Summary

It is proved the existence of a solution of the system of non-linear reaction-diffusion equations with one-sided flux condition at the boundary. Large time behavior of the solution is discussed.

Литература

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 2. Уральцева Н. Н. Существование сильных решений квазилинейных параболических уравнений с односторонними условиями на границе области // Вестн. Ленингр. ун-та. 1977. № 13. 3. Conway E., Hoff D., Smoller J. Large time behavior of solutions of systems of non-linear reaction-diffusion equations // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 35. N 1.

Статья поступила в редакцию 13 июня 1984 г.

УДК 517.9 Вестник ЛГУ. Сер. 1, 1987, вып. 1 (№ 1)

Л. К. Бабаджанянц, П. Б. Мгоян

ОЦЕНКА ВОЗМУЩЕНИЙ ПО ПРИБЛИЖЕНИЮ

В терминах свойств локального приближения предлагаются достаточные условия продолжаемости функции вещественного аргумента и оценка возмущения. При помощи этих условий и оценок Н. Н. Красовского выводятся необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с однородными полиномиальными правыми частями.

1. Теоремы о продолжении. Результаты настоящего пункта можно считать некоторой схемой применения метода математической индукции для доказательства продолжаемости и оценок глобальных решений различных уравнений в предположении, что известны локальные приближения и оценки.

Пусть U — множество, G — группа с операцией $+$, а $t_0 \in R$, $X_0 \in U$ — постоянные. Будем говорить, что задана система $(\mathscr{E})$, если:

($i1$) заданы функции $\rho : [t_0, +\infty[\times U \to]0, +\infty[$, $r0$: $[t_0, +\infty[\to U$, $r : [t_0, +\infty[\times U \to G$, $rA : \Pi \to G$, $P : G \to R$, $E : \Pi \to R$ при $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, \tau, z) \mid z \in U;\ \tau \in [t_0, +\infty[;\ t \in [\tau, \tau + \rho(\tau, z)[\}$, причем

$$(\forall r^1, r^2 \in G)(P(r^1 + r^2) \leqslant P(r^1) + P(r^2)); \tag{1}$$

($i2$) относительно функции X: $\Pi \to U$ известно, что

$$(\forall \tau \in [t_0, +\infty[)(\forall z \in U)(X(\tau, \tau, z) = z), \tag{2}$$

$$(\forall (t, \tau, z) \in \Pi)(P(r(t, X(t, \tau, z)) - rA(t, \tau, z)) \leqslant E(t, \tau, z)). \tag{3}$$

Для ориентировки отметим, что $X(t, \tau, z)$ можно представлять себе как решение некоторого уравнения (например, ОДУ с начальными данными $\tau \in R$, $z \in C^n$), $\rho(\tau, z)$ — как длину t-промежутка, на котором известно с необходимыми подробностями «локальное приближение» $rA(t, \tau, z)$ величины $r(t, X(t, \tau, z))$, а $E(t, \tau, z)$ — как оценку «нормы» P разности $r(t, X(t, \tau, z)) - rA(t, \tau, z)$ на этом промежутке.

Пусть $K \in [1 : +\infty]$, $t_* \in [t_0, +\infty]$, а символом $[t_0, t_*>$ обозначен один из промежутков $[t_0, t_*]$, $[t_0, t_*[$ при $t_* < +\infty$ и $[t_0, +\infty[$ при $t_* = +\infty$. Будем говорить, что функция Y: $[t_0, t_*> \to U$ удовлетворяет системе $(\mathscr{E})$ (является решением системы $(\mathscr{E})$, является продолжением $X(t, t_0, X_0)$ на $[t_0, t_*>$ в системе $(\mathscr{E})$), если существует неубывающая последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{K}$, такая, что

$$\bigcup_{k=1}^{K}[t_{k-1},\ t_k]=[t_0,\ t_*\rangle,\quad Y(t_0)=X_0,$$

$$(\forall k\in[0:K[)(\forall t\in[t_k,\ t_{k+1}])(Y(t)=X(t,\ t_k,\ Y(t_k))).$$

В частности, функция $Y:[t_0,\ t_0]\to U$, $Y(t_0)=X_0$ есть продолжение $X(t,\ t_0,\ X_0)$ на $[t_0,\ t_0]=\bigcup_{k=1}^{K}[t_{k-1},\ t_k]$ при $K=1$, $t_1=t_0$.

