АСТРОНОМИЯ

УДК 521.1

Л. К. Бабаджанянц, Ю. В. Чекашкин

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КООРДИНАТАХ ПЛАНЕТ

Предлагается новый метод вычисления возмущений в прямоугольных координатах планет, использующий априорно лишь упрощенное разложение главной части пертурбационной функции — более точное разложение получается вместе с приближениями шаг за шагом.

1. Введение. Рассматривается полиномиальная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), получаемая из уравнений задачи N тел в относительной прямоугольной системе кординат введением дополнительных переменных (в качестве дополнительных переменных используются все обратные расстояния). Полиномиальная система имеет ряд очевидных преимуществ по сравнению с исходной, но при решении ее известными методами могут возникнуть какие-то новые проблемы. В связи с применением метода малого параметра возникают две такие проблемы — необходимость получения решения новых уравнений в вариациях и выбора начального приближения для дополнительных переменных. Они решаются в пунктах 2 и 3 соответственно.

Будем использовать следующие обозначения: $m_1, \ldots, m_N$ — массы материальных точек $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N$, движущихся под действием взаимного притяжения по закону Ньютона; K — постоянная Гаусса; g_{ip} ($p=1, 2, 3$) — координаты i-й точки ($i=1, \ldots, N$) в прямоугольной системе координат с центром в $\mathcal{M}_1$ и осями, параллельными осям некоторой инерциальной системы (относительная система координат); t_0 — фиксированный момент времени; $g_{ip0}=g_{ip}(t_0)$ — начальные данные (в частности, $g_{1p0}=0$).

Пусть, кроме того,

$$\mu_i=K(m_1+m_i),\quad r_i=\left(\sum_{p=1}^{3} g_{ip}^2\right)^{1/2},\quad r_{i0}=\left(\sum_{p=1}^{3} g_{ip0}^2\right)^{1/2},$$

$$\Delta_{ij}=\left(\sum_{p=1}^{3}(g_{jp}-g_{ip})^2\right)^{1/2},\ \Delta_{ij0}=\left(\sum_{p=1}^{3}(g_{jp0}-g_{ip0})^2\right)^{1/2}.$$

2. Уравнения движения и выбор промежуточного решения. Обращаясь к уравнениям задачи N тел в относительных кординатах (см. выше) и вводя дополнительные переменные $u_{0i}=r_i^{-1}$, $u_{ij}=\Delta_{ij}^{-1}$ ($i, j=1, \ldots, N$; $i\neq j$), приходим к следующей полиномиальной системе:

$$\ddot{g}_{ip}=-\mu_i g_{ip}u_{0i}^3+K^2\sum_{j=1}^{N} m_j\left((g_{jp}-g_{ip})\,u_{ij}^3-g_{jp}u_{0j}^3\right),$$

$$\dot{u}_{0i} = -u_{0i}^3 \sum_{p=1}^{3} g_{ip}\dot{g}_{ip}, \tag{1}$$

$$\dot{u}_{ij} = -u_{ij}^3 \sum_{p=1}^{3} (g_{jp}-g_{ip})(\dot{g}_{jp}-\dot{g}_{ip}).$$

Ее решение удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} &g_{ip}(t_0) = g_{ip0}, \quad \dot{g}_{ip}(t_0) = \dot{g}_{ip0}, \\ &u_{0i}(t_0) = u_{0i0} = (r_{i0})^{-1}, \\ &u_{ij}(t_0) = u_{ij0} = (\Delta_{ij0})^{-1}. \end{aligned} \tag{1'}$$

В качестве начального приближения для переменных g_{ip}, u_{0i} выбираем решение задачи двух тел, описывающее движение по кеплеровскому эллипсу. Будем использовать следующие обозначения: $\overset{0}{g}_{ip}$ — прямоугольные координаты в движении по оскулирующему в эпоху t_0 эллипсу,

$$r_i^0 = \left(\sum_{p=1}^{3} g_{ip}^{02}\right)^{1/2}, \quad u_{0i}^0 = (r_i^0)^{-1}, \quad \Delta_{ij}^0 = \left(\sum_{p=1}^{3} (g_{jp}^0 - g_{ip}^0)^2\right)^{1/2}.$$

