Зафиксируем постоянную $H = \operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}(|l_1|+|l_2|+|h|)$, тогда для функции $w_+^{km} = \xi v^{km} + \gamma\varphi + h + H$ справедливо неравенство

$$\mathscr{L}_0(w_+^{km}) \geqslant \tilde{\beta}_1'(H+h+l_1) + \tilde{\beta}_2'(H+h+l_2) \geqslant 0.$$

Таким образом, функция w_+^{km} является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega')$ следующей задачи:

$$\mathscr{L}_0(w_+^{km}) \geqslant 0, \quad w_+^{km}\big|_{\partial\Omega'} > 0;$$

откуда следует, что $w_+^{km} \geqslant 0$ в Ω'.

Аналогично получаем, что функция $w_-^{km} = \xi v^{km} - \gamma\varphi + h - H \leqslant 0$, так как она является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega')$ неравенства

$$\mathscr{L}_0(w_-^{km}) \leqslant 0, \quad w_-^{km}\big|_{\partial\Omega'} < 0.$$

Из полученных оценок для w_+^{km} и w_-^{km} следует, что функция ξv^{km} ограничена в Ω' равномерно по $\varepsilon \in (0, 1]$, а значит

$$\max_D |u^{\varepsilon}_{x_k x_m}| \leqslant c,$$

причем постоянная c не зависит от $\varepsilon > 0$. Таким образом, лемма 3 доказана.

Осуществляя теперь предельный переход по некоторой последовательности значений $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$\operatorname{vrai}\max_D |u_{x_k x_m}| \leqslant c, \quad \forall\, k,\ m = 1, \ldots, n,$$

что и требовалось доказать.

Summary

It is proved that second derivatives of the solution in the problem with two obstacles for a non-linear operator are restricted. Such regularity is maximal for this problem. Analogical fact is well known for the task with one obstacle.

Литература

1. Chipot M. Free boundary problem. Vol. 2. Roma, 1980, p. 135—140. 2. Brezis H., Kinderlehrer D. The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities. — Indiana Math. J., 1974, vol. 23, p. 831—844. 3. Gensen R. Boundary regularity for variational inequalities. — Indiana Univ. Math. J., 1980, vol. 29(4), p. 495—504. 4. Brezis H., Stampacchia G. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. — Bull. Soc. Math. Fr., 1968, t. 96, p. 153—180. 5. Архипова А. А. О наименьших суперрешениях для задачи с препятствием. — Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 37(5), 1973, с. 1155—1185. 6. Архипова А. А. Задача с препятствием для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений. — В кн.: Проблемы мат. анализа. Вып. 5. Л., 1975, с. 3—24.

Статья поступила в редакцию 28 июня 1982 г.

УДК 517.9

Л. К. Бабаджанянц, П. Б. Мгоян

ОЦЕНКА ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Правые части голоморфны по неизвестным и аргументу и линейны по параметру. Предлагаются оценки области голоморфности решения задачи Коши по аргументу и параметру и оценки остаточных членов соответствующих тейлоровских разложений. Доказательство основано на аналогичных результатах для полиномиальной системы, опубликованных в статье с тем же названием.

1. Обозначения. Для их введения используется символ $\overset{\text{def}}{=}$. Если $i=(i_1, \ldots, i_n) \in Z^n$, то $|i| \overset{\text{def}}{=} i_1+\ldots+i_n$. Если $X=(x_1, \ldots, x_n) \in C^n$, то $X^i \overset{\text{def}}{=} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, $|X| \overset{\text{def}}{=} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Если m, $n \in Z$, то $[m:n] \overset{\text{def}}{=} \{j \in Z \mid m \leqslant j \leqslant n\}$. Если $\rho \in [0, +\infty)$, $\tau \in C$, то $\mathcal{O}_\rho(\tau) \overset{\text{def}}{=} \{t \in C \mid |t-\tau| < \rho\}$. Если f — функция аргумента t, то $d^0f/dt^0 \overset{\text{def}}{=} f$.

