Межвузовский сборник

№ 3 Проблемы механики управляемого движения 1973

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ БЫСТРЫХ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ИСЗ С МАХОВИКОМ

Л.К.Бабаджанянц,Н.И.Голубева,В.С.Новоселов

§ I. Постановка задачи и структура управления

В статье рассматривается задача демпфирования по каналам рыскания и крена колебаний около центра масс ИСЗ на стационарной орбите. Предполагается,что спутник снабжен жестким закрученным маховиком с кинетическим моментом H . Ось маховика в рабочем состоянии ориентирована ортогонально плоскости орбиты центра масс спутника,и демпфирование колебаний корпуса его относительно нормали к плоскости орбиты (в ориентированном состоянии ось z) может быть осуществлено за счет некоторого незначительного изменения кинетического момента. Демпфирование же боковых колебаний по углам тангажа ψ и крена φ должно осуществляться с помощью реактивных сопел при использовании гироскопического момента,создаваемого маховиком.

Анализ линеаризованных уравнений боковых колебаний показал,что собственные колебания спутника состоят из суперпозиции быстрых нутационных колебаний с частотой $\omega = HJ_x^{-\frac{1}{2}} J_y^{-\frac{1}{2}}$,где J_x и J_y - боковые моменты инерции спутника,и медленных колебаний с частотой,близкой к орбитальной угловой скорости (один оборот за сутки). Поскольку возмущающий момент на участке ориентированного движения практически не приводит к возмущениям спутника на промежутках времени порядка периода быстрых колебаний,то на рассматриваемом режиме управления возмущения не учитываются.

Пусть для управления угловым движением корпуса на каждой из осей x и y располагаются по два двигателя, один из которых создает положительный момент относительно соответствующей оси, а второй – отрицательный. Для управляющих моментов имеем

$$u_x = u_{11} u_r^1 d_1 - u_{12} u_r^2 d_2 , \tag{I}$$

$$u_y = u_{21} u_r^3 d_3 - u_{22} u_r^2 d_4 . \tag{2}$$

Здесь $u_r^1, u_r^2, u_r^3, u_r^4$ – относительные скорости истечения;

d_1, d_2, d_3, d_4 – плечи реактивных сил;

$u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ – секундные расходы массы соответствующих двигателей. Указанные величины являются положительными и функционал

$$J = \int_{t_H}^{t_k} (u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22})\, dt \tag{3}$$

представляет собой величину расхода массы за промежуток времени от t_H до t_k .

После ряда упрощений уравнения, описывающие быстрый режим демпфирования угловых скоростей, приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} + ay &= u_x J_x^{-1} , \\ \frac{dy}{d\tau} - bx &= u_y J_y^{-1} . \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь приняты обозначения

$$x = \dot{\psi} ,\ y = \dot{\varphi} ,\ \tau = \omega t ,\ a = HJ_x^{-1} ,\ b = HJ_y^{-1} . \tag{5}$$

Структура управлений u_{ij} , минимизирующих функционал (3), при конечных ограничениях, заданных начальных и конечных нулевых условиях выбирается [I,2] на основе принципа максимума Понтрягина. Оптимальным оказывается дискретное управление с максимальным значением величин управляющих функций. Включение и выключение двигателей образует 2π -периодический процесс по независимой переменной τ . При этом величины промежутков времени работы какого-либо из двигателей не изменяются от периода к периоду.

§ 2. Решение уравнений быстрых колебаний с дискретным управлением

В связи со сказанным в § I правые части уравнений (4) представим в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \sum_{k=1}^{2N} h_{kx} H(t - t_k^1), \\
u_y &= \sum_{k=1}^{2N} h_{ky} H(t - t_k^2),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где h_{kx}, h_{ky} – постоянные, а $H(t)$ – функция Хевисайда единичного скачка,

$$
H(t - t_k^i) = \begin{cases} 1, & t - t_k \geqslant 0 \\ 0, & t - t_k < 0 \end{cases}
\tag{7}
$$