В качестве начального приближения для дополнительных переменных u_{ij} выбираем отрезок тригонометрического ряда

$$T_{ij} = \sum_{-e}^{e}\sum_{-e}^{e} \tau_{km}^{(ij)} e^{i(kM_i + mM_j)}, \tag{2}$$

являющийся подходящим приближением для величины $(\Delta_{ij}^0)^{-1}$, причем предполагается, что

$$T_{ij}\big|_{t=t_0} = u_{ij0}. \tag{3}$$

Здесь M_i — средняя аномалия в движении i-го тела по своему оскулирующему в эпоху t_0 эллипсу, а коэффициенты $\tau_{km}^{(ij)}$ далее считаются известными.

Теперь вместо системы (1) рассмотрим следующую систему с малым параметром ε:

$$\ddot{g}_{ip} = -\mu_i g_{ip} u_{0i}^3 + \varepsilon K^3 \sum_{j=1}^{N} m_j \left[(g_{jp}-g_{ip})u_{ij}^3 - g_{jp}u_{0j}^3\right],$$

$$\dot{u}_{0i} = -u_{0i}^3 \sum_{p=1}^{3} g_{ip}\dot{g}_{ip}, \tag{4}$$

$$\dot{u}_{ij} = -u_{ij}^3 \sum_{p=1}^{3} (g_{jp}-g_{ip})(\dot{g}_{jp}-\dot{g}_{ip}) + \varphi_{ij}(t) - \varepsilon\varphi_{ij}(t),$$

где

$$\varphi_{ij}(t) = \dot{T}_{ij}(t) + T_{ij}^3 \sum_{p=1}^{3} (g_{jp}^0 - g_{ip}^0)(\dot{g}_{jp}^0 - \dot{g}_{ip}^0). \tag{5}$$

Задача Коши (4), (1′) при $\varepsilon=1$ совпадает с задачей (1), (1′), а при $\varepsilon=0$ ее решение (т. е. решение невозмущенной задачи) есть g_{ip}^0, $\dot{g}_{ip}^0$, u_{0i}^0, T_{ij}.

3. Нахождение возмущений k-го порядка.

3.1. Вывод уравнений для k-го приближения. Решение системы (4) представим в виде

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} \varepsilon^k , \tag{6}$$

где

$$x_i = (g_{ip},\ \dot{g}_{ip},\ u_{0i},\ u_{ij}). \tag{7}$$

Здесь $x_i^{(0)} = (g_{ip}^0,\ \dot{g}_{ip}^0,\ u_{0i}^0,\ u_{ij}^0)$ — решение невозмущенной задачи.

Построим теперь систему ОДУ для $x_i^{(k)} = (g_{ip}^{(k)},\ \dot{g}_{ip}^{(k)},\ u_{0i}^{(k)},\ u_{ij}^{(k)})$. Подставляя (6) в (4) и приравнивая коэффициенты при ε^k, получим

$$\ddot{g}_{ip}^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3} g_{ip}^{(k)} = -3\mu_i g_{ip}^0 r_i^{0-2} u_{0i}^{(k)} + \overline{G}_{ip}^{(k)}, \tag{8.1}$$

$$\dot{u}_{0i}^{(k)} + 3u_{0i}^{(k)} r_i^{0-2} \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0 \dot{g}_{ip}^0 + r_i^{0-3} \sum_{p=1}^{3} (\dot{g}_{ip}^0 g_{ip}^{(k)} + g_{ip}^0 \dot{g}_{ip}^{(k)}) = H_i^{(k)}, \tag{8.2}$$

$$\dot{u}_{ij}^{(k)} + 3\, T_{ij}^2 u_{ij}^{(k)} \sum_{p=1}^{3} (g_{jp}^0 - g_{ip}^0)(\dot{g}_{jp}^0 - \dot{g}_{ip}^0) + \delta(1,\ k)\, \varphi_{ij}(t) = F_{ij}^{(k)}, \tag{8.3}$$

