином $F(x_1,\ldots,x_m,z)$, которые удовлетворяют условиям:

(α) правые части уравнений (2) – полиномы по переменным $x_1,\ldots,x_m,z$;

(β) равенство $F(x_1,\ldots,x_m,z(x_1,\ldots,x_m))=0$ выполняется тождественно.

Тогда, если ввести новое «время» по формуле $dt = (\partial F/\partial z)\,d\tau$, то переменные $x_1, \dots, x_m, z$ удовлетворяют некоторой полиномиальной системе ОДУ. Отметим, что метод Пуанкаре не является частным случаем МДП.

2.3. Обобщенный метод. Используя идею метода Пуанкаре, можно получить обобщение МДП и метода Пуанкаре, которое заключается в том, что находят такие дополнительные переменные – функции $x_{m+1}(x_1, \dots, x_m, t), \dots, x_{m+k}(x_1, \dots, x_m, t)$ и полиномы $F_1(x_1, \dots, x_{m+k}), \dots, F_k(x_1, \dots, x_{m+k})$, которые удовлетворяют условиям:

(α^*) правые части уравнений (1) – полиномы по переменным $x_1, \dots, x_{m+k}$;

(β^*) равенства $F_1(x_1, \dots, x_{m+k}) = 0, \dots, F_k(x_1, \dots, x_{m+k}) = 0$ выполняются тождественно, и

$$J(x_1, \dots, x_{m+k}) = \det \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_{m+1} & \dots & \partial F_k/\partial x_{m+k} \\ \dots & & \\ \partial F_1/\partial x_{m+1} & \dots & \partial F_k/\partial x_{m+k} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда, если ввести новое «время» τ по формуле $dt = J(x_1, \dots, x_{m+k})\,d\tau$, то переменные $x_1, \dots, x_{m+k}$ удовлетворяют некоторой полиномиальной системе.

Ясно, что МДП и метод Пуанкаре – частные случаи этого обобщенного метода: к МДП он сводится при $J(x_1, \dots, x_{m+k}) = 1$, а к методу Пуанкаре — при $k = s = 1$.

Вместе с тем, если выполнены условия (α^*), (β^*), то, введя еще одну дополнительную переменную $x_{m+k+1} = 1/J$, можно заметить, что относительно переменных $x_1, \dots, x_{m+k+1}$ выполнены свойства (a), (b). Это означает, что *если к уравнениям* (1) *применим обобщенный метод дополнительных переменных, то применим и МДП*, рассмотрением которого (как более простого и не требующего введения нового «времени») естественно и ограничиться.

2.4. Применимость МДП к системам классов $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m)$. Она почти очевидна. Действительно, если система (1) принадлежит классу $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m)$, то это означает, что существуют функции $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$, удовлетворяющие равенствам (7), и если положить $x_{m+1} = \psi_1(x), \dots, x_{m+k} = \psi_k(x)$, то условия (a), (b) п. 2.1 будут выполнены. МДП для класса $\mathcal{E}^1(\mathcal{H}_m)$ был предложен в [2] (само такое обозначение там не использовалось).

2.5. Применение МДП к системам из $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$. Из включения $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma) \subset \mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m)$ следует, что МДП применим к системам класса $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$. Используя идею доказательства предложения 1.1, покажем теперь, как любую систему данного класса свести к полиномиальной системе, а точнее – как найти функции $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$, удовлетворяющие условиям (7), если правые части уравнений (1) заданы равенствами (8). Для этого при любом $i \in [1:l]$ расширение каждого из одноэлементных множеств $\{\varphi_i\}$ (см. п. 1.4) запишем в виде множества $\{\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,n(i)}\}$, а соответствующую полиномиальную систему – в форме системы скалярных уравнений (6) относительно компонент вектор-функции $\varphi^i = (\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,n(i)})$. Из формул (6), (8) следует, что в качестве функций $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$, удовлетворяющих условиям (7), можно взять все функции множества

$$\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^k = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^s \Big\{ \varphi_{\Lambda_i^j(r),\nu}(f^j_{i,\Omega_i^j(1,r)}, \dots, f^j_{i,\Omega_i^j(\sigma,r)}) \Big| r \in \Gamma_i^j,\ \nu \in [1:n(\Lambda_i^j(r))] \Big\}. \quad (11)$$