Решение уравнений (4) может быть получено в такой форме:

$$
\begin{aligned}
\psi &= \left\{ H^{-1}(J_x J_y)^{1/2}\dot{\psi}(0) - H^{-2}J_y S_x(\omega) + H^{-2}(J_x J_y)^{1/2} C_y(\omega) \right\} \sin\omega t + \\
&+ \left\{ H^{-1}J_y \dot{\varphi}(0) - H^{-2}J_y C_x(\omega) - H^{-2}(J_x J_y)^{1/2} S_y(\omega) \right\} \cos\omega t + \psi(0) - \\
&- H^{-1}J_y \dot{\varphi}(0), \\
\varphi &= \left\{ H^{-1}(J_x J_y)^{1/2}\dot{\varphi}(0) - H^{-2}(J_x J_y)^{1/2} C_x(\omega) - H^{2}J_x S_y(\omega) \right\} \sin\omega t + \\
&+ \left\{ H^{-2}(J_x J_y)^{1/2} S_x(\omega) - H^{-2}J_x C_x(\omega) - H^{-1}J_x \dot{\psi}(0) \right\} \cos\omega t + \varphi(0) + \\
&+ H^{-1}J_x \dot{\psi}(0),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_x(\omega) &= \sum_{k=1}^{2N} h_{kx} H(t - t_k^1) \sin \omega t_k^1 , \\ C_x(\omega) &= \sum_{k=1}^{2N} h_{kx} H(t - t_k^1) \cos \omega t_k^1 , \\ S_y(\omega) &= \sum_{k=1}^{2M} h_{ky} H(t - t_k^2) \sin \omega t_k^2 , \\ C_y(\omega) &= \sum_{k=1}^{2M} h_{ky} H(t - t_k^2) \cos \omega t_k^2 \end{aligned}\right\} , \qquad (9)$$

и принято $u_x(0) = u_y(0) = 0$, что, очевидно, не нарушает общности.

§ 3. Энергетически оптимальный алгоритм гашения быстрых боковых колебаний

Возьмем (как это обычно бывает на практике)

$$|h_{1x}| = |h_{2x}| = \ldots = h_x , \; |h_{1y}| = |h_{2y}| = \ldots = h_y \qquad (10)$$

и запишем моменты u_x, u_y в несколько ином виде:

$$u_x = u_x^+ + u_x^- = h_x \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} H(t - t_k^1) + h_x \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k H(t - t_k^{\prime\prime}) , \qquad (11)$$

$$u_y = u_y^+ + u_y^- = h_y \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} H(t - t_k^*) + h_y \sum_{k=1}^{2q} (-1)^k H(t - t_k^{**}) . \qquad (12)$$

Функции u_x^+, u_y^+ состоят из ступенек, направленных вверх, а u_x^-, u_y^- – из ступенек, направленных вниз. Рассмотрим граничные условия, возникающие из задачи гашения быстрых колебаний (8): мы должны потребовать, чтобы все выражения в фигурных скобках в (8) были равны нулю после того, как отработают все двигатели, т.е. для

$$t > t_{2n}^{\prime} , \; t_{2m}^{\prime\prime} , \; t_{2p}^{*} , \; t_{2q}^{**} .$$

Таким образом получаем формулы

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= J_y S_x(\omega) - (J_x J_y)^{1/2} c_y(\omega) = H (J_x J_y)^{1/2} \dot{\varphi}(0),\\ \mathcal{K}_2 &= J_y c_x(\omega) + (J_x J_y)^{1/2} S_y(\omega) = H J_y \dot{\varphi}(0) .\end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим линейный относительно $t'_k, t''_k, t^*_k, t^{**}_k$ функционал R – сумму площадей всех ступенек

$$R = h_x \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k t'_k + h_x \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k t''_k + h_y \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k t^*_k + h_y \sum_{k=1}^{2q} (-1)^k t^{**}_k , \tag{14}$$

он, очевидно, эквивалентен функционалу (3). Будем решать задачу минимизации функционала R, при выполнении граничных условий (13), которые необходимо выразить через величины t'_k, t''_k, t^*_k, t^{**}_k. Для получения задачи минимизации без ограничений используем множители Лагранжа λ_1, λ_2. Тогда для энергетически оптимального гашения быстрых колебаний необходимо минимизировать функционал

$$R_1 = R + \lambda_1 (\mathcal{K}_1 - H (J_x J_y)^{1/2} \dot{\varphi}(0)) + \lambda_2 (\mathcal{K}_2 - H J_x \dot{\varphi}(0)) . \tag{15}$$

Запишем необходимые условия экстремума R_1

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos\omega t'_k - \lambda_2 \sin\omega t'_k = (J_y \omega)^{-1},\\ \lambda_2 \cos\omega t''_k - \lambda_2 \sin\omega t''_k = -(J_y \omega)^{-1},\\ \lambda_1 \sin\omega t^*_k + \lambda_2 \cos\omega t^*_k = (J_x J_y)^{-1/2} \omega^{-1},\\ \lambda_1 \sin\omega t^{**}_k + \lambda_2 \cos\omega t^{**}_k = -(J_x J_y)^{-1/2} \omega^{-1} \end{cases} \tag{16}$$

