Письма в АЖ, т. 7, № 12, 1981

УДК 521.1

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ N ТЕЛ

Л. К. БАБАДЖАНЯНЦ

Предлагаются оценки радиуса сходимости и остаточного члена тейлоровского решения задачи N тел в прямоугольных координатах.

ESTIMATION OF THE ERROR IN NUMERICAL INTEGRATION OF THE N-BODY PROBLEM, by L. K. Babadzhanyants. Estimates of the radius of convergence and the remainder of the Taylor solution in rectangular coordinates of the N-body problem are given.

1. Одна из возможностей получения решения дифференциальных уравнений задачи N тел в прямоугольных координатах — приближение его отрезком ряда Тейлора в некоторой окрестности начального момента при условии, что заданы координаты и скорости тел в этот момент.

Основной результат настоящей статьи состоит в следующем.

Теорема. Пусть $m_1, \ldots, m_N$ — массы материальных точек $M_1, \ldots, M_N$, движущихся под действием взаимного притяжения по закону Ньютона, а $\mathscr{K}$ — постоянная Гаусса. Пусть $g1_{ij}$; $g2_{ij}$ $(j = 1, 2, 3)$ — координаты и скорости i-й точки $(i = 1, \ldots, N)$ в прямоугольной системе координат с центром в M_1 и с осями, параллельными осям некоторой инерциальной системы (привычны обозначения x_i, y_i z_i; $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$). Пусть t_0 — фиксированный момент времени, используется обозначение $gp_{ij0} \overset{\text{def}}{=} gp_{ij}(t_0)$ $(p = 1, 2)$ для начальных данных (в частности, $gp_{1j0} = 0$) и обозначение

$$\delta_M gp_{ij}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{l=M+1}^{\infty} (d^l gp_{ij}/dt^l)_{t=t_0} (t - t_0)^l / l!, \quad (p = 1, 2)$$

для остаточных членов степенных разложений координат и скоростей.

Пусть величины R и a_k $(k = 2, \ldots, N)$ вычисляются по формулам $(r, i = 1, \ldots, N)$:

$$d_{ri0} = \left(\sum_{j=1}^{3} (g1_{rj0} - g1_{ij0})^2 \right)^{1/2}; \quad e_{ri} = d_{ri0}^{-2} \text{ при } r \neq i, \text{ иначе } e_{ri} = 0;$$

$$q_{ri} = \mathscr{K}^2 \sum_{j=1}^{N} m_j (e_{jr} + e_{ji}); \quad h_{ri} = \max_{j=1,2,3} |g2_{rj0} - g2_{ij0}|;$$

$$f_{ri} = d_{ri0}^{-1} \left| \sum_{j=1}^{3} (g1_{rj0} - g1_{ij0}) (g2_{rj0} - g2_{ij0}) \right|;$$

$$b_{ri} = \max \{h_{ri}, \sqrt{2/3} f_{ri}\}; \quad t_{ri} = (q_{ri} d_{rj0}/2)^{1/2};$$

$$c_{ri} = \sqrt{6} (2b_{ri}/d_{ri0} + q_{ri}/b_{ri}) \text{ при } b_{ri} \geqslant t_{ri},$$

иначе

$$c_{ri} = 4\,(3q_{ri}/d_{ri0})^{1/2};\quad s = \max_{r,\,i} c_{ri};\quad R = 1/s;$$

$$a_k = \max\{b_{k1},\, d_{k10}\cdot(s - (s^2 - 48q_{k1}/d_{k10})^{1/2})/(2\sqrt{6})\}.$$

Тогда внутри $\mathcal{O}_R\,(t_0)$ — круга радиуса R с центром в t_0 на комплексной плоскости — функции gp_{ij} голоморфны по t и при $i = 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, 3$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\,\delta_M g2_{ij}(t)\,| \leqslant \Delta_i\,(M) \stackrel{\text{def}}{=} a_i\,(1 - |\,t - t_0\,|\,/R)^{-1}\,(|\,t - t_0\,|\,/R)^{M+1},\quad (1)$$

$$|\,\delta_M g1_{ij}\,(t)\,| \leqslant \Delta_i\,(M)\,R/\,(M + 1).\quad (2)$$

Доказательство будет дано в п. 3. Оно опирается на аналогичный результат для полиномиальной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который доказывается в п. 2 (предложение 2). В п. 4 приводятся численные результаты применения теоремы к задаче о движении планет Солнечной системы.