где

$$\overline{G}_{ip}^{(k)} = -\mu_i \sum_{|I_3|=k} \left[3 - 2\delta\left(i_1, \frac{i_2}{2}\right)\right] u_{0i}^{(i_1)} \times \left(u_{0i}^{\frac{i_2}{2}}\right)^2 g_{ip}^{(i_3)} + K^2 \sum_{j=1}^{N} m_j \times$$

$$\times \sum_{|I_3|=k-1} \left[3 - 2\delta\left(i_1, \frac{i_2}{2}\right)\right] \left(u_{ij}^{(i_1)} \left(u_{ij}^{\left(\frac{i_2}{2}\right)}\right)^2 (g_{jp}^{(i_3)} - g_{ip}^{(i_3)}) - u_{0j}^{(i_1)} \left(u_{0j}^{\left(\frac{i_2}{2}\right)}\right)^2 g_{jp}^{(i_3)} \right); \tag{9.1}$$

$$H_i^{(k)} = -\sum_{p=1}^{3} \sum_{|I_4|=k} \left[3 - 2\delta\left(i_1, \frac{i_2}{2}\right)\right] u_{0i}^{(i_1)} \left(u_{0i}^{\left(\frac{i_2}{2}\right)}\right)^2 g_{ip}^{(i_3)} \dot{g}_{ip}^{(i_4)}; \tag{9.2}$$

$$F_{ij}^{(k)} = -T_{ij}^3 \sum_{p=1}^{3} \left[(g_{jp}^{(k)} - g_{ip}^{(k)})(\dot{g}_{jp}^0 - \dot{g}_{ip}^0) + (g_{jp}^0 - g_{ip}^0)(\dot{g}_{jp}^{(k)} - \dot{g}_{ip}^{(k)})\right] -$$

$$- \sum_{p=1}^{3} \sum_{|I_4|=k} \left[3 - 2\delta\left(i_1, \frac{i_2}{2}\right)\right] u_{ij}^{(i_1)} \left(u_{ij}^{\left(\frac{i_2}{2}\right)}\right)^2 (g_{jp}^{(i_3)} - g_{ip}^{(i_3)})(\dot{g}_{jp}^{(i_4)} - \dot{g}_{ip}^{(i_4)}). \tag{9.3}$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$\delta(\alpha,\ \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$I_n = (i_1, \ldots, i_n)$, $|I_n| = \sum_{l=1}^{n} i_l$, где $0 \leqslant i_l < k$ для любого l. Кроме того, если в (9.1) — (9.3) $i_2/2$ не есть натуральное число, то $u_{ij}^{(i_2/2)} = u_{0i}^{(i_2/2)} \equiv 0$.

3.2. Вывод и решение уравнений для функции $S^{(k)}$. Следуя идее из работы [1], для нахождения решений уравнений в вариациях (8.1)—(8.2) введем в рассмотрение функцию $S_i^{(k)}$:

$$S_i^{(k)} = \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0 g_{ip}^{(k)},\quad S_{i0}^{(k)} = S_i^{(k)}(t_0) = \sum_{p=1}^{3} g_{ip0} g_{ip0}^{(k)}. \tag{10}$$

Теперь уравнение (8.2) можно переписать в виде

$$\dot{u}_{0i}^{(k)} + r_i^{0-3} \dot{S}_i^{(k)} + 3\, r_i^{0-1} \dot{r}_i^0 u_{0i}^{(k)} = H_i^{(k)},$$

откуда

$$u_{0i}^{(k)} = r_i^{0-3} \left(-(S_i^{(k)} - C_i^{(k)}) + \int_{t_0}^{t} r_i^{03} H_i^{(k)}\, dt \right), \tag{11}$$

где

$$C_i^{(k)} = u_{0i0}^{(k)} r_{i0}^3 + S_{i0}^{(k)}. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (8.1), получаем

$$\ddot{g}_{ip}^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3}\, g_{ip}^{(k)} = 3\mu_i g_{ip}^0\, r_i^{0-5} \left(S_i^{(k)} - C_i^{(k)}\right) + G_{ip}^{(k)}, \tag{13}$$