Решение Y будем обозначать также $X(t,\ t_0,\ X_0)$. Оно, вообще говоря, не единственно. Чтобы его конкретизировать, достаточно указать последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{K}$, поэтому будем также говорить о $\{t_k\}_{k=0}^{K}$-продолжении $X(t,\ t_0,\ X_0)$ или продолжении $X(t,\ t_0,\ X_0)$ на $\bigcup_{k=1}^{K}[t_{k-1},\ t_k]$. При этом упомянутое выше продолжение $Y:[t_0,\ t_0]\to U$ будем называть $\{t_k\}_{k=0}^{0}$-продолжением.

Наша цель — получить в терминах свойств $rA(t,\tau,z)$ достаточные условия существования продолжения $X(t,t_0,X_0)$ по t на $[t_0,t_*\rangle$ и оценку возмущения $r(t,X(t,t_0,X_0))-ro(t)$.

Пусть $X^{(k)}\overset{\mathrm{def}}{=}X(t_k,\ t_0,\ X_0)$. Введем в рассмотрение условия:

($i3$) существуют вещественная неубывающая последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ и вещественная последовательность $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, такие, что при любом $k\in[1:+\infty[$ из существования $\{t_m\}_{m=0}^{k-1}$-продолжения $X(t,\ t_0,\ X_0)$ в ($\mathscr{E}$), удовлетворяющего неравенствам $(\forall m\in[0:k-1])(P(r(t_m,\ X^{(m)})-ro(t_m))\leqslant\psi_m)$, следует $t_k-t_{k-1}\in[0,\ \rho(t_{k-1},\ X^{(k-1)})[$,

$$P(rA(t_k,\ t_{k-1},\ X^{(k-1)})-ro(t_k))+E(t_k,\ t_{k-1},\ X^{(k-1)})\leqslant\psi_k;$$

($i4$) $P(r(t_0,\ X_0)-ro(t_0))\leqslant\psi_0$;

($i5$) $(\forall r\in G)(P(-r)=P(r))$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* ($i1$) — ($i4$), *то существует продолжение* $X(t,t_0,X_0)$ *в системе* ($\mathscr{E}$) *на* $\bigcup_{k=1}^{\infty}[t_{k-1},\ t_k]$, *такое, что при любом* $k\in[1:+\infty[$ *истинны неравенства*:

$$P(r(t_k,\ X^{(k)})-ro(t_k))\leqslant\psi_k,\tag{4}$$

$$P(r(t,\ X(t,\ t_0,\ X_0))-ro(t))\leqslant E(t,\ t_{k-1},\ X^{(k-1)})+$$
$$+P(rA(t,\ t_{k-1},\ X^{(k-1)})-ro(t)),\quad t\in[t_{k-1},\ t_k].\tag{5}$$

Если, кроме принятых, выполнено условие ($i5$), *то истинно также неравенство*

$$P(r(t,\ X(t,\ t_0,\ X_0))-ro(t))\geqslant -E(t,\ t_{k-1},\ X^{(k-1)})+$$
$$+P(rA(t,\ t_{k-1},\ X^{(k-1)})-ro(t)),\quad t\in[t_{k-1},\ t_k].\tag{6}$$

Теорема 2. *Если в условиях* ($i3$), ($i4$) *теоремы* 1 *заменить E на $-E$, $\geqslant$ на $\leqslant$ и $\leqslant$ на $\geqslant$, то будут истинными таким же образом измененные утверждения этой теоремы.*

