Межвузовский сборник

№ 3 Проблемы механики управляемого движения 1973

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ БОКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ИСЗ С МАХОВИКОМ

Л.К.Бабаджанянц,Н.И.Голубева,В.С.Новоселов

Возмущенные колебания ИСЗ,снабженного закрученным маховиком,на стационарной орбите по каналам рыскания и крена после некоторого упрощения будут определяться дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} J_x\ddot{\psi} + H\dot{\varphi} + H\omega_0\psi &= u_x \;, \\ J_y\ddot{\varphi} - H\dot{\psi} + H\omega_0\varphi &= u_y \;. \end{aligned} \tag{I}$$

Здесь,как и в работе [I] , J_x и J_y - боковые моменты инерции спутника, ψ - угол рыскания, φ - угол крена, H - кинетический момент маховика, u_x и u_y - управления, ω_0 - угловая скорость обращения (один оборот за сутки). Корни характеристического уравнения системы (I) равны

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega + O(\omega_0^2, \omega_0(J_x + J_y)H^{-1}), \omega = HJ_x^{-\frac{1}{2}}, J_y^{-\frac{1}{2}} , \tag{2}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\omega_0[1 + O(\omega_0(J_x + J_y)H^{-1})] . \tag{3}$$

Исходя из общих требований к конструкции спутника,предположим, что $\omega\omega_0^{-1} \approx 10^{-3}$.

Участки управляемого движения будут описываться уравнениями (I),в правые части которых добавлены соответствующие управляющие функции u_x и u_y ,введенные в работе [I]. Решение уравнений (I) будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_1(\tau_1) + \varphi_2(\tau_2), \quad \psi = \psi_1(\tau_1) + \psi_2(\tau_2). \tag{4}$$

Здесь φ_1 и φ_2 – некоторые функции "быстрого" времени $\tau_1 = \omega t + \delta_1$, $\delta_1 = const$; ψ_1 и ψ_2 – функции "медленного" времени $\tau_2 = \omega_0 t + \delta_2$, $\delta_2 = const$. Подставим формулы (4) в уравнения (I) и, принимая во внимание большое различие в величинах ω и ω_0 , приравняем нулю как быстрочастотные, так и низкочастотные члены. В результате получаем уравнения вида (I) работы [I] для быстрочастотных колебаний, а также и уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} + \psi = u_x H^{-1}\omega_0^{-1}, \qquad \frac{d\psi}{dt} - \varphi = u_y H^{-1}\omega_0^{-1} \tag{5}$$

Здесь опущен значок "2" у величин ψ, φ и τ .

Применение теории оптимизации процессов с использованием принципа максимума Понтрягина приводит к выводу о дискретности и 2π -периодичности по τ оптимального процесса управления, не стесненного ограничениями по времени. Таким образом, как и в [I], управляющие функции u_x , u_y могут быть записаны в виде

$$u_x = \sum_{k=1}^{2N} h_{kx} H(t - t_k^1), \qquad u_y = \sum_{k=1}^{2M} h_{ky} H(t - t_k^2). \tag{6}$$

Решение системы (I) с правыми частями вида (6) получим сведением ее к двум отдельным уравнениям четвертого порядка для φ и ψ

$$\psi^{(4)} + (a\omega_0 + b\omega_0 + ab)\psi^{(2)} + ab\omega_0^2\psi = f_1^{(2)} - af_2^{(1)} + b\omega_0 f_1, \qquad \varphi^{(4)} + (a\omega_0 + b\omega_0 + ab)\varphi^{(2)} + ab\omega_0^2\varphi = f_2^{(2)} + bf_1^{(1)} + a\omega_0 f_2, \tag{7}$$

где

$$a = \frac{H}{J_x}, \quad b = \frac{H}{J_y}, \quad f_1 = \frac{u_x}{J_x}, \quad f_2 = \frac{u_y}{J_y}.$$

Уравнения (7) решаем обычным способом, используя при дифференцировании кусочно-непрерывных функций f_1 и f_2 аппарат теории обобщенных функций [2]. Решение получаем в виде (4). Из формулы (8) работы [I] видно, что высокочастотные колебания определяются начальными угловыми скоростями. Погасить эти скорости можно, погасив высокочастотные колебания. Этот процесс будет быстрым. Погасить угловые отклонения можно только демпфированием низкочастотных колебаний. Этот процесс будет медленным. При реализации быстрого процесса величины с большим периодом почти не уменьшатся и выделится медленный процесс, зависящий от начальных угловых отклонений, описываемый системой (5). Запишем ее решение:

$$\begin{cases} \psi = \left[\psi(0) - \dfrac{1}{H\omega_0} S_x(\omega_0) - \dfrac{1}{H\omega_0} C_y(\omega_0) \right] \sin \omega_0 t + \\ \quad + \left[\psi(0) - \dfrac{1}{H\omega_0} C_x(\omega_0) + \dfrac{1}{H\omega_0} S_y(\omega_0) \right] \cos \omega_0 t + \dfrac{u_x}{H\omega_0} , \\ \varphi = \left\{ -\psi(0) + \dfrac{1}{H\omega_0} \left[C_x(\omega_0) - S_y(\omega_0) \right] \right\} \sin \omega_0 t - \\ \quad - \left\{ \varphi(0) - \dfrac{1}{H\omega_0} \left[S_x(\omega_0) + C_y(\omega_0) \right] \right\} \cos \omega_0 t + \dfrac{u_y}{H\omega_0} , \end{cases} \qquad (8)$$