Из последних равенств получим, что u_x, u_y имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u_x = h_x \sum\limits_{k=1}^{n} \left\{ H\left(t - \left[t_1 - \Delta_1 + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right) - H\left(t - \left[t_1 + \Delta_1 + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right)\right\} -\\ \quad - h_x \sum\limits_{k=1}^{m} \left\{ H\left(t - \left[t_1 - \Delta_1 + \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right) - H\left(t - \left[t_1 + \Delta_1 + \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right)\right\} .\\ u_y = h_y \sum\limits_{k=1}^{p} \left\{ H\left(t - \left[t_2 - \Delta_2 + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right) - H\left(t - \left[t_2 + \Delta_2 + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right)\right\} - \end{cases} \tag{17}$$

$$-h_y \sum_{k=1}^{q} \left\{ H\left(t - \left[t_2 - \Delta_2 + \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right) - H\left(t - \left[t_2 + \Delta_2 + \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi(k-1)}{\omega}\right]\right) \right\} .$$

Поэтому условия (I3) перепишутся так:

$$\mathcal{K}_1 = (n+m) h_x J_y \left[\sin(t_1 - \Delta_1)\omega - \sin(t_1 + \Delta_1)\omega\right] -$$
$$-(p+q) h_y (J_x J_y)^{1/2} \left[\cos(t_2 - \Delta_2)\omega - \cos(t_2 + \Delta_2)\omega\right] = H (J_x J_y)^{1/2} \dot{\psi}(0),$$

$$\mathcal{K}_2 = (n+m) h_x J_y \left[\cos(t_1 - \Delta_1)\omega - \cos(t_1 + \Delta_1)\omega\right] + \qquad (I8)$$
$$+(p+q) h_y (J_x J_y)^{1/2} \left[\sin(t_2 - \Delta_2)\omega - \sin(t_2 + \Delta_2)\omega\right] = H J_x \dot{\varphi}(0).$$

Таким образом, нам необходимо минимизировать функционал (I5) относительно переменных $t_1, \Delta_1, t_2, \Delta_2, \lambda_1, \lambda_2$. Так как

$$R = 2h_x (n+m)\Delta_1 + 2h_y (p+q)\Delta_2 , \qquad (I9)$$

то необходимые условия будут

$$\begin{cases} \lambda_1 \left[\cos(t_1 - \Delta_1)\omega - \cos(t_1 + \Delta_1)\omega\right] - \lambda_2 \left[\sin(t_1 - \Delta_1)\omega - \sin(t_1 + \Delta_1)\omega\right] = 0 , \\ \lambda_1 \left[\sin(t_2 - \Delta_2)\omega - \sin(t_2 + \Delta_2)\omega\right] + \lambda_2 \left[\cos(t_2 - \Delta_2)\omega - \cos(t_2 + \Delta_2)\omega\right] = 0 , \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \left[\cos(t_1 - \Delta_1)\omega + \cos(t_1 + \Delta_1)\omega\right] - \lambda_2 \left[\sin(t_1 - \Delta_1)\omega + \sin(t_1 + \Delta_1)\omega\right] = 2(J_y \omega)^{-1} , \\ \lambda_1 \left[\sin(t_2 - \Delta_2)\omega + \sin(t_2 + \Delta_2)\omega\right] + \lambda_2 \left[\cos(t_2 - \Delta_2)\omega + \cos(t_2 + \Delta_2)\omega\right] = 2\omega^{-1} (J_x J_y)^{1/2} \end{cases} \qquad (21)$$

Умножая первое из полученных уравнений на $(n+m) h_x J_y$, а второе – на $(p+q) h_y (J_x J_y)^{1/2}$, складывая полученные равенства и учитывая уравнения связей (I8), получаем

$$\lambda_1 J_y^{1/2} \dot{\varphi}(0) - \lambda_2 J_x^{1/2} \dot{\psi}(0) = 0 . \qquad (22)$$

Без ограничения общности можно взять $\dot{\psi}(0) = 0$ (т.е. за нулевой момент времени мы берем момент, когда $\dot{\psi} = 0$). Тогда получаем

$$\lambda_1 = 0 \qquad (23)$$

и из (20),(21) имеем

$$\begin{aligned} &\cos t_1\omega = 0 , \\ &\sin t_2\omega = 0 . \end{aligned} \tag{24}$$