Доказательство теоремы 1. При любом $m\in[0:+\infty[$ в предположении, что $X(t,\ t_0,\ X_0)$ — $\{t_k\}_{k=0}^{m}$-продолжение в системе ($\mathscr{E}$) и (4) истинно при $k\in[0:m]$, докажем, что существует продолжение на

$\bigcup\limits_{k=1}^{m+1} [t_{k-1}, t_k]$ и неравенства (4)—(6) истинны при $k = m+1$. Обратимся к ($i3$) при $k = m+1$. Так как t_{m+1} принадлежит области определения функции $X(t, t_m, X^{(m)})$ аргумента t и, согласно (2), $X(t_m, t_m, X^{(m)}) = X^{(m)}$, то можно положить

$$(\forall t \in [t_m, t_{m+1}]) (X(t, t_0, X_0) \overset{\text{def}}{=} X(t, t_m, X^{(m)})).$$

Тем самым мы определили продолжение $X(t, t_0, X_0)$ в системе ($\mathscr{E}$) на $\bigcup\limits_{k=1}^{m+1} [t_{k-1}, t_k]$. Покажем, что оно удовлетворяет свойствам (4)—(6) при $k = m+1$. Неравенство (5) следует из (3) при $\tau = t_m$, $z = X^{(m)}$ и из неравенства (1). Неравенство (6) следует из (3) при $\tau = t_m$, $z = X^{(m)}$, из неравенства $P(r^1 - r^2) \geqslant P(r^1) - P(r^2)$ (которое следует из (1)) и свойства ($i5$). Неравенство (4) следует из (уже доказанного при $k = m+1$) неравенства (5) при $t = t_{m+1}$ и из ($i3$). Так как неравенство (4) при $k = 0$ совпадает с ($i4$), то теорема 1 доказана по индукции.

Доказательство теоремы 2 аналогично.

2. Система ОДУ с однородными полиномиальными правыми частями. Здесь, в терминах правых частей, предлагаются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения

$$dx/dt = \Phi(x), \tag{7}$$

где $x \overset{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\Phi(x) \overset{\text{def}}{=} (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i \in I(n, m)} a[i] x^i$, $a[i] \overset{\text{def}}{=} (a_1[i], \ldots, a_n[i]) \in R^n$, $I(n, m) \overset{\text{def}}{=} \{i = (i_1, \ldots, i_n) \in Z^n \mid i_1 \geqslant 0, \ldots, i_n \geqslant 0;\ i_1 + \ldots + i_n = m\}$, $x^i \overset{\text{def}}{=} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$ при $i = (i_1, \ldots, i_n) \in Z^n$.

Основные результаты содержатся в теореме 3, предложения 1, 2 используются в ее доказательстве.

Решение уравнения (7), проходящее через точку $(\varkappa, z)$ при $\varkappa \in C$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$, обозначим $x(t, \varkappa, z)$, а его значение при $t = \tau$ будем обозначать x^τ. Будем использовать также обозначения $d^0x/dt^0 \overset{\text{def}}{=} x$; $|x| \overset{\text{def}}{=} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Предложение 1. При любых $\varkappa \in C$, $z \in C^n$ функция $x(t, \varkappa, z)$ аргумента t голоморфна в круге $\mathscr{O}_\beta(\varkappa) \overset{\text{def}}{=} \{t \in C \mid |t - \varkappa| < \beta\}$ при

$$\beta = \beta(z) \overset{\text{def}}{=} a^{-1} |z|^{1-m},\quad a \overset{\text{def}}{=} (m-1) \max_{j \in [1:n]} \sum_{i \in I(n, m)} |a_j[i]| \tag{8}$$

и при любом $M \in [0: +\infty[$ удовлетворяет там неравенству

$$\Bigl| x(t, \varkappa, z) - \sum_{l=0}^{M} (d^l x/dt^l)_{t=\varkappa} (t-\varkappa)^l / l! \Bigr| \leqslant$$
$$\leqslant |z| (1 - |t - \varkappa|/\beta)^{-1/(m-1)} (|t - \varkappa|/\beta)^{M+1}. \tag{9}$$

Доказательство следует из предложения 2 статьи [1].