где

$$G_{ip}^{(k)} = \overline{G}_{ip}^{(k)} + 3\mu_i g_{ip}^0 r_i^{0-5} \int_{t_0}^{t} r_i^{03} H_i^{(k)}\, dt. \tag{14}$$

Перейдем к выводу уравнений для $S_i^{(k)}$. Для этого домножим уравнения (13) на g_{ip} $(p=1, 2, 3)$ и просуммируем их по p. Получим

$$\sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0\, \ddot{g}_{ip}^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3}\, S_i^{(k)} - 3\mu_i r_i^{0-3} \left(S_i^{(k)} - C_i^{(k)}\right) = \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0\, G_{ip}^{(k)}. \tag{15}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{S}_i^{(k)} - 2\sum_{p=1}^{3} \dot{g}_{ip}^0\, \dot{g}_{ip}^{(k)} - \mu_i r_i^{0-3} \left(S_i^{(k)} - 3C_i^{(k)}\right) = \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0\, G_{ip}^{k}. \tag{16}$$

Найдем величину $q_i^{(k)} = \sum\limits_{p=1}^{3} \dot{g}_{ip}^0 \dot{g}_{ip}^{(k)}$. Для этого заметим, что для однородных уравнений в вариациях (13) (т. е. при $G_{i1}^{(k)} = G_{i2}^{(k)} = H_i^{(k)} = G_{i3}^{(k)} = C_i^{(k)} = 0$) величина $q_i^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3} S_i^{(k)}$ есть, как несложно проверить (дифференцируя ее по t и используя (8.1), (10), (11)), первый интеграл. Для случая неоднородных уравнений этот первый интеграл будет функцией времени $B_i(t)$. Найдем ее:

$$\frac{d}{dt}\left(q_i^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3} S_i^{(k)}\right) = -\mu_i r_i^{0-3} \sum_{p=1}^{3} \left(g_{ip}^0\, \dot{g}_{ip}^{(k)} + \dot{g}_{ip}^0\, g_{ip}^{(k)}\right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{3} \left(\dot{g}_{ip}^0\, G_{ip}^{(k)} + 3\mu_i r_i^{0-5}\, g_{ip}^0\, \dot{g}_{ip}^0 \left(S_i^{(k)} - C_i^{(k)}\right)\right) - 3\mu_i r_i^{0-5} \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0\, \dot{g}_{ip}^0 S_i^{(k)} +$$

$$+ \mu_i r_i^{0-3}\, \dot{S}_i^{(k)} = \sum_{p=1}^{3} \dot{g}_{ip}^0\, G_{ip}^{(k)} - 3\mu_i r_i^{0-5}\, C_i^{(k)} \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0\, \dot{g}_{ip}^0,$$

откуда получаем искомую формулу

$$q_i^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3} S_i^{(k)} = B_i(t) = \int \sum_{p=1}^{3} G_{ip}^{(k)} \frac{d}{dv_i} g_{ip}^0\, dv_i + \mu_i C_i^{(k)} \left(r_i^{0-3} - r_{i0}^{-3}\right), \tag{17}$$

где v_i — истинная аномалия в движении i-го тела по своему оскулирующему в эпоху t_0 эллипсу.

Подставляя $q_i^{(k)}$ из (17) в уравнение (16), приходим к искомому уравнению для $S_i^{(k)}$:

$$\ddot{S}_i^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3} \left(S_i^{(k)} + C_i^{(k)}\right) = \left[\mu_i r_{i0}^{-3} \left(2S_{i0}^{(k)} - 2C_i^{(k)}\right) + 2\sum_{p=1}^{3} \dot{g}_{ip0}\, \dot{g}_{ip0}^{(k)}\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0\, G_{ip}^{(k)} + 2\int_{v_{i0}}^{v_i} \sum_{p=1}^{3} G_{ip}^{(k)} \frac{d}{dv_i} g_{ip}^0\, dv_i. \tag{18}$$

Замечание. Уравнение, аналогичное (18), получено ранее в [1, 2] другим, более громоздким способом.