2. Введение. Пусть $I(n, m) \overset{\text{def}}{=} \{i \in Z^n \mid |i|=m;\ i_1 \geqslant 0, \ldots, i_n \geqslant 0\}$. $X=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $L \in [1:+\infty]$. Рассмотрим систему $(j \in [1:n-1])$

$$dx_j/dt = \sum_{p=1}^{n} b_{jp} x_p + \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{i \in I(n, m)} b_j[i] X^i, \quad dx_n/dt=0 \tag{1}$$

относительно $(X, x_n)=(x_1, \ldots, x_n)$, где $b_j[i] \overset{\text{def}}{=} b_{1j}[i]+\varepsilon b_{2j}[i]$, величины $b_{\nu j}[i]$, b_{jp}—голоморфные функции аргумента $t \in \mathcal{D}_b \subset C$, а $x_n \in C$— фиксированная постоянная.

Величину X будем рассматривать как функцию $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ аргументов t, t_0, $\varepsilon \in C$ и $X_0 \overset{\text{def}}{=} (x_{10}, \ldots, x_{n-1,0})$, такую, что

$$X(t_0, t_0, X_0, \varepsilon)=X_0. \tag{2}$$

Замечание 1. Правые части системы n-го порядка (1) не содержат свободных членов. С другой стороны, если подставить постоянную x_n в первые n—1 уравнений (1), то правые части полученной системы (n—1)-го порядка будут содержать свободные члены.

Рассмотрим условие (**U**): $U(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений системы (1) при $b_j[i]=0$, причем $U(t_0, t_0)$ — единичная матрица; компоненты матрицы $U(t, t_0)$ голоморфны по t в области $\mathcal{D}_U$, причем $t_0 \in \mathcal{D}_U \subset C$; существует постоянная u, такая, что при любых $W \in C^n$, $t \in \mathcal{D}_U \cap \mathcal{D}_u$ истинно неравенство $|U(t, t_0) W| \leqslant u|W|$, причем $\mathcal{D}_u$ — подмножество C и $t_0 \in \mathcal{D}_u$.

Из (**U**) следует, в частности, что система относительно $W=(w_1, \ldots, w_n)$, в которую перейдет (1) при замене

$$(X, x_n)=UW \tag{3}$$

имеет следующий вид:

$$dw_j/dt = \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{i \in I(n, m)} a_j[i] W^i, \quad a_j[i] \overset{\text{def}}{=} a_{1j}[i]+\varepsilon a_{2j}[i]. \tag{4}$$

Если $(X(t, t_0, X_0, \varepsilon), x_n)$ — решение уравнений (1), то соответствующее решение $W(t, t_0, W_0, \varepsilon)$ уравнений (4) удовлетворяет условию

$$W(t_0, t_0, W_0, \varepsilon)=W_0 \in C^n, \tag{5}$$

где

$$W_0 \overset{\text{def}}{=} (X_0, x_n). \tag{6}$$

Замечание 2. Задачу (4), (5) будем рассматривать как в связи с задачей (1), (2) (т. е. как полученную из (1), (2) при помощи замены (3)), так и вне этой связи, как некоторую исходную задачу относительно $W(t, t_0, W_0, \varepsilon)$, игнорируя (6) и связь $a_j[i]$ с $b_j[i]$.

В любом из этих случаев будем использовать условие ($\mathcal{A}$): коэффициенты $a_{\nu j}[i]$ в системе (4) удовлетворяют неравенствам:

$$|d^l a_{\nu j}[i]/dt^l|_{t=t_0} \leqslant \varphi(l) M_{\nu j}[i], \quad l \in [0:\ +\infty), \tag{7}$$

где $M_{\nu j}[i] \in [0,\ +\infty)$ — постоянные, а функция φ такова, что ряд $\sum_{l=0}^{\infty} t^l \varphi(l)/l!$ имеет ненулевой радиус сходимости; величины $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^n$ — постоянные и $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$; при $L = +\infty$ предполагается еще, что ($j \in [1:n]$)

$$\beta_j > |w_{j0}|, \tag{8}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i \in I(n,\ m)} M_{\nu j}[i] \beta^i < +\infty. \tag{9}$$