2.6. Об автоматизации МДП для систем класса $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$. Введем понятие библиотеки, на котором могут быть основаны естественным образом алгоритмы, автоматизирующие сведение уравнений (1) классов $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$ и $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m) = \mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^m)$

(см. (9), (10)) к полиномиальным системам. Будем считать заданной некоторую полиномиальную систему скалярных дифференциальных уравнений

$$\partial\varphi_i/\partial x_j = \Phi_i^j(\varphi,\alpha),\ \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l),\ i\in[1:l],\ j\in[1:\sigma] \tag{12}$$

относительно компонент вектор-функции $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$. Если $D(\varphi)$ обозначает систему (12), то пару $L(\varphi) = (\varphi, D(\varphi))$ будем называть библиотекой функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ класса Σ_σ, заданной уравнениями $D(\varphi)$, или просто библиотекой (т. е. конкретная библиотека состоит из определенного набора функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ и конкретной полиномиальной системы дифференциальных уравнений, имеющей в качестве одного из своих решений вектор-функцию $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$). В частности, библиотеку можно задать, добавив к ее уравнениям $D(\varphi)$ начальные условия, – тем самым будет определена и вектор-функция $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$. Если задана некоторая конкретная библиотека, а правые части системы (1) выражаются по формулам вида (8) через некоторые из функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ этой библиотеки, то все необходимые дополнительные переменные метода МДП определяются как элементы множества вида (11). Ясно, что, опираясь на приведенные выше формулы, можно написать программу, реализующую МДП настолько универсально, чтобы система (12) была одним из задаваемых пользователем ее аргументов.

3. Примеры. Применение МДП как к модельным, так и к важным реальным задачам Коши для ОДУ можно посмотреть, например, в работах [2–8]. Здесь же приведены три модельных примера уравнений различных классов $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$ (а именно, классов $\mathcal{E}^1(\mathcal{F}_1^3)$, $\mathcal{E}^1(\mathcal{F}_3^3)$, $\mathcal{E}^3(\mathcal{F}_m^3)$), в которых используются и полные системы уравнений в частных производных, что, как легко заметит читатель, существенно расширяет возможности МДП для случая ОДУ и иллюстрирует его применимость к полным системам уравнений в частных производных. Ради краткости, во всех этих примерах используется одна и та же библиотека (см. п. 2.6) функций одной и трех переменных.

Библиотека. Рассмотрим функции $\varphi_1 = \sin x,\ \varphi_2 = \cos x$ и функцию φ_3 (которую естественно назвать функцией Гильберта), определяемую равенствами

$$\varphi_3^7(x_1,x_2,x_3) + x_3\varphi_3^3(x_1,x_2,x_3) + x_2\varphi_3^2(x_1,x_2,x_3) + x_1\varphi_3(x_1,x_2,x_3) + 1 = 0,$$

$$\varphi_3(0,0,0) = -1.$$

Вводя еще одну функцию

$$\varphi_4(x_1,x_2,x_3) = \left(7\varphi_3^6(x_1,x_2,x_3) + 3x_3\varphi_3^2(x_1,x_2,x_3) + 2x_2\varphi_3(x_1,x_2,x_3) + x_1\right)^{-1},$$

видим, что функции $\varphi_1,\ \varphi_2, \varphi_3,\ \varphi_4$ удовлетворяют полиномиальной задаче Коши

$$\begin{array}{l} d\varphi_1/dx = \varphi_2,\ d\varphi_2/dx = -\varphi_1, \\ \partial\varphi_3/\partial x_j = -\varphi_3^j\cdot\varphi_4,\ \ j = 1,2,3, \\ \partial\varphi_4/\partial x_j = \left(42\varphi_3^5 + 6x_3\varphi_3 + 2x_2\right)\varphi_3^j\cdot\varphi_4^3 - j\varphi_3^{j-1}\varphi_4^2, \\ \varphi_1(0) = 0,\ \varphi_2(0) = 1,\ \varphi_3(0,0,0) = -1\ ,\ \varphi_4(0,0,0) = 1/7, \end{array}$$

и она определяет библиотеку $L(\varphi) = L(\varphi_1,\ \varphi_2, \varphi_3,\ \varphi_4)$, которую далее используем.