Выпишем решение уравнения (18):

$$S_i^{(k)} = \frac{r_i^0}{\mu_i p_i}\left[Z_i D_i^{(k)} + a_i^{(k)} \sin v_i + b_i^{(k)} \cos v_i + \Psi_i^{(k)}\right] - C_i^{(k)}, \tag{19}$$

где

$$D_i^{(k)} = \left[\mu_i r_{i0}^{-3}\left(2S_{i0}^{(k)} - 2C_i^{(k)}\right) + 2\sum_{p=1}^{3} \dot{g}_{ip0}\, \dot{g}_{ip0}^{(k)}\right], \tag{20}$$

$$Z_i = \int_{v_{i0}}^{v_i} r_i^{03} \sin([v_i] - v_i)\, dv_i,$$

$$a_i^{(k)} = \frac{\mu_i p_i}{r_{i0}}\left(\left(S_{i0}^{(k)} + C_i^{(k)}\right)\frac{\sin v_{i0}}{1 + e_i \cos v_{i0}} + \dot{S}_{i0}^{(k)} \frac{r_{i0}^2 \cos v_{i0}}{\sqrt{\mu_i p_i}}\right),$$

$$b_i^{(k)} = \frac{\mu_i p_i}{r_{i0}}\left(\left(S_{i0}^{(k)} + C_i^{(k)}\right)\frac{e_i + \cos v_{i0}}{1 + e_i \cos v_{i0}} - \dot{S}_{i0}^{(k)} \frac{r_{i0}^2 \sin v_{i0}}{\sqrt{\mu_i p_i}}\right),$$

$$\Psi_i^{(k)} = \int_{v_{i0}}^{v_i}\left\{\sum_{p=1}^{3} g_{ip}^0 G_{ip}^{(k)} + 2\int_{v_{i0}}^{v_i}\sum_{p=1}^{3} G_{ip}^{(k)} \frac{d}{dv_i} g_{ip}^0\, dv_i\right\} r_i^{03} \sin([v_i] - v_i)\, dv_i. \tag{21}$$

Здесь p_i, e_i — соответственно параметр и эксцентриситет кеплеровой орбиты i-го тела; квадратные скобки в выражении $\sin([v_i]-v_i)$ под знаком интеграла означают, что величина в квадратных скобках при интегрировании остается постоянной, а после интегрирования должна быть записана как функция времени. Для Z_i найдем

$$Z_i = (Z_{i1}(t) - Z_{i1}(t_0)) \sin v_i - (Z_{i2}(t) - Z_{i2}(t_0)) \cos v_i, \tag{22}$$

где

$$Z_{i1}(t) = p_i^3\left[\frac{\sin v_i}{2\left(1 - e_i^2\right)(1 + e_i \cos v_i)^2} + \frac{1}{2\left(1 - e_i^2\right)} \cdot \left\{\frac{1 - 2e_2^2}{1 - e_i^2} \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \frac{\sin v_i}{1 + e_i \cos v_i} - \frac{6e_i}{\left(1 - e_i^2\right)\sqrt{1 - e_i^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - e_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} \operatorname{tg}\frac{v_i}{2}\right)\right\}\right];$$

$$Z_{i2}(t) = \frac{p_i^3}{2e_i (1 + e_i \cos v_i)^2}.$$

3.3. Нахождение возмущений прямоугольных координат. После того, как функция $S_i^{(k)}$ найдена, вернемся к уравнению (8.1). Вновь подставляя (11) в (8.1), получаем

$$\ddot{g}_{ip}^{(k)} + \mu_i r_i^{0-3} g_{ip}^{(k)} = Q_{ip}^{(k)}, \tag{23}$$

где

$$Q_{ip}^{(k)} = 3\mu_i g_{ip}^0 r_i^{0-5}\left(S_i^{(k)} - C_i^{(k)}\right) + G_{ip}^{(k)}. \tag{23'}$$

Это уравнение той же структуры, что и (18). Выпишем решение этого уравнения

$$g_{ip}^{(k)} = r_i^0 (\mu_i p_i)^{-1}\left[\int_{v_{i0}}^{v_i} Q_i^{(k)} r_{ip}^{03} \sin([v_i] - v_i)\, dv_i + \gamma_{ip}^{(k)} \sin v_i + \sigma_{ip}^{(k)} \cos v_i\right], \tag{24}$$