Замечание 3. Условие ($\mathscr{A}$) выполнено, если предположена голоморфность правых частей уравнений (4) по $(t,\ W)$ в поликруге $\mathscr{P}(\beta_{0*}, \ldots, \beta_{n*}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(t,\ W) \in C^{n+1} \,|\, |t-t_0| < \beta_{0*};\ |w_1| < \beta_{1*}, \ldots, |w_n| < \beta_{n*}\}$, где $\beta_{1*} > \beta_1, \ldots, \beta_{n*} > \beta_n$; $\beta_{0*} > 0$. Действительно, если правые части в (4) записать в виде $\boldsymbol{W}_{1j}(t,\ W) + \varepsilon \boldsymbol{W}_{2j}(t,\ W)$ и ввести обозначение $\mathscr{M}_{\nu j}(\beta_{0*}, \ldots \beta_{n*}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t,\ W \in \mathscr{P}} |\boldsymbol{W}_{\nu j}(t,\ W)|$, то из неравенств Коши следует, что для выполнения условия ($\mathscr{A}$) достаточно положить $\varphi(l) \stackrel{\text{def}}{=} l!\ \beta_{0*}^{-l}$, $M_{\nu j}[i] \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{M}_{\nu j}(\beta_{0*}, \ldots, \beta_{n*}) \beta_{1*}^{-i_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{n*}^{-i_n}$. Из (7) (при $l=0$) и (9) следует и обратное: если выполнено условие ($\mathscr{A}$), то правые части уравнений (4) голоморфны по $(t,\ W)$ в поликруге $\mathscr{P}(\beta_0, \ldots, \beta_n)$.

При сделанных предположениях ставится задача: оценить области голоморфности функций $W(t,\ t_0,\ W_0,\ \varepsilon)$, $X(t,\ t_0,\ X_0,\ \varepsilon)$ по $(t,\ \varepsilon)$ и остаточные члены их тейлоровских разложений по t и по ε.

Решение содержится в теоремах 1, 2 (см. п. 3). В п. 4 рассмотрен пример.

3. Теоремы о голоморфном решении. Введем ряд обозначений, связанных с задачами (1), (2) и (4), (5) и условиями ($\mathscr{U}$), ($\mathscr{A}$) п. 2. Пусть

$$c_{\nu jm} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_j^{-1} \sum_{i \in I(n,\ m)} M_{\nu j}[i] \beta^i, \quad d_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \in [1:n]} |\beta_j^{-1} w_{j0}|,$$

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \max\{d_0,\ -(e \ln d_0)^{-1}\}, \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} ((1+\alpha)\sigma s)^{-1}, \tag{10}$$

где $\alpha \in [0,\ +\infty)$ — параметр, σ — положительное решение уравнения

$$\sigma - \sum_{l=0}^{\infty} \varphi(l)(\sigma s)^{-l}/l! = 0, \tag{11}$$

и пусть γ, s определяются формулами ($\nu = 1,\ 2$; $j \in [1:n]$)

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} d_0, \quad s = s(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} L\gamma^{-1} \max_{\nu,\ j} \sum_{m=1}^{L+1} \gamma^m C_{\nu jm} \tag{12}$$

при $L < +\infty$ и формулами ($\nu = 1,\ 2$; $j \in [1:n]$)

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} d, \quad s = s(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{s_1(\gamma),\ s_2(\gamma)\},$$

$$s_1(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\nu,\ j} \left(C_{\nu j1} + \gamma \sum_{m=2}^{L+1} C_{\nu jm} \right), \tag{13}$$

$$s_2(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} 4{,}5\gamma \max_{\nu,\, j} \sum_{m=1}^{L+1} C_{\nu jm}$$

при $L = +\infty$. Положим

$$\mathscr{K}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (1 - |t - t_0|/\rho)^{-1/\mathscr{L}}, \ \mathscr{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{K}_0\, \alpha\rho/(\alpha\rho - |\varepsilon(t - t_0)|), \tag{14}$$

где $\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} L$, если $L < +\infty$, и $\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, если $L = +\infty$.