Предложение 2 (теорема Н. Н. Красовского). Если нулевое решение уравнения (7) асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$, то при любых $\tau \in R$, $x^\tau \in R^n$ его решение $x(t, \tau, x^\tau)$ при $t \in [\tau, +\infty[$ удовлетворяет неравенству

$$|x(t, \tau, x^\tau)| \leqslant A |x^\tau| (1 + B(t - \tau) |x^\tau|^{m-1})^{1/(1-m)}, \tag{10}$$

где A, B — положительные постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения (7).

Доказательство см. в [5] (см. также [4]).

Пусть при $p \in [0 : +\infty[$; χ, $\Delta \in]0, +\infty[$; $\vartheta \in]0, 1[$ величины $Y_p = Y_p(x^\tau, \Delta)$, $F_p = F_p(x^\tau, \vartheta, \chi)$ определяются равенствами:

$$Y_0 = x^\tau / |x^\tau|, \ldots, Y_{p+1} = Y_p + \Delta\Phi(Y_p); \qquad F_p = |Y_p(x^\tau, h)| + \Theta_p, \qquad h = \vartheta\chi^{1-m}a^{-1},\ \Theta_p = \vartheta\chi((1+\mu\vartheta)^p - 1)\mu^{-1}(1-\vartheta)^{1/(1-m)},\ \mu \overset{\text{def}}{=} m/m-1). \tag{11}$$

Теорема 3. (I). *Пусть выполнено условие*

$$(\text{АУ})\ (\exists\vartheta, \delta \in]0, 1[)(\exists\chi \in [1, +\infty[)(\exists s \in [1 : +\infty[)(\forall p \in [1 : s])$$
$$(\forall x^\tau \in R^n \setminus \{0\})(F_p(x^\tau, \vartheta, \chi) \leqslant \chi;\ F_s(x^\tau, \vartheta, \chi) \leqslant \delta),$$

а постоянная Θ *такова, что*

$$\Theta_s + |Y_p(x^\tau, h) + \gamma h\Phi(Y_p(x^\tau, h))| \leqslant \Theta \tag{12}$$

при любых $x^\tau \in R^n \setminus \{0\}$, $\gamma \in [0, 1]$, $p \in [0 : s-1]$.

Тогда при любых $t_0 \in R$, $x^{t_0} \in R^n$ *решение* $x(t, t_0, x^{t_0})$ *системы* (7) *продолжаемо на* $[t_0, +\infty[$ *и удовлетворяет там неравенству*

$$|x(t, t_0, x^{t_0})| \leqslant \Theta |x^{t_0}| (1 + (hs)^{-1}(\delta^{1-m} - 1)(t - t_0)|x^{t_0}|^{m-1})^{1/(1-m)}. \tag{13}$$

(II). *Условие* (АУ) *является необходимым и достаточным для асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения* (7) (а значит, и его асимптотической устойчивости в целом).

Доказательство. (I). Шаг 1. Будем использовать обозначения

$$H = H(x^\tau) \overset{\text{def}}{=} h|x^\tau|^{1-m},\quad x^{(p)} = x^{(p)}(\tau, x^\tau) \overset{\text{def}}{=} x(\tau + pH, \tau, x^\tau). \tag{14}$$

Методом индукции докажем продолжаемость решения $x(t, \tau, x^\tau)$ на t-промежуток $[\tau, \tau + sH]$ и, при любом $p \in [1 : s]$, неравенства

$$|x^{(p)}/|x^\tau| - Y_p(x^\tau, h)| \leqslant \Theta_p. \tag{15}$$

Пусть при некотором $p = q \in [1 : s-1]$ решение $x(t, \tau, x^\tau)$ продолжаемо на $[\tau, \tau + qH]$ и истинно (15), тогда согласно (АУ) истинно неравенство

$$|x^{(q)}| \leqslant \chi |x^\tau|. \tag{16}$$

Оно истинно также и при $q = 0$, так как $\chi \geqslant 1$.