Пример 1. Задача Коши для ОДУ. Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$dx/dt = a\sin\varphi_3(x,x^2,x^3) + b\cos\varphi_3(x,x^2,x^3), \tag{13}$$

$$x(0) = 0, \tag{14}$$

где a, b – вещественные параметры. Правая часть уравнения (13) принадлежит классу функций $\mathcal{E}^1(\mathcal{F}_1^3)$, поэтому, в соответствии с (11), введем дополнительные переменные

$$\psi_1 = \varphi_3(x, x^2, x^3),\ \psi_2 = \varphi_4(x, x^2, x^3),\ \psi_3 = \sin\varphi_3(x, x^2, x^3),\ \psi_4 = \cos\varphi_3(x, x^2, x^3)$$

и подробно распишем получение их полных производных по t в силу этого уравнения:

$$\begin{aligned}&d\psi_1/dt = \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(\partial\varphi_3/\partial x_j\right)_{x_1=x,\, x_2=x^2,\, x_3=x^3} \cdot jx^{j-1} \cdot dx/dt =\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(-\varphi_3^j \cdot \varphi_4\right)_{x_1=x, x_2=x^2, x_3=x^3} \cdot jx^{j-1} \cdot dx/dt = -\textstyle\sum_{j=1}^3 jx^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot dx/dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&d\psi_2/dt = \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(\partial\varphi_4/\partial x_j\right)_{x_1=x,\, x_2=x^2,\, x_3=x^3} \cdot jx^{j-1} \cdot dx/dt =\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(\left(42\varphi_3^5 + 6x_3\varphi_3^+ 2x_2\right)\varphi_3^j \cdot \varphi_4^3 - j\varphi_3^{j-1}\varphi_4^2\right)_{x_1=x,\, x_2=x^2,\, x_3=x^3} \cdot jx^{j-1} \cdot dx/dt =\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^3 jx^{j-1} \cdot \left(\left(42\psi_1^5 + 6x^3\psi_1^+ 2x^2\right)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\right) \cdot dx/dt,\end{aligned}$$

$$d\psi_3/dt = \cos\varphi_3(x, x^2, x^3) \cdot d\varphi_3(x, x^2, x^3)/dt = \psi_4 \cdot d\psi_1/dt,$$

$$d\psi_4/dt = -\sin\varphi_3(x, x^2, x^3) \cdot d\varphi_3(x, x^2, x^3)/dt = -\psi_3 \cdot d\psi_1/dt.$$

Теперь можно переписать (13), (14) в форме полиномиальной задачи Коши:

$$\begin{aligned}&dx/dt = a\psi_3 + b\psi_4,\quad d\psi_1/dt = -\textstyle\sum_{j=1}^3 jx^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot dx/dt,\\ &d\psi_2/dt = \textstyle\sum_{j=1}^3 jx^{j-1} \cdot \left(\left(42\psi_1^5 + 6x^3\psi_1^+ 2x^2\right)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\right) \cdot dx/dt,\\ &d\psi_3/dt = \psi_4 \cdot d\psi_1/dt,\quad d\psi_4/dt = -\psi_3 \cdot d\psi_1/dt,\end{aligned}$$

$$x(0) = 0,\ \psi_1(0) = -1,\ \psi_2(0) = 1/7,\ \psi_3(0) = -\sin 1,\ \psi_4(0) = \cos 1.$$

Пример 2. Задача Коши для системы ОДУ. Рассмотрим задачу Коши

$$dx_i/dt = a_i \sin\varphi_3(x_1, x_2, x_3) + b_i \cos\varphi_3(x_1, x_2, x_3), \tag{15}$$

$$x_i(0) = 0, \quad i \in [1:3], \tag{16}$$

где $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$, $b_i = b_i(x_1, x_2, x_3)$ – алгебраические полиномы. Правые части уравнений (15) принадлежат классу функций $\mathcal{E}^1(\mathcal{F}_3^3)$, поэтому, в соответствии с (11), введем дополнительные переменные

$$\psi_1 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3),\ \psi_2 = \varphi_4(x_1, x_2, x_3),\ \psi_3 = \sin\varphi_3(x_1, x_2, x_3),\ \psi_4 = \cos\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$$