Введем, наконец, обозначения

$$\begin{aligned} X^{(ol)} &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1^{(ol)}, \ldots, x_{n-1}^{(ol)}) \stackrel{\text{def}}{=} (d^l X(t, t_0, X_0, 0)/dt^l)_{t=t_0}, \\ X^{(\varepsilon l)} &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1^{(\varepsilon l)}, \ldots, x_{n-1}^{(\varepsilon l)}) \stackrel{\text{def}}{=} (d^l X(t, t_0, X_0, \varepsilon)/d\varepsilon^l)_{\varepsilon=0} \end{aligned} \tag{15}$$

и аналогичные обозначения $W^{(ol)}$, $w_j^{(ol)}$, $W^{(\varepsilon l)}$, $w_j^{(\varepsilon l)}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* ($\mathscr{A}$) п. 2 *и используются обозначения* (10)—(15). *Тогда существует аналитическое продолжение* $W(t, t_0, W_0, \varepsilon)$ *решения задачи* (4), (5) (*см. замечание* 2), *относительно которого истинны следующие утверждения:*

(T1) *при любом* $\alpha \in (0, +\infty)$ *функция* W *голоморфна по* (t, ε) *в области* $\mathscr{D}_{\rho\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_\rho(t_0) \times \mathscr{O}_\alpha(0)$ *и при любом* $N \in [0: +\infty)$ *она удовлетворяет неравенствам* $(j \in [1:n])$

$$\left| w_j(t, t_0, W_0, \varepsilon) - \sum_{l=0}^{N} w_j^{(\varepsilon l)} \varepsilon^l / l! \right| \leqslant \beta_j \mathscr{K} \gamma\, |\varepsilon/\alpha|^{N+1} |(t - t_0)/\rho|^{N+1}; \tag{16}$$

(T2) *если все* $a_{2j}[i]$ *в* (4) *равны нулю, то при* $\alpha = 0$ (ρ *зависит от* α — см. (10)) *функция* $W(t, t_0, W_0, 0)$ (*или* $W(t, t_0, W_0, \varepsilon)$, *что в данном случае то же самое*) *голоморфна по* t *в области* $\mathscr{O}_\rho(t_0)$ *и при любом* $N \in [0: +\infty)$ *удовлетворяет там неравенствам* $(j \in [1:n])$

$$\left| w_j(t, t_0, W_0, 0) - \sum_{l=0}^{N} w_j^{(ol)} (t - t_0)^l / l! \right| \leqslant \beta_j \mathscr{K}_0 \gamma\, |(t - t_0)/\rho|^{N+1}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть задачи* (1), (2) *и* (4), (5) *связаны заменой* (3). *Пусть выполнены условия* ($\boldsymbol{U}$), ($\mathscr{A}$) п. 2 *и используются обозначения* (10)—(15). *Тогда существует аналитическое продолжение* $(X(t, t_0, X_0, \varepsilon), x_n)$ *решения задачи* (1), (2), *относительно которого истинны утверждения:*

(T3) *при любом* $\alpha \in (0, +\infty)$ *функция* $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ *голоморфна по* (t, ε) *в области* $\mathscr{D}_{\rho\alpha}^U \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{D}_U \cap \mathscr{O}_\rho(t_0)) \times \mathscr{O}_\alpha(0)$, *причем при* $(t, \varepsilon) \in \mathscr{D}_{\rho\alpha}^u \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_U \cap \mathscr{O}_\rho(t_0)) \times \mathscr{O}_\alpha(0)$ *и при любом* $N \in [0: +\infty)$ *она удовлетворяет неравенствам* $(j \in [1:n])$

$$\left| x_j(t, t_0, X_0, \varepsilon) - \sum_{l=0}^{N} x_j^{(\varepsilon l)} \varepsilon^l / l! \right| \leqslant u\beta_j \mathscr{K} \gamma\, |\varepsilon/\alpha|^{N+1} |(t - t_0)/\rho|^{N+1};$$

(T4) *если все* $b_{2j}[i]$ *в* (1) (*а, значит, и* $a_{2j}[i]$ *в* (4)) *равны нулю, то при* $\alpha = 0$ (ρ *зависит от* α — см. (10)) *функция* $X(t, t_0, X_0, 0)$ (*или* $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$, *что в данном случае то же самое*) *голоморфна по* t *в области* $\mathscr{D}_\rho^U \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{D}_U \cap \mathscr{O}_\rho(t_0)$ *и при* $t \in \mathscr{D}_\rho^u \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{D}_U \cap \mathscr{D}_u \cap \mathscr{O}_\rho(t_0)$ *удовлетворяет неравенствам* $(j \in [1:n])$

$$|x_j(t,\ t_0,\ X_0,\ 0)-x_{j0}|\leqslant u\beta_j\mathcal{K}_0\gamma\,|(t-t_0)/\rho|$$

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. При $L<+\infty$ результаты доказываемой теоремы составляют содержание теоремы 1 статьи [4].