Тогда при любом $q \in [0 : s-1]$ из предложения 1 при $M = 1$, $\varkappa = \tau + qH$, $z = x^{(q)}$ получаем, что решение $x(t, \tau, x^\tau) = x(t, \tau + qH, z)$ продолжаемо на промежуток $[\tau + qH, \tau + qH + \beta[$ при $\beta = a^{-1}|z|^{1-m} \geqslant a^{-1}(\chi|x^\tau|)^{1-m} > H$ и тем более на промежуток $[\tau + q\mathrm{H}, \tau + (q+1)H]$.

Из неравенства (9) при тех же M, $\varkappa$, z и $t = \tau + (q+1)H$ получаем $x^{(q+1)} = x^{(q)} + H\Phi(x^{(q)}) + \gamma_{q+1}$, $|\gamma_{q+1}| \leqslant \chi\vartheta^2(1-\vartheta)^{1/(1-m)}|x^\tau|$. Тогда $|x^{(q+1)}/|x^\tau| - Y_{q+1}| = |(x^{(q)}/|x^\tau| - Y_q) + \gamma_{q+1}/|x^\tau| + (H\Phi(x^{(q)})/|x^\tau| - h\Phi(Y_q))| \leqslant \Theta_q + \chi\vartheta^2(1-\vartheta)^{1/(1-m)} + h|\Phi(x^{(q)}/|x^\tau|) - \Phi(Y_q)| \leqslant \Theta_q(1 + h\mu a\chi^{m-1}) + \chi\vartheta^2(1-\vartheta)^{1/(1-m)} = \Theta_{q+1}$, так как $|\Phi(x^{(q)}/|x^\tau|) - \Phi(Y_q)| = |\Phi(Y_q + (x^{(q)}/|x^\tau| - Y_q)) - \Phi(Y_q)| \leqslant \mu a |x^{(q)}/|x^\tau| - Y_q|(|Y_q| + |x^{(q)}/|x^\tau| - Y_q|)^{m-1} \leqslant \mu a \Theta_q \chi^{m-1}$.

Шаг 2. Положим $\beta = \beta(\chi x^\tau)$, $H = H(x^\tau)$, $Y_p = Y_p(x^\tau, h)$ (см. (8), (11), (14)). Введем в рассмотрение систему ($\mathscr{E}$) п. 1. Используя предложение 1 и результаты шага 1, можно положить: $U \overset{\text{def}}{=} R^n$; $G \overset{\text{def}}{=} R^n$;

$X_0 \overset{\text{def}}{=} x^{t_0}$, $t_0 \in R$; $X(t, \tau, z) \overset{\text{def}}{=} x(t, \tau, z)$; $r(t, X) \overset{\text{def}}{=} X$; $ro(t) \overset{\text{def}}{=} 0$; $P(r) \overset{\text{def}}{=} |r|$; $\rho(\tau, x^\tau) \overset{\text{def}}{=} (s-1)H + \beta$; $rA(t, \tau, x^\tau) \overset{\text{def}}{=} |x^\tau| Y_p + (t - \tau - pH)\Phi(|x^\tau| Y_p)$ при $t \in [\tau + pH, \tau + (p+1)H]$, $p = 0, \ldots, s-1$; $E(t, \tau, x^\tau) \overset{\text{def}}{=} |x^\tau| \Theta_s$ при $t \in [\tau, \tau + sH]$.