где $\gamma_{ip}^{(k)}=\mu_l p_l\left(g_{ip0}^{(k)}\frac{\sin v_{i0}}{p_l}+\dot g_{ip0}^{(k)}\frac{r_{i0}\cos v_{i0}}{\sqrt{\mu_i p_l}}\right)$,

$$\sigma_{ip}^{(k)}=\mu_l p_l\left(g_{ip0}^{(k)}\frac{e_i+\cos v_{i0}}{p_l}-\dot g_{ip0}^{(k)}\frac{r_{i0}\sin v_{i0}}{\sqrt{\mu_i p_l}}\right). \tag{25}$$

Таким образом, нахождение возмущений прямоугольных координат сводится к применению формул (23′) и (24), в которых величины $S_i^{(k)}$, $C_i^{(k)}$, $G_{ip}^{(k)}$ определяются формулами (19), (12), (14), а величины g_{ip}^0, r_i^0 — известные решения задачи двух тел.

Замечание. Для интегрирования в формуле (24) подынтегральные выражения вида $r_i^{0n}\sin\ mv_i$, $r_i^{0n}\cos mv_i$ раскладываются в ряды.

3.4. Решение уравнений (8.3). Рассмотрим уравнение (8.3). Так как уравнение (8.1) не зависит от $u_{ij}^{(k)}$, то при решении (8.3) $g_{ip}^{(k)}$ можем считать известным. Представив все известные величины в (8.3) в виде тригонометрических рядов по средним аномалиям с коэффициентами-полиномами по времени, мы придем к уравнению вида

$$\dot u_{ij}^{(k)}+\psi_{ij}(t)\,u_{ij}^{(k)}=\zeta_{ij}^{(k)}(t), \tag{26}$$

где $\psi_{ij}(t)=\sum\limits_{k=0}\sum\limits_{l}[\varphi_{kl}\cos(kM_i+lM_j)+\psi_{kl}\sin(kM_i+lM_j)]$,

$$\zeta_{ij}^{(k)}(t)=\sum_{l_1=0}\sum_{l_2}\cdots\sum_{l_N}\left[\left(\sum_{m=0}^{\mu}\zeta_{\mathrm{l}m}^{(k)}t^m\right)\cos\left(\sum_{l=1}^{N}l_iM_i\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\nu}\zeta_{\mathrm{l}n}^{(k)}t^n\right)\sin\left(\sum_{l=1}^{N}l_iM_i\right)\right], \tag{27}$$

$$\zeta_{0,\ldots,0,n}^{(k)}=0 \text{ для любого } n,\ \psi_{0,0}=0.$$

Здесь l — векторный индекс: $\mathrm{l}=(l_1,\ldots,l_N)$. Вид ψ_{ij} обусловлен тем, что в (8.3) множитель при $u_{ij}^{(k)}$ разлагается в ряд по средним аномалиям с постоянными коэффициентами.

Решение уравнения (26) будем искать в виде

$$u_{ij}^{(k)}=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_N=-\infty}^{\infty}\left[\left(\sum_{m=0}^{\mu}a_{\mathrm{l}m}^{(k)}t^m\right)\cos\left(\sum_{i=1}^{N}l_iM_i\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\nu}b_{\mathrm{l}n}^{(k)}t^n\right)\sin\left(\sum_{i=1}^{N}l_iM_i\right)\right]. \tag{28}$$

Коэффициенты $a_{\mathrm{l}m}^{(k)}$ и $b_{\mathrm{l}n}^{(k)}$ находятся по рекуррентным формулам (мы их не выписываем здесь), получаемым по методу неопределенных коэффициентов.

Заметим, что для нахождения $g_{ip}^{(k)}$ необходимо знать лишь $u_{ij}^{(l)}$, $l=1,\ldots,k-1$.