Шаг 2. При $L=+\infty$ в связи с (4), (5) при любом $\Lambda\in[1:+\infty)$ введем в рассмотрение задачу

$$dw_{\Lambda j}/dt=\sum_{m=1}^{\Lambda+1}\sum_{i\in I(n,\ m)}a_j[i]\,W_\Lambda^i,\quad j\in[1:n],\tag{18}$$

$$W_\Lambda(t_0,\ t_0,\ W_0,\ \varepsilon)=W_0.\tag{19}$$

При любых β_j, удовлетворяющих (8), произведем замену

$$\xi_j\overset{\text{def}}{=}w_{\Lambda j}/\beta_j,\quad j\in[1:n]\tag{20}$$

и введем обозначения: $\Xi\overset{\text{def}}{=}(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$, $\Xi_0\overset{\text{def}}{=}(\xi_{10},\ \ldots,\ \xi_{n0})$, $\xi_{j0}\overset{\text{def}}{=}w_{j0}/\beta_j$. Тогда вместо задачи (18), (19) получаем следующую ($j\in[1:n]$):

$$d\xi_j/dt=\beta_j^{-1}\sum_{m=1}^{\Lambda+1}\sum_{i\in I(n,\ m)}a_j[i]\,\beta^i\,\Xi^i,\quad \Xi(t_0,\ t_0,\ \Xi_0,\ \varepsilon)=\Xi_0.$$

Пусть $k=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$, $k_1\geqslant 0,\ \ldots,\ k_n\geqslant 0$. При $|k|\in[1:\Lambda+1]$ введем переменные $y[k]\overset{\text{def}}{=}|k|\,\Xi^k$, тогда

$$dy[k]\,dt=|k|\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{-1}\sum_{m=1}^{\Lambda+1}\sum_{i\in I(n,\ m)}a_j[i]\,k_j\beta^i\xi_j^{-1}\,\Xi^{i+k}.\tag{21}$$

Равенство $|i|+|k|-1=1$ выполняется только в том случае, если $|i|=|k|=1$. Пусть $|i|+|k|-1>1$ и $k_j>0$, тогда существуют мультииндексы $i1(k,\ i,\ j)$, $i2(k,\ i,\ j)$ с неотрицательными компонентами, такие, что

$$i1(k,\ i,\ j)+i2(k,\ i,\ j)=(i_1+k_1,\ \ldots,\ i_{j-1}+k_{j-1},\ i_j+k_j-1,\ i_{j+1}+k_{j+1},\ \ldots,\ i_n+k_n),$$

$|i1(k,\ i,\ j)|=E((|i|+|k|-1)/2)$, $|i2(k,\ i,\ j)|=|i|+|k|-1-|i1(k,\ i,\ j)|$, где $E(\mu)$ обозначает целую часть числа μ. Отсюда следует, что при $|i|+|k|-1>1$, $k_j>0$ истинно равенство

$$|k|\,k_j\,\xi_j^{-1}\,\Xi^{i+k}=|k|\,k_j\,\Xi^{i1(k,\ i,\ j)}\,\Xi^{i2(k,\ i,\ j)}=$$
$$=c(k,\ i,\ j)\,k_j\,y[i1(k,\ i,\ j)]\,y[i2(k,\ i,\ j)],\tag{22}$$

где $c(k,\ i,\ j)\overset{\text{def}}{=}|k|/(|i1(k,\ i,\ j)|\,|i2(k,\ i,\ j)|)\leqslant 4{,}5/|k|$.