Обращаясь к условиям ($i3$), ($i4$) п. 1, положим $t_k = t_0 + hs|x^{t_0}|^{1-m} \sum_{i=1}^{k} (\delta^{1-m})^{i-1}$, $k = 1, 2, \ldots$; $\psi_k = |x^{t_0}|\delta^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

Истинность условия ($i4$) очевидна. Так как $P(r(t_{k-1}, X^{(k-1)})) = |x^{t_{k-1}}|$, $t_k - t_{k-1} = hs|x^{t_0}|^{1-m}(\delta^{1-m})^{k-1}$, $P(rA(t_k, t_{k-1}, X^{(k-1)}) - ro(t_k)) = |x^{t_{k-1}}|\,|Y_s(x^{t_{k-1}}, h)|$, $E(t_k, t_{k-1}, X^{(k-1)}) = |x^{t_{k-1}}|\Theta_s$, то для доказательства условия ($i3$) достаточно показать, что при любом $k = 1, 2, \ldots$ из неравенства

$$|x^{t_{k-1}}| \leqslant |x^{t_0}|\delta^{k-1} \tag{17}$$

следуют неравенства

$$hs|x^{t_0}|^{1-m}(\delta^{1-m})^{k-1} < \rho(t_{k-1}, X^{(k-1)}), \tag{18}$$

$$|x^{t_{k-1}}|(|Y_s(x^{t_{k-1}}, h)| + \Theta_s) \leqslant |x^{t_0}|\delta^k. \tag{19}$$

Неравенство (18) следует из (17) потому, что $\rho(t_{k-1}, X^{(k-1)}) = \beta(\chi x^{t_{k-1}}) + (s-1)h|x^{t_{k-1}}|^{1-m}$, $\beta(\chi x^{t_{k-1}}) = a^{-1}|\chi x^{t_{k-1}}|^{1-m} > h|x^{t_{k-1}}|^{1-m}$.

Импликация (17)$\Rightarrow$(19) следует из условия (АУ). Из теоремы 1 теперь следует, что при любом $x^{t_0} \in R^n$ решение $x(t, t_0, x^{t_0})$ системы (7) существует на $[t_0, +\infty[$ и при любом $k \in [1 : +\infty[$ удовлетворяет неравенствам

$$|x(t_k, t_0, x^{t_0})| \leqslant |x^{t_0}|\delta^k, \tag{20}$$

$$|x(t, t_0, x^{t_0})| \leqslant |x^{t_{k-1}}|\Theta_s + \left||x^{t_{k-1}}| Y_p(x^{t_{k-1}}, h) + (t - t_{k-1} - pH(x^{t_{k-1}}))\Phi(|x^{t_{k-1}}| Y_p(x^{t_{k-1}}, h))\right|, \tag{21}$$

$$t \in [t_{k-1} + pH(x^{t_{k-1}}), t_{k-1} + (p+1)H(x^{t_{k-1}})], \; p \in [0 : s-1].$$

При $t \in [t_{k-1}, t_k]$ из неравенств $t - t_0 \leqslant t_k - t_0 = hs|x^{t_0}|^{1-m} \times ((\delta^k)^{1-m} - 1)(\delta^{1-m} - 1)^{-1}$ и (20) получаем

$$\delta^k \leqslant (1 + (hs)^{-1}(\delta^{1-m} - 1)|x^{t_0}|^{m-1}(t - t_0))^{1/(1-m)}. \tag{22}$$

Используя в неравенстве (21) последовательно (12), (20) и (22), получаем неравенство (13).

(II). Достаточность следует из неравенства (13). Необходимость. В предположении асимптотической устойчивости нулевого решения системы (7) найдем постоянные ϑ, δ, χ, s в условии (АУ).

Положим $\chi = A + 2\Theta_s$, где A — постоянная из (10). Тогда при любых s и $q \in [1 : s-1[$ истинно неравенство (16). С другой стороны, при доказательстве неравенств (15) условие (АУ) использовалось только для вывода неравенств (16). Поэтому при сделанном предположении неравенства (15) можно считать доказанными при любых $s \in [1 : +\infty[$, ϑ, $\delta \in]0, 1]$ и $\chi = A + 2\Theta_s$.

Из неравенств (10), (15) получаем $F_p(x^\tau, \vartheta, \chi) \leqslant A + 2\Theta_p \leqslant \chi$, $p \in [1 : s-1]$; $F_s(x^\tau, \vartheta, \chi) \leqslant |x^{(s)}| \,/\, ||x^\tau + 2\Theta_s \leqslant A(1 + Bsh)^{1/(1-m)} + 2\Theta_s$.