где обозначено

$$S_\alpha(\omega_0) = \sum h_{k\alpha} H(t - t_{k\alpha}) \sin \omega_0 t_{k\alpha} ,$$

$$C_\alpha(\omega_0) = \sum h_{k\alpha} H(t - t_{k\alpha}) \cos \omega_0 t_{k\alpha} .$$

Рассмотрим задачу энергетически оптимального демпфирования медленных колебаний. Отличие этой задачи от [I] состоит в том, что велик период колебаний $(\sim 24^h)$ и время гашения порядка нескольких периодов в практическом применении оказывается недопустимо большим. Рассмотрим случай, когда гашение необходимо произвести на промежутке времени, меньшем четверти периода.

В качестве первого шага рассмотрим задачу минимизации функции расхода топлива R при ограничении типа строгих неравенств на время.

Функция R_1 будет иметь вид:

$$R_1 = R + \lambda_1 (F_1 - H\omega_0 \psi(0)) + \lambda_2 (F_2 - H\omega_0 \varphi(0)) ,$$

где

$$F_1 = (n+m) h_x [\sin(t_1-\Delta_1)\omega_0 - \sin(t_1+\Delta_1)\omega_0] +$$
$$+ (p+q) h_y [\cos(t_2-\Delta_2)\omega_0 - \cos(t_2+\Delta_2)\omega_0] ,$$

$$F_2 = (n+m) h_x [\cos(t_1-\Delta_1)\omega_0 - \cos(t_1+\Delta_1)\omega_0] -$$
$$- (p+q) h_y [\sin(t_2-\Delta_2)\omega_0 - \sin(t_2+\Delta_2)\omega_0] ,$$

$$R = 2h_x(n+m)\Delta_1 + 2h_y(p+q)\Delta_2 .$$

Минимизируем R_1 относительно переменных $t_1, \Delta_1, t_2, \Delta_2, \lambda_1, \lambda_2$. Взяв $\psi(0)=0$, $p=q$ и $n=m$, имеем (см.[I]):

$$\Delta = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{H\omega_0 |\psi(0)|}{2(nh_x+ph_y)} ,$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0} ,$$

$$t_2 = \frac{\pi}{\omega_0} .$$

Такое решение дает нам локальные экстремумы функционала R_1. Но на ограниченном промежутке времени $[T_1, T_2]$, меньшем четверти периода, может не оказаться локальных экстремумов; тогда приходится рассматривать все граничные случаи и выбирать среди них оптимальный. Пусть начало одной или нескольких управляющих ступенек совпадает с началом участка гашения T_1, конец одной или нескольких управляющих ступенек совпадает с концом T_2. Условия экстремума в этом случае будут аналогичны (I6) работы [I], из которых видно, что экстремальные точки располагаются во времени следующим образом:

$$T_1 < t_1' < t_2^1 < t_1^{**} < t_2^{**} < t_1^2 < t_2^2 < t_1^* < t_2^* < \dots ,$$

причем

$$t_{2k}' = t_2' + \frac{2\pi}{\omega_0}(k-1) ,$$
$$t_{2k-1}' = t_1' + \frac{2\pi}{\omega_0}(k-1) , \qquad (9)$$

$$t_k^2 = t_1' + \frac{\pi}{\omega_0} + 2\pi(k-1),$$
$$t_k^* = t_1' + \frac{3\pi}{\omega_0} + 2\pi(k-1), \qquad (9)$$
$$t_k^{**} = t_1' + \frac{\pi}{2\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0}(k-1).$$

Таким образом,очевидно,что на промежутке времени,меньшем четверти периода,условия оптимальности дают не более двух внутренних точек переключения. Это соответствует ограниченному числу возможных вариантов управления.

Введем коэффициенты i_k', i_k'', j_k', j_k'' $(k=1,2,3,4)$. Если $k=1$,будем иметь в виду двигатель на оси x ,создающий положительный момент,при $k=2$ – двигатель на оси x с отрицательным моментом,при $k=3$ имеется ввиду двигатель на оси y ,создающий положительный момент,при $k=4$ – двигатель на оси y с отрицательным моментом. $i_k'=0$, $i_k''=0$, $j_k'=0$, $j_k''=0$ означает,что в моменты времени t_1, t_2, T_1, T_2 двигатели не включаются. При включении одного из двигателей в какой-либо момент времени соответствующий коэффициент равен I ,при выключении –I. Тогда каждому из возможных вариантов управления будет соответствовать один из следующих наборов коэффициентов i, j:

I. $j_1' = i_1'' = 1$, $i_1' = j_1'' = -1$,
2. $j_2' = i_2'' = 1$, $i_2' = j_2'' = -1$,
3. $j_3' = i_3'' = 1$, $i_3' = j_3'' = -1$,
4. $j_4' = i_4'' = 1$, $i_4' = j_4'' = -1$,
5. $j_1' = i_4'' = 1$, $i_1' = j_4'' = -1$,
6. $j_2' = i_3'' = 1$, $i_2' = j_3'' = -1$,
7. $j_3' = i_1'' = 1$, $i_3' = j_1'' = -1$,
8. $j_4' = i_2'' = 1$, $i_4' = j_2'' = -1$,
9. $j_1' = j_3' = 1$, $j_1'' = j_3'' = -1$,
IO. $j_1' = j_4' = 1$, $j_1'' = j_4'' = -1$,
II. $j_2' = j_3' = 1$, $j_2'' = j_3'' = -1$,
I2. $j_2' = j_4' = 1$, $j_2'' = j_4'' = -1$,
I3. $j_1' = i_3' = 1$, $i_3'' = j_1'' = -1$,
I4. $j_1' = i_4' = 1$, $i_4'' = j_1'' = -1$,
I5. $j_2' = i_3' = 1$, $i_3'' = j_2'' = -1$,
I6. $j_2' = i_4' = 1$, $i_4'' = j_2'' = -1$,
I7. $j_3' = i_1' = 1$, $i_1'' = j_3'' = -1$,
I8. $j_3' = i_2' = 1$, $i_2'' = j_3'' = -1$,
I9. $j_4' = i_1' = 1$, $i_1'' = j_4'' = -1$,
20. $j_4' = i_2' = 1$, $i_2'' = j_4'' = -1$,
2I. $j_1' = j_3' = i_3'' = 1$, $i_3' = j_1'' = j_3'' = -1$,
22. $j_1' = j_4' = i_4'' = 1$, $i_4' = j_1'' = j_4'' = -1$,
23. $j_2' = j_3' = i_3'' = 1$, $i_3' = j_2'' = j_3'' = -1$,
24. $j_2' = j_4' = i_4'' = 1$, $i_4' = j_2'' = j_4'' = -1$,

25. $j_1' = j_3' = i_1'' = 1,\ i_1' = j_1'' = j_3'' = -1,$ 27. $j_1' = j_4' = i_1'' = 1,\ i_1' = j_1' = j_4'' = -1,$
26. $j_2' = j_3' = i_1'' = 1,\ i_2' = j_2'' = j_3'' = -1,$ 28. $j_2' = j_4' = i_2'' = 1,\ i_2' = j_2'' = j_4'' = -1,$

Например, вариант 8 соответствует такому управлению: на промежутке времени $[T_1, t_1]$ работает двигатель на оси y с отрицательным моментом, на промежутке времени $[t_2, T_2]$ работает двигатель на оси x с отрицательным моментом. Граничные условия, учитывающие все возможные варианты, примут вид:

$$\begin{aligned} K_1 &= A\sin t_1' + B\sin t_2' = P_1, \\ K_2 &= A\cos t_1' + B\cos t_2' = P_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$P_1 = H\omega_0\varphi(0) + h_x(j_2' - j_1')\sin T_1\omega_0 + h_y(j_4' - j_3')\cos T_1\omega_0 +$$
$$+ h_x(j_2'' - j_1'')\sin T_2\omega_0 + h_y(j_4'' - j_3'')\cos T_2\omega_0 \quad ,$$

$$P_2 = H\omega_0\varphi(0) + h_x(j_2' - j_1')\cos T_1\omega_0 - h_y(j_4' - j_3')\sin T_1\omega_0 +$$
$$+ h_x(j_2'' - j_1'')\cos T_2\omega_0 - h_y(j_4'' - j_3'')\sin T_2\omega_0 \quad ,$$

$$A = h_x(i_1' + i_2') + h_y(i_3' + i_4') \ ,$$

$$B = h_x(i_1'' + i_2'') + h_y(i_3'' + i_4'') .$$

Из граничных условий (10) определим внутренние точки переключения

$$t_1' = \frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{P_1^2 + P_2^2 + A^2 - B^2}{2A\sqrt{P_1^2 + P_2^2}} - \frac{1}{\omega_0}\operatorname{arctg}\frac{P_2}{P_1} + r_1 \ ,$$

$$t_2' = \frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{P_1^2 + P_2^2 - A^2 + B^2}{2B\sqrt{P_1^2 + P_2^2}} - \frac{1}{\omega_0}\operatorname{arctg}\frac{P_2}{P_1} + r_2$$

r_1 и r_2 выбираются в соответствии с соотношениями (9) при $k = 1$ в зависимости от рассматриваемого варианта управления. Например, если t_1 – момент выключения двигателя на оси y с положительным моментом (т.е. t_1^*) ,то по формулам (9) $h_1 = \frac{3\pi}{2\omega_0}$

Литература

I. Бабаджанянц Л.К.,Голубева Н.И.,Новоселов В.С. Оптимальное демпфирование быстрых линейных колебаний стационарного ИСЗ с маховиком (в настоящем сборнике).

2. Гельфанд И.М.,Шилов Г.В. Обобщенные функции и действия над ними. Т.I.