Возьмем для определенности $\dot{\varphi}(0) > 0$. Используя теперь второе из равенств (18) и полагая $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$,находим

$$J_y(n+m)h_x \sin\Delta_1\omega + (p+q)h_y(J_xJ_y)^{1/2}\sin\Delta_2\omega = \frac{HJ_y}{2}\dot{\varphi}(0) . \tag{25}$$

Последние два равенства в (21) дают

$$J_y^{1/2}\cos\Delta_1\omega = J_x^{1/2}\cos\Delta_2\omega . \tag{26}$$

Если не желательно искусственно увеличивать время гашения, то необходимо положить $n=m$, $p=q$,так как эти величины входят в (25) только в суммы $n+m$, $p+q$. Поэтому из (25) и (26) получаем

$$\begin{aligned} \sin\Delta_2\omega = \Big\{\frac{1}{2}pHh_y(J_xJ_y)^{1/2}\dot{\varphi}(0) \pm \Big(\frac{1}{4}p^2H^2h_y^2J_xJ_y\dot{\varphi}^2(0) - 4J_x(p^2h_y^2 - \\ - n^2h_x^2)\Big[n^2h_x^2(J_x - J_y) + \frac{1}{16}H^2J_y\dot{\varphi}^2(0)\Big]\Big)^{1/2}\Big\} \Big/ 2J_x(p^2h_y^2 - n^2h_x^2) , \\ \sin\Delta_1\omega = \Big\{\frac{1}{2}nHh_xJ_y\dot{\varphi}(0) \pm \Big(\frac{1}{4}n^2H^2h_x^2J_y^2\dot{\varphi}^2(0) - 4J_y(n^2h_x^2 - \\ - p^2h_y^2)\Big[p^2h_y^2(J_y - J_x) + \frac{1}{16}H^2J_y\dot{\varphi}^2(0)\Big]\Big)^{1/2}\Big\} \Big/ 2J_y(p^2h_y^2 - n^2h_x^2) . \end{aligned} \tag{27}$$

Для наиболее простого случая $n=p$ и $h_x = h_y = h$ формулы (27) дают

$$\begin{aligned} \sin\Delta_2\omega &= \frac{2nh(J_x - J_y)}{H\dot{\varphi}(0)\sqrt{J_xJ_y}} + \frac{HJ_y\dot{\varphi}(0)}{8nh\sqrt{J_xJ_y}} , \\ \sin\Delta_1\omega &= \frac{2nh(J_y - J_x)}{HJ_y\dot{\varphi}(0)} + \frac{H\dot{\varphi}(0)}{8nh} . \end{aligned} \tag{28}$$

Если к тому же $J_x = J_y$,то находим

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{H\dot{\varphi}(0)}{8nh} \tag{29}$$

Из (29) видно,что

$$H\dot{\varphi}(0) < 8nh. \tag{30}$$

Из (I9) и (29) ясно,что энергетически оптимальный режим без ограничений на время реализуется, если $n \to \infty$ (при этом $\Delta \to 0$). Действительно,из этих формул легко вывести следующее:

$$R = H\dot{\varphi}(0)\frac{\Delta}{\sin\omega\Delta},$$

$$\lim_{\Delta \to 0} R = \frac{H\dot{\varphi}(0)}{\omega}.$$

Замечание I. Предположения $\dot{\psi}(0)=0$ и $\dot{\varphi}(0)>0$ не ограничивают общности выводов,так как ясно,что при нарушении условия $\dot{\psi}(0) = 0$ во всех формулах вместо t нужно писать $t-\tilde{t}$,где t - ближайший к $t=0\ (\tilde{t}>0)$ момент времени,когда $\dot{\psi}(\tilde{t})=0$. При нарушении условия $\dot{\varphi}(0)>0$ формулы для управления (I7) следует умножить на $\operatorname{sign}\dot{\varphi}(0)$, т.е. вместо u_x ,u_y получаем $-u_x$,$-u_y$.

Замечание 2 . Предложенный в настоящей работе алгоритм оптимальной стабилизации колебаний может быть получен с помощью гармонической линеаризации правых частей формул (6) с использованием общего вывода из принципа максимума Понтрягина (§ I) о 2π -периодичности процесса оптимального управления по переменной τ .

Литература

I. Атамс М.,Фалб П. Оптимальное управление. М.,"Машиностроение",I968.

2. Ли Э.Б.,Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.,"Наука",I972.

3. Гельфанд И.М.,Шилов Г.В. Обобщенные функции и действия над ними. Т.I.