4. Заключение. Сформулируем полученные результаты в алгоритмической форме. Решаются уравнения (1), (1′) (планетная задача N тел), решение ищется в виде ряда (6). Величины $x_i^{(k)}$ получаются рекуррентно по $k=1, 2, \ldots$, причем $x^{(k)}$ — известное промежуточное решение (см. п. 2).

4.1. Необходимые исходные постоянные, функции и разложения функций промежуточного движения. Это постоянные K, μ_i, p_i, e_i, $\tau_{kl}^{(ij)}$, функции g_{ip}^0, $\dot g_{ip}^0$, r_i^0 (см. пп. 1, 2) и разложения

$$r_i^{0n}\cos mv_i,\quad r_i^{0n}\sin mv_i \tag{29}$$

в эллиптическом движении (см. [3]).

4.2. Необходимые исходные и промежуточные данные и средства для нахождения k-го приближения. Это исходные величины t_0, v_{i0}, g_{ip0}, g_{ip0}, вычисляемые величины r_{i0}, Δ_{ij0} (см. п. 1), $\varphi_i(t)$ (см. п. 2), $x_i^{(l)}$ $(l=1, \ldots, k-1)$, $H_i^{(k)}$, $G_{ip}^{(k)}$, $F_{ij}^{(k-1)}$, $\Psi_i^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$ (см. пп. 3.1, 3.2), $\gamma_i^{(k)}$, $\sigma_i^{(k)}$, $Q_{ip}^{(k)}$ (см. п. 3.3), используемые процедуры: (I) — перемножение многоаргументных рядов, (II) — вычисление коэффициентов рядов для $u_{ij}^{(k)}$, (III) — интегрирование тригонометрических рядов по средним аномалиям.

4.3. Вычисление k-го приближения.

Шаг 1. Вычисление $u_{ij}^{(k-1)}$:

а) Вычисление $F_{ip}^{(k-1)}$, $p=1, 2, 3$, (см. (9.3)), используется (I).

б) Вычисление $u_{ij}^{(k-1)}$ (см. п. 3.4), используются (I), (II).

Шаг 2. Вычисление $H_i^{(k)}$ (см. (9.2)), $\int\limits_{t_0}^{t} H_i^{(k)} r_i^{03} dt$ (см. (II)), $G_{ip}^{(k)}$ (см. (9.1)), используются (I), (III).

Шаг 3. Вычисление $\Psi_i^{(k)}$ (см. (21)), $\left[\sum\limits_{p=1}^{3} g_{ip}^0 \overline{G}_{ip}^{(k)}\right]_{t=t_0}$ (см. (9.1), так как $G_{ip}^{(k)}|_{t=t_0}=\overline{G}_{ip}^{(k)}|_{t=t_0}$), используются (I), (III), разложения (29).

Шаг 4. Вычисление $S_i^{(k)}$ (см. (19), (20), (21)), и $u_{0i}^{(k)}$ (см. (11), (12),) используется (I).

Шаг 5. Вычисление $Q_{ip}^{(k)}$, $p=1, 2, 3$ (см. (23′)), затем вычисление $g_{ip}^{(k)}$, $p=1, 2, 3$ (см. (24), (25)), используются (I), (III), разложения (29).

Summary

The new method of equations integration of planetary N point-body problem is considered. Its main difference from other planetary methods is that in order to obtain the perturbations one can use simplified approximations for Δ_{ij}^{-1} instead of Fourier series expansions for Δ_{ij}^{-k}, $k=1, 3, 5\ldots$ (Δ_{ij} being the distance between planets).

Литература

1. Бабаджанянц Л. К. // Вестн. Ленингр. ун-та. 1969. № 7. С. 121—132 и № 19. С. 134—145. 2. Бабаджанянц Л. К. // Наблюдение ИНТ. 1971. № 62. С. 5—21. 3. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Т. 2. М.; Л., 1937.

Статья поступила в редакцию 9 октября 1989 г.