2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{X} = \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{i\in I(m)} a\,[i]\,x_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n},\quad (3)$$

где $X \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-функция аргумента $t \in C$ со значениями в C^n; $a\,[i] \stackrel{\text{def}}{=} (a_1\,[i], \ldots, a_n\,[i])$ — постоянный вектор из C^n; n, L — фиксированные натуральные числа; $i_1, \ldots, i_n$ — целые числа,

$I\,(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = (i_1, \ldots, i_n)\mid i_1 \geqslant 0, \ldots, i_n \geqslant 0;\ i_1 + \ldots + i_n = m\}.$

Будем предполагать, что его решение $X = X\,(t)$ удовлетворяет начальному условию

$$X\,(t_0) = X_0.\quad (4)$$

Введем обозначение

$$XT_M\,(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{M} X_l\,(t - t_0)^l/l!,\qquad X_l \stackrel{\text{def}}{=} (d^lX/dt^l)_{t=t_0}.\quad (5)$$

Пусть $\rho < \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ — радиус сходимости ряда $XT_\infty\,(t)$. Метод рядов Тейлора численного интегрирования задачи (3), (4) заключается в том, что при $t \in \mathcal{O}_\rho\,(t_0)$ решение X заменяется на XT_M.

Поставим задачу: оценить $\mathcal{R}$ и величину

$$\delta_M X\,(t) \stackrel{\text{def}}{=} X\,(t) - XT_M\,(t).\quad (6)$$

Решение ее дается в предложении 2, доказательство которого основано на следующем результате:

П р е д л о ж е н и е 1. (Бабаджанянц, 1979, стр. 49). Пусть используются обозначения:

$$s\,(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{-1} \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{m=1}^{L+1} \gamma^m \sum_{i\in I(m)} |\,a_j\,[i]\,|,\quad \gamma \in (0, +\infty),\quad (7)$$

$$|\,X\,| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j=1,\ldots,n} |\,x_j\,| \text{ при } X = (x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда величины X_l, определенные в (5), удовлетворяют неравенствам

$$|\,X_l\,| \leqslant |\,X_0\,|\,(s\,(|\,X_0\,|))^l \prod_{m=0}^{l-1} (1 + mL),\ l = 1, 2, \ldots\quad (8)$$

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть используются обозначения (5), (6), (7) и $\rho \stackrel{\text{def}}{=} 1/(Ls\,(\,|\,X_0\,|\,))$. Тогда решение X задачи (3), (4) голоморфно при $t \in \mathcal{O}_\rho\,(t_0)$ и удовлетворяет там неравенству

$$|\,\delta_M\,X\,(t)\,| \leqslant |\,X_0\,|\,(1 - |\,t - t_0\,|\,/\rho)^{-1/L}\,(|\,t - t_0\,|\,/\rho)^{M+1}.\quad (9)$$

Доказательство. Используя (8), при любом $k = 1, 2, \ldots$ получаем:

$$\left|\sum_{l=M+1}^{M+1+k} X_l (t-t_0)^l/l!\right| \leqslant |X_0| (|t-t_0|/\rho)^{M+1} \Big(1 + \sum_{l=1}^{k} (|t-t_0|/\rho)^l \times$$
$$\times \prod_{m=0}^{l-1} (1/L+m)/l!\Big).$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ и вспоминая биномиальную формулу

$$(1-a)^{-b} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a^l \prod_{m=0}^{l-1} (b+m)/l!,$$

завершаем доказательство.