Ради удобства равенство (22) будем использовать и при $k_j=0$, понимая его как $0=0$. Подставляя (22) в (21), получаем

$$dy[k]/dt=\sum_{j=1}^{n}k_j\beta_j^{-1}\Bigg(\sum_{i\in I(n,\ 1)}a_j[i]\,\beta^i y[i]+$$
$$+\sum_{m=2}^{\Lambda+1}\sum_{i\in I(n,\ m)}a_j[i]\,\beta^i c(k,\ i,\ j)\,y[i1(k,\ i,\ j)]\,y[i2(k,\ i,\ j)]\Bigg),\quad |k|=1,\tag{23}$$

$$dy[k]/dt=\sum_{j=1}^{n}k_j\beta_j^{-1}\sum_{m=1}^{\Lambda+1}\sum_{i\in I(n,\ m)}a_j[i]\,\beta^i c(k,\ i,\ j)\times$$
$$\times y[i1(k,\ i,\ j)]\,y[i2(k,\ i,\ j)],\quad |k|\in[2:\Lambda+1],$$

причем

$$(y[k])_{t=t_0}=|k|\Xi_0^k, \quad k\in\bigcup_{m=1}^{\Lambda+1} I(n, m). \tag{24}$$

Из (24) следует, что

$$|y[k]|_{t=t_0}\leqslant|k|\,|\Xi_0|^{|k|}\leqslant\gamma,$$

где γ определяется формулами (13), (10) (так как $L=+\infty$).

Величины ξ_j находятся в составе переменных $y[k]$ задачи (23), (24). Применяя к этой задаче результат шага 1 и учитывая (20), получаем утверждения (T1), (T2) при $W=W_\Lambda$, $\Lambda\in[1:+\infty)$.

Шаг 3. Пусть $\mathcal{D}$ — открытое подмножество C^m. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ голоморфных в $\mathcal{D}$ вектор-функций $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to C^n$ и будем использовать понятия сходимости, равномерной сходимости, компактности в смысле нормы в C^r ($r=m$ или $r=n$). Говорят, что последовательность функций $\mathcal{F}_k\in\mathcal{H}(\mathcal{D})$ равномерно сходится на каждом компакте, если для любого компакта $K\subset\mathcal{D}$ последовательность сужений $\mathcal{F}_k|K$ равномерно сходится. Говорят, что множество $A\subset\mathcal{H}(\mathcal{D})$ ограничено, если для любого компакта $K\subset\mathcal{D}$ существует постоянная $M(K)$, такая, что $(\forall\mathcal{F}\in A)(\forall z\in K)(\|\mathcal{F}(z)\|\leqslant M(K))$.

Предложение 1. Если подмножество A пространства $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ ограничено, то всякая бесконечная последовательность вектор-функций $\mathcal{F}_k\in A$ содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компакте.

Этот результат — следствие аналогичного предложения при $n=1$ [6, следствие 2.2.5].

Обратимся к доказанному при $W=W_\Lambda$, $\Lambda\in[1:+\infty)$, утверждению (T1) (соответственно, (T2)). Рассмотрим $\pi\overset{\text{def}}{=}\{W_\Lambda\}$ — последовательность вектор-функций аргумента $(t,\varepsilon)\in\mathcal{D}_{\rho\alpha}$ (соответственно, аргумента $t\in\mathcal{O}_\rho(t_0)$). Из результатов шага 3 следует, что элементы последовательности π образуют ограниченное подмножество пространства $\mathcal{H}(\mathcal{D}_{\rho\alpha})$ (соответственно, пространства $\mathcal{H}(\mathcal{O}_\rho(t_0))$), следовательно, согласно предложению 1, π имеет подпоследовательность $\pi1$, сходящуюся равномерно на каждом компакте из $\mathcal{D}_{\rho\alpha}$ (соответственно, из $\mathcal{O}_\rho(t_0)$).

При любых p, $q\in[0:+\infty)$ положим $(\pi1\,p,q)\overset{\text{def}}{=}\{\partial^{p+q}V_k/\partial t^p\partial\varepsilon^q\}$ (соответственно, $\pi1(p)\overset{\text{def}}{=}\{d^pV_k/dt^p\}$), причем $\pi1(0,0)\overset{\text{def}}{=}\pi1=\{V_k\}$ (соответственно, $\pi1(0)\overset{\text{def}}{=}\pi1=\{V_k\}$). Согласно теореме Вейерштрасса [7, гл. 1, § 4] предел последовательности $\pi1$, который обозначим через W_∞, есть вектор-функция аргумента (t,ε) (соответственно, аргумента t), голоморфная в $\mathcal{D}_{\rho\alpha}$ (соответственно, в $\mathcal{O}_\rho(t_0)$). Более того, при любых p, $q\in[0:+\infty)$ $\pi1(p,q)$ (соответственно, $\pi1(p)$) сходится равномерно на любом компакте из $\mathcal{D}_{\rho\alpha}$ (соответственно, из $\mathcal{O}_\rho(t_0)$), причем