и получим их полные производные по t в силу этих уравнений:

$$\begin{aligned}&d\psi_1/dt = \textstyle\sum_{j=1}^3 \partial\varphi_3/\partial x_j \cdot dx_j/dt = -\textstyle\sum_{j=1}^3 \varphi_3^j \cdot \varphi_4 \cdot dx_j/dt =\\ &= -\textstyle\sum_{j=1}^3 x^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot dx_j/dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&d\psi_2/dt = \textstyle\sum_{j=1}^3 \partial\varphi_4/\partial x_j \cdot dx_j/dt =\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(\left(42\varphi_3^5 + 6x_3\varphi_3^+ 2x_2\right)\varphi_3^j \cdot \varphi_4^3 - j\varphi_3^{j-1}\varphi_4^2\right) \cdot dx_j/dt =\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(\left(42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1^+ 2x_2\right)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\right) \cdot dx_j/dt,\end{aligned}$$

$$d\psi_3/dt = \cos\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \cdot d\varphi_3(x_1, x_2, x_3)/dt = \psi_4 \cdot d\psi_1/dt,$$

$$d\psi_4/dt = -\sin\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \cdot d\varphi_3(x_1, x_2, x_3)/dt = -\psi_3 \cdot d\psi_1/dt.$$

Перепишем, наконец, (15), (16) в искомой форме полиномиальной задачи Коши:

$$\begin{aligned}
&dx_i/dt = a_i\,\psi_3 + b_i\,\psi_4,\ i \in [1:3],\quad d\psi_1/dt = -\textstyle\sum_{j=1}^{3} \psi_1^j \psi_2 \cdot dx_j/dt,\\
&d\psi_2/dt = \textstyle\sum_{j=1}^{3} \Big(\big(42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2\big)\,\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\Big) \cdot dx_j/dt,\\
&d\psi_3/dt = \psi_4 \cdot d\psi_1/dt,\quad d\psi_4/dt = -\psi_3 \cdot d\psi_1/dt,
\end{aligned}$$

$$x_i(0) = 0,\quad i \in [1:3];\quad \psi_1(0) = -1,\ \psi_2(0) = 1/7,\ \psi_3(0) = -\sin 1,\ \psi_4(0) = \cos 1.$$

Пример 3. Задача Коши для полной системы. Рассмотрим задачу Коши

$$\partial x_i/\partial t_j = a_{ij} \sin\varphi_3(x_1, x_2, x_3) + b_{ij} \cos\varphi_3(x_1, x_2, x_3), \tag{17}$$

$$x_i(0,0,0) = 0,\quad i \in [1:m],\quad j \in [1:3],$$

где $a_{i,j} = a_{i,j}(x_1, \ldots, x_m)$, $b_{i,j} = b_{i,j}(x_1, \ldots, x_m)$ – алгебраические полиномы. Правые части уравнений (17) принадлежат классу функций $\mathcal{E}^3(\mathcal{F}_m^3)$, поэтому, в соответствии с (11), введем дополнительные переменные

$$\psi_1 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3),\ \psi_2 = \varphi_4(x_1, x_2, x_3),\ \psi_3 = \sin\varphi_3(x_1, x_2, x_3),\ \psi_4 = \cos\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$$

и получим их производные по t_j в силу этих уравнений:

$$\begin{aligned}
&\partial\psi_1/\partial t_j = \textstyle\sum_{k=1}^{3} \partial\varphi_3/\partial x_k \cdot \partial x_k/\partial t_j = -\sum_{k=1}^{3} \varphi_3^k \cdot \varphi_4 \cdot \partial x_k/\partial t_j =\\
&= -\textstyle\sum_{k=1}^{3} \psi_1^k \psi_2 \cdot \partial x_k/\partial t_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial\psi_2/\partial t_j = \textstyle\sum_{k=1}^{3} \partial\varphi_4/\partial x_k \cdot \partial x_k/\partial t_j =\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \big(\big(42\varphi_3^5 + 6x_3\varphi_3 + 2x_2\big)\,\varphi_3^k \cdot \varphi_4^3 - k\varphi_3^{k-1}\varphi_4^2\big) \cdot \partial x_k/\partial t_j =\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \big(\big(42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2\big)\,\psi_1^k\psi_2^3 - k\psi_1^{k-1}\psi_2^2\big) \cdot \partial x_k/\partial t_j,
\end{aligned}$$

$$\partial\psi_3/\partial t_j = \cos\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \cdot \partial\varphi_3(x_1, x_2, x_3)/\partial t_j = \psi_4 \cdot \partial\psi_1/\partial t_j,$$

$$\partial\psi_4/\partial t_j = -\sin\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \cdot \partial\varphi_3(x_1, x_2, x_3)/\partial t_j = -\psi_3 \cdot \partial\psi_1/\partial t_j.$$