3. *Доказательство теоремы.* Чтобы использовать предложение 2, сведем уравнения задачи N тел в прямоугольных кооринатах к полиномиальной форме (3). Пусть α_{ri} — положительные параметры и используется обозначение $d_{ri} \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{j=1}^{3} (g1_{rj} - g1_{ij})^2\right)^{1/2}$. При $j = 1, 2, 3$; $r, i = 1, \ldots, N$; $r \neq i$ введем переменные:

$$u_{ri} \overset{\text{def}}{=} d_{ri0}/d_{ri}; \quad v_{ri} \overset{\text{def}}{=} u_{ri}^2; \quad x_{rij} \overset{\text{def}}{=} u_{ri} (g1_{rj} - g1_{ij})/d_{ri};$$
$$y_{rij} \overset{\text{def}}{=} (g2_{rj} - g2_{ij})/\alpha_{ri}; \quad z_{rij} \overset{\text{def}}{=} y_{rij} u_{ri};$$
$$w_{rij} \overset{\text{def}}{=} x_{rij} u_{ri}; \quad \vartheta_{ri} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{2/3} \sum_{j=1}^{3} x_{rij} y_{rij}.$$

Пусть $\xi 1_{ij}$, $\xi 2_{ij}$ — координаты и скорости i-го тела в инерциальной системе с осями, параллельными осям принятой относительной системы координат, тогда $gp_{rj} - gp_{ij} = \xi p_{rj} - \xi p_{ij}$. Выражая все введенные переменные $u_{ri}, \ldots, \vartheta_{ri}$ через $\xi p_{rj} - \xi p_{ij}$ и пользуясь известными уравнениями задачи N тел в инерциальной системе координат, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
\dot{u}_{ri} = -\sqrt{3/2}\,\sigma_{ri} u_{ri} \vartheta_{ri}; \quad \dot{v}_{ri} = -\sqrt{6}\,\sigma_{ri} v_{ri} \vartheta_{ri}; \\
\dot{x}_{rij} = \sigma_{ri} (u_{ri} z_{rij} - \sqrt{6}\, x_{rij} \vartheta_{ri}); \quad \dot{y}_{rij} = q_{rij}; \\
\dot{z}_{rij} = -\sqrt{3/2}\,\sigma_{ri} \vartheta_{ri} z_{rij} + u_{ri} q_{rij}; \\
\dot{w}_{rij} = \sigma_{ri} (z_{rij} v_{ri} - 3\sqrt{3/2}\,\vartheta_{ri} w_{rij}); \\
\dot{\vartheta}_{ri} = -\sqrt{6}\,\sigma_{ri} \vartheta_{ri}^2 + \sqrt{2/3} \sum_{j=1}^{3} (\sigma_{ri} z_{rij}^2 + q_{rij} x_{rij}),
\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\sigma_{ri} \overset{\text{def}}{=} \alpha_{ri}/d_{ri0}; \quad q_{rij} \overset{\text{def}}{=} \alpha_{ri}^{-1} \mathscr{K}^2 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (e_{\nu r} w_{\nu rj} - e_{\nu i} w_{\nu ij}).$$

Решение этой системы удовлетворяет начальным условиям:

$$\begin{gathered}
u_{ri}(t_0) = v_{ri}(t_0) = 1; \quad x_{rij}(t_0) = w_{rij}(t_0) = (g1_{rj0} - g1_{ij0})/d_{ri0}; \\
y_{rij}(t_0) = z_{rij}(t_0) = (g2_{rj0} - g2_{ij0})/\alpha_{ri}; \\
\vartheta_{ri}(t_0) = \sqrt{2/3} \sum_{j=1}^{3} x_{rij}(t_0)\, y_{rij}(t_0).
\end{gathered} \tag{11}$$