$$(\forall(t,\varepsilon)\in\mathcal{D}_{\rho\alpha})\left(\lim_{k\to+\infty}\pi1(p,q)=\partial^{p+q}W_\infty/\partial t^p\partial\varepsilon^q\right)$$

(соответственно, $(\forall t\in\mathcal{O}_\rho(t_0))\left(\lim_{k\to+\infty}\pi1(p)=d^pW_\infty/dt^p\right)$).

Переходя к пределу при $k\to+\infty$ в неравенстве (16) (соответственно, в (17)), записанном для V_k, получаем, что утверждение (T1) (соответственно, (T2)) истинно при $W=W_\infty$.

Шаг 4. Из неравенств (16) (соответственно, (17)) следует, что в поликруге $\mathcal{D}_{\rho1,\alpha1}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{O}_{\rho1}(t_0)\times\mathcal{O}_{\alpha1}(0)$ (соответственно, $\mathcal{O}_{\rho1}(t_0)$) достаточно малых радиусов $\rho1$, $\alpha1$ истинны неравенства $|v_{kj}|<\beta_j$, $j\in[1:n]$, где v_{kj} — компоненты вектор-функции V_k. В этом поликруге функции V_k ($k\in[1:+\infty)$) удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
&dv_{kj}/dt=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i\in I(n,m)} a_j[i]\,V_k^i-\mathscr{R}_{kj}(V_k,\ t,\ \varepsilon),\\
&\mathscr{R}_{kj}\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=\Lambda_k+2}^{\infty}\sum_{i\in I(n,m)} a_j[i]\,V_k^i,\quad j\in[1:n],
\end{aligned}
\tag{25}
$$

причем $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathscr{R}_{kj}=0$ ($\Lambda_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$). Переходя в (25) к пределу при $k\to+\infty$ получаем, что W_∞ удовлетворяет задаче (4), (5) в поликруге $\mathscr{D}_{\rho 1,\,\alpha 1}$ (соответственно, в $\mathscr{O}_{\rho 1}(t_0)$).

Утверждения (T3), (T4) теоремы 2 выводятся из теоремы 1 так же, как и в работе [4]: в связи с задачей (1), (2) рассматривается задача (4), (5), к которой применяется теорема 1, затем утверждение (T3) (соответственно, (T4)) получается из (T1) (соответственно, из (T2)) при помощи ($\mathscr{U}$) и замены (3).

Замечание 4. Теоремы 1, 2 могут быть обобщены на некоторый класс счетных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными (с ростом номера уравнения) коэффициентами, что следует из способа их доказательства [1, п. 6.4; 2, п. 3].

4. Заключение. В работе [3] утверждение, аналогичное (T2) в частном случае, когда коэффициенты $a_{vj}[i]$ системы (4) постоянны и $L<+\infty$, применяется для получения теоремы об априорной оценке численного интегрирования методом рядов Тейлора. Рассмотренный там пример (планетная задача шести тел) показал практическую полезность теоремы. Здесь для иллюстрации полученных выше результатов ограничимся применением простейшего из них — утверждения (T2) — к модельной задаче

$$
dx/dt=x^{L+1}+ax^L,\quad x(t_0)=x_0. \tag{26}
$$

Применяя к (26) утверждение (T2), получаем

$$
\begin{aligned}
&\rho=1/(L(|x_0|+|a|)|x_0|^{L-1}),\\
&\left|x(t)-\sum_{l=0}^{N}(d^l x/dt^l)_{t=t_0}(t-t_0)^l/l!\right|\leqslant\\
&\leqslant|x_0|(1-|t-t_0|/\rho)^{-1/L}(|t-t_0|/\rho)^{N+1},\quad t\in\mathscr{O}_\rho(t_0).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

При $a=0$ величина ρ совпадает с точным значением радиуса голоморфности решения. При $a=0$, $L=1$ оценка (27) точная, что проверяется непосредственно.