Осталось заметить, что при $s = \vartheta^{-1}\alpha \in [1 : +\infty[$, достаточно большом $\alpha \in]0, +\infty[$ и достаточно малом $\vartheta \in]0, +\infty[$ последняя сумма может быть оценена величиной $\delta \in]0, 1[$. Действительно, так как $\chi = A + 2\Theta_s$, то $\Theta_s = \vartheta(A + 2\Theta_s)\varphi(\vartheta)$, т. е.

$\Theta_s = \dot{\vartheta} A \varphi(\vartheta)/(1 - 2\vartheta\varphi(\vartheta))$, где $\varphi(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} ((1+\mu\vartheta)^{\alpha/\vartheta} - 1)\ \mu^{-1}(1-\vartheta)^{1/(1-m)}$

Так как $\varphi(\vartheta) \underset{\vartheta \to 0}{\longrightarrow} (e^{\alpha\mu} - 1)/\mu$, то $\Theta_s \underset{\vartheta \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Учитывая это и равенство $h = \vartheta\chi^{1-m}a^{-1}$ (см. (11)), получаем

$$A(1+Bsh)^{1/(1-m)} + 2\Theta_s = A/(1 + B\alpha a^{-1}(A+2\Theta_s)^{1-m})^{1/(m-1)} + 2\Theta_s \to$$
$$\to A/(1 + B\alpha a^{-1}A^{1-m})^{1/(m-1)}, \quad (\vartheta \to 0).$$

Этот предел меньше единицы при достаточно большом α.

З а м е ч а н и е 1. Для применения теорем 1, 2 к дифференциальным уравнениям необходимо иметь в своем распоряжении результаты типа предложения 1 для более общих, чем (7), систем уравнений. В работах [1—3] аналогичные предложению 1 результаты получены последовательно для автономных полиномиальных, неавтономных полиномиальных и аналитических систем ОДУ.

З а м е ч а н и е 2. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом в терминах функций Ляпунова и оценки решений для системы (7) получены Н. Н. Красовским [5]. Аналогичные результаты для общих однородных систем получены В. И. Зубовым [4].

Summary

Sufficient conditions for the existence of the continuations of the function of a real argument as well as the estimate of a perturbation are presented in terms of the properties of local approximation. The system with right-hand sides which are m-forms is considered. By the aid of the Krasovsky's theorem and the conditions mentioned the necessary and sufficient conditions for a zero solution to be asymptotically stable are stated.

Литература

1. Б а б а д ж а н я н ц Л. К. Оценка погрешности численного интегрирования задачи N тел // Письма в АЖ. 1981. Т. 7. № 12. 2. Б а б а д ж а н я н ц Л. К., М г о я н П. Б. Оценка голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1982. Т. XVII. № 2. 3. Б а б а д ж а н я н ц Л. К., М г о я н П. Б. Оценка голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. 1984. № 7. 4. З у б о в В. И. Устойчивость движения. М., 1973. 5. К р а с о в с к и й Н. Н. Об устойчивости по первому приближению // Прикл. мат. и мех. 1955. Т. 19. Вып. 5.

Статья поступила в редакцию 1 ноября 1984 г.

УДК 517.5

Вестник ЛГУ. Сер. 1, 1987, вып. 1 (№ 1)

В. В. Жук

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА КЛАССАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В работе получены новые представления для сумм Фурье, средних Абеля — Пуассона и их производных, сумм Валле — Пуссена. Эти представления полезны в ряде вопросов теории приближений.

1.° Обозначения и предположения. В дальнейшем **C**, **R**, **Z**+, **N** — множества, соответственно, комплексных, вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел; $[a]$, где $a \in \mathbf{R}$, — целая часть числа a; запись $k = \overline{a, b}$, где $a, b \in \mathbf{R}$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. Если $D \subset \mathbf{C}^m$, а функция $f: D \to \mathbf{C}$ имеет в некоторой точке устранимый разрыв и не определена