Параметры α_{ri} в задаче (10), (11) подчиним ограничениям $\alpha_{ri} \geqslant b_{ri}$; в этом случае все начальные данные в (11) по модулю не превосходят единицы. Представляя (10), (11) в виде (3), (4) и применяя к этой задаче

t_0(JD)	$R(d)$	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
2415000.5	104.9	6.0	5.3	3.6	3.1	2.2
2420000.5	98.7	7.1	5.6	3.1	2.8	2.2
2441200.5	103.3	7.0	5.1	3.7	2.8	3.1
2441600.5	99.4	7.3	5.7	3.6	2.8	3.1
2442000.5	133.6	5.4	5.9	3.5	2.9	3.1

предложение 2, получаем, что ее решение голоморфно в круге $O_\rho(t_0)$ и истинно неравенство (9), причем

$$\rho = 1/q, \quad q = \sqrt{6} \max_{r,\, i} (2\alpha_{ri}/d_{ri0} + q_{ri}/\alpha_{ri}).$$

Если параметры α_{ri} подчинить еще условию минимальности q, то получим $q = s$; $\rho = R$. Если среди всех α_{r1}, удовлетворяющих принятым условиям, выбрать минимальные, то получим $\alpha_{r1} = a_r$.

Так как величины $g2_{ij}$ находятся в составе переменных задачи (10), (11), то уже доказана их голоморфность при $t \in O_R(t_0)$ и неравенство (1). Так как $g1_{ij} = g2_{ij}$, то функции $g1_{ij}$ тоже голоморфны при тех же t. Неравенство (2) следует из (1).

4. Для задачи о движении Солнца, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона (которые перенумеруем в приведенном порядке от 1 до 6) приведем численные результаты применения доказанной теоремы.

В качестве исходных данных из работ Лиске (1967) и Остервинтера и Коэна (1972) были взяты значения координат и скоростей внешних планет в гелиоцентрической экваториальной системе (экватор и равноденствие 1950.0) для пяти эпох t_0 = 1899 Декабрь 12.0; 1913 Август 21.0; 1971 Сентябрь 6.0; 1972 Октябрь 10.0; 1973 Ноябрь 14.0. По данным для каждой эпохи при помощи формул из условий теоремы вычислены величины R (в сутках) и a_i, входящие в оценки (1), (2).

Приведем величины R и $\alpha_i = 1000\ a_i$ для упомянутых эпох.

Таблица иллюстрирует практическую эффективность доказанной теоремы для априорного выбора шага и оценки погрешности численного интегрирования уравнений задачи N тел методом рядов Тейлора. Например, предположим, что известны массы и прямоугольные гелиоцентрические координаты и скорости внешних планет на эпоху JD 2442000.5 = = 1973 Ноябрь 14.0 и требуется вычислить координаты и скорости этих планет на эпоху $t_0 + h$, решив соответствующие дифференциальные уравнения при помощи ряда Тейлора. Обращаясь к последней строке таблицы (она соответствует рассматриваемой эпохе t_0) видим, что теорема гарантирует возможность выбора шага h до 133.6 сут. Если положить $h = 20$ сут (обычно используемое в этой задаче значение) и для получения приближенного решения в $t_0 + h$ использовать полином Тейлора порядка $M = 10$, то из теоремы следует, что абсолютная погрешность приближения координат Юпитера не превзойдет величины $10^{-3} \cdot 5.4 \cdot (1 - 20/133.6)^{-1} \cdot \cdot (20/133.6)^{11} \cdot (133.6/11) \approx 6.6 \cdot 10^{-11}$ а. е.; последняя вычислена по формуле (2) при $i = 2$ (в начале настоящего пункта Юпитеру присвоен номер $i = 2$).

ЛИТЕРАТУРА

Бабаджанянц Л. К. Celest. Mech., 1979, *20*, 43.
Лиске (Lieske H.) Jet. Prop. Lab. Techn. Rep., 1967, 32—1206.
Остервинтер и Коэн (Oesterwinter C., Cohen Ch. J.) Celest. Mech., 1972, *3*, 317.

Ленинградский гос. университет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
5 мая 1981 г.