Применяя теорему Коши [5, § 4], получаем

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathscr{R}_c=\max_{b\in(0,+\infty)} b/M(b)=(2L)^L(\omega-(L-1)(|x_0|+|a|))\times\\
&\times(\omega+(L+1)(|x_0|+|a|))^{-1}(2L|x_0|-(L-1)(|x_0|+|a|)+\omega)^{-L},
\end{aligned}
$$

где $\omega=((L-1)^2(|x_0|+|a|)^2+4L|x_0|(|x_0|+|a|))^{1/2}$.

Для сравнения вычислим, например, значения ρ и $\mathscr{R}_c$ при $x_0=L=a=1$: $\rho=1/2$, $\mathscr{R}_c=1/(6+4\sqrt{2})$.

Summary

A system of n ordinary differential equations of the first order with the right-hand sides which are linear with respect to parameter ε and golomorphic with respect to time t and all dependent variables is dealt with. Estimates of the $(t,\ \varepsilon)$-region on which the solution is golomorphic and those of the remainders of the corresponding Taylor formulae with respect to t and ε are given.

Литература

1. Бабаджанянц Л. К. Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики. Труды Ин-та теорет. астрон., 1978, вып. 17, с. 3—45. 2. Babadzanjanz L. K. Existence of the continuations in the N-body problem. — Celestial Mechanics, 1979, vol. 20, p. 43—57. 3. Бабаджанянц Л. К. Оценка погрешности численного интегрирования задачи n тел. — Письма в Астрон. журн., 1981, т. 7, № 12, с. 752—755. 4. Бабаджанянц Л. К., Мгоян П. Б. Оценка голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — Изв. АН АрмССР. Сер. мат., 1982, т. 17, № 2. 5. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., 1959. 301 с. 6. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968. 280 с. 7. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М., 1965. 166 с.

Статья поступила в редакцию 10 июня 1982 г.

УДК 517.938

И. Б. Гонтарева, А. Л. Фельштын

АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВ МОРСА ДЛЯ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ

В работе изучается зависимость топологии области притяжения асимптотически устойчивого инвариантного компактного множества от динамических свойств системы на этом множестве. В случае системы типа Морса—Смейла для области притяжения получены неравенства, аналогичные неравенствам, доказанным Смейлом для многообразий [1]. Формула для эйлеровой характеристики области притяжения обобщается на случай произвольных автономных систем с конечным числом точек покоя.

1. Пусть в $\mathbf{R}^n$ задана автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=X(x), \quad X\in C^1(\mathbf{R}^n), \tag{1.1}$$

$\varphi(t, x)$ — траектория (1.1), проходящая при $t=0$ через точку x. Предположим, что I — асимптотически устойчивое инвариантное компактное множество системы (1.1). Это означает следующее: для любой окрестности U множества I найдется окрестность W, $I\subset W\subset U$, такая, что:

1) для любого $x\in W$ $\varphi(t, x)\in U$ при $t\in[0, +\infty)$;
2) для любого $x\in W$ $\varphi(t, x)\xrightarrow[t\to+\infty]{} I$.

Назовем функцию $V(x)$ функцией Ляпунова для множества I, если

1) $V\in C^1(U-I)$, $V\in C(U)$;
2) $V(x)>0$, $x\in U-I$, $V(x)=0$, $x\in I$;

3) $\dot V<0$ в силу системы (1.1) в $U—I$. Такая функция всегда существует [2]. Пусть окрестность W выбрана так, что $\overline{W}\subset U$. Определим число $c_0=\inf\limits_{x\in\partial W} V(x)$. Для любого $c\in(0, c_0)$ поверхность уровня функции V

$$L(V, c)=\{x\in W/V(x)=c\}$$

есть $(n—1)$-мерное гладкое многообразие без контакта с полем X, которое траектории системы (1.1) пересекают в сторону убывания V. Любая траектория $\varphi(t, \xi)$, $\xi\in W$, пересекает каждое из многообразий $L(V, c)$, $c\in(0, c_0)$, и при том ровно один раз. Отображение многооб-