Итак, получили следующую полиномиальную задачу Коши:

$$\partial x_i/\partial t_j = a_{ij}\psi_3 + b_{ij}\,\psi_4,\ i \in [1:m];\ \partial\psi_1/\partial t_j = -\textstyle\sum_{k=1}^{3} \psi_1^k\psi_2 \cdot \partial x_k/\partial t_j,$$

$$\partial\psi_2/\partial t_j = \textstyle\sum_{k=1}^{3} \big(\big(42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2\big)\,\psi_1^k\psi_2^3 - k\psi_1^{k-1}\psi_2^2\big) \cdot \partial x_k/\partial t_j,$$

$$\partial\psi_3/\partial t_j = \psi_4 \cdot \partial\psi_1/\partial t_j,\quad \partial\psi_4/\partial t_j = -\,\psi_3 \cdot \partial\psi_1/\partial t_j,\ j \in [1:3],$$

$$x_i(0,0,0) = 0,\ i \in [1:m];$$

$$\psi_1(0,0,0) = -1,\ \psi_2(0,0,0) = 1/7,\ \psi_3(0,0,0) = -\sin 1,\ \psi_4(0,0,0) = \cos 1.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Начальные данные в рассмотренных примерах были специально согласованы с начальными данными в библиотеке, чтобы не отвлекать читателя деталями, которые являются хотя и важными, но техническими при реализации МДП.

Заключение. Метод Пуанкаре, который был рассмотрен в п. 2.2, был предложен им в гл. XVI [1], причем в самом ее начале (в русском варианте книги) есть утверждение (видимо, описка), вызвавшая возражение редактора. Смысл этого утверждения в том, что всякое автономное ОДУ второго порядка и первой степени может быть приведено к полиномиальной системе. Эта описка исправляется в гл. XVII: «Мы видели, что всякое дифференциальное уравнение, [при известных условиях], может быть представлено в форме $dx_1/dt = X_1, \ldots, dx_n/dt = X_n$, где все X_i – целые многочлены» [1, с. 210]. Настоящая статья и была посвящена получению упомянутых в скобках условий для достаточно общих классов систем дифференциальных уравнений $\mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^\sigma)$ и $\mathcal{E}^s(\mathcal{H}_m) = \mathcal{E}^s(\mathcal{F}_m^m)$. Можно с уверенностью сказать, что ее результаты позволяют создавать алгоритмы, реализующие общий МДП, который можно использовать для создания различных универсальных компьютерных программ приближенного решения дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / пер. с франц. М.: ОГИЗ, 1947. 392 с.

2. *Бабаджанянц Л. К.* Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики // Труды Ин-та теор. астрономии АН СССР. 1978. Вып. XII. С. 3–45.

3. *Babadzanjanz L. K.* Existence of the continuations of the N-body problem // Celestial Mechanics. 1979. N 20. P. 43–57.

4. *Babadzanjanz L. K.* On the global solution of the N-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1993. N 56. P. 427–449.

5. *Babadzanjanz L., Sarkissian D.* Taylor series method for dynamical systems with control // J. of Math. Scienses. New York: Springer, 2006. Vol. 139, N 6. P. 7025–7046.

6. *Чернышева Н. А.* Метод вычисления возмущений в поле вращающегося тела // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1987. Вып. 4. С. 83–89.

7. *Бабаджанянц Л. К., Чекашкин Ю. В.* Аналитический метод вычисления возмущений в координатах планет // Вестн. Ленингр. ун–та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1990. Вып. 3. С. 101–107.

8. *Carothers D. C., Parker G. E., Sochacki J. S., Warne P. G.* Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2005. Vol. 2005, N 40. P. 1–17.

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья принята к печати 24 сентября 2009 г.