УДК 521.1 Вестник ЛГУ. Сер. 1, 1990, вып. 3 (№ 15)

Л. Л. Соколов, В. Б. Титов, К. В. Холшевников

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ДВИЖЕНИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ВБЛИЗИ ЮПИТЕРА

Специфическим свойством Юпитера является наличие у него четырех близких массивных спутников. В настоящей работе рассматриваются некоторые следствия этого факта для неуправляемого движения космического аппарата (КА), обусловленные возможностью тесных сближений с различными спутниками. Рассмотрение ведется в рамках следующей упрощенной модели: Юпитер и галилеевы спутники — шары со сферически-симметричным распределением масс; спутники движутся по круговым орбитам, лежащим в плоскости орбиты Юпитера; КА нулевой массы движется в этой же плоскости только под влиянием притяжения перечисленных небесных тел. Траектория КА исследуется двумя методами: с помощью численного интегрирования уравнений движения и с использованием сфер действия нулевого радиуса. Последний прием достаточно груб, однако позволяет получить обозримые результаты. Как известно, он с успехом применялся при исследовании перелетов Земля—Луна [1]. Метод сфер действия нулевого радиуса предполагает кеплерово йовицентрическое движение КА везде, за исключением точек тесного сближения КА и спутника. КА мгновенно проходит мимо спутника по гиперболе, причем спутникоцентрическая скорость в момент сближения считается скоростью в бесконечно удаленной точке $(-\infty)$. Она скачком преобразуется в скорость в другой бесконечно удаленной точке $(+\infty)$. Таким образом, йовицентрическая скорость в точке сближения преобразуется в спутникоцентрическую скорость, которая поворачивается на некоторый угол, и наконец происходит обратный переход к йовицентрической скорости.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{V}$ — йовицентрическая скорость КА, $\mathbf{U}$ — спутника, $\mathbf{W}=\mathbf{V}-\mathbf{U}$ — спутникоцентрическая скорость КА, α — угол, на который следует повернуть вектор $\mathbf{U}$ до совмещения с $\mathbf{V}$; μ — спутникоцентрическая гравитационная постоянная; ρ — наименьшее расстояние спутник — КА на невозмущенной йовицентрической орбите, δ — угол КА — Юпитер — спутник в момент пересечения КА орбиты спутника; r — собственный радиус, a — радиус орбиты, P — период, m — масса спутника; $\bar{\rho}$ — радиус сферы действия; R, φ — йовицентрические полярные координаты; ψ — угол между асимптотами гиперболы, на который поворачивается вектор спутникоцентрической скорости.

В таблице приведены данные о системе спутников Юпитера, взятые

Спутник	Параметры							
	$m \cdot 10^6$	$a \cdot 10^{-5}$	$\bar{\rho} \cdot 10^{-5}$ км	$2r \cdot 10^{-5}$	$\dot{\varphi}$, $\frac{\text{град}}{\text{сут}}$	φ (авг. 1976, 10.0 ET)	$U \cdot 10^{-5}$ км/сут	$\mu \cdot 10^{-14}$
Ио	47.0	4.22	0.0785	0.035	203°.489	106°.08	15.0	0.422
Европа	25 6	6.71	0.0980	0.031	101°.375	175°.73	11.9	0.241
Ганимед	78.7	10.7	0.244	0.055	50°.318	180°.56	9.38	0.739
Каллисто	56.0	18.8	0.374	0.050	21°.571	84°.46	7.07	0.526

из [2]. Единица массы — масса Юпитера. Радиус Юпитера — $0.71 \cdot 10^5$ км, его гравитационная постоянная $0.94 \cdot 10^{18}$. Как известно [1],

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\frac{\mu}{W\rho}, \tag{1}$$

$$W^2=V^2+U^2-2UV\cos\alpha. \tag{2}$$

Легко получить формулы, преобразующие старые значения V, α, (до сближения) в новые V', α' (после сближения):

$$V'^2=V^2+4U^2\sin^2\frac{\psi}{2}-4UV\sin\frac{\psi}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\psi}{2}\right), \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{V\sin(\alpha+\psi)-U\sin\psi}{V\cos(\alpha+\psi)+U(1-\cos\alpha)}. \tag{4}$$

Рассмотрим возможности гравитационных маневров с использованием спутников с учетом ограничений, накладываемых конечностью ра-