3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. Физматгиз, 1962.
4. Д. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. ИЛ, 1963.
5. Н. П. Бусленко, Д. И. Голенко и др. Метод статистических испытаний. Физматгиз, 1962.
6. Е. И. Пустыльник. Методы анализа и обработки наблюдений. «Наука», 1968.
7. Р. Е. Фишелл, Ф. Ф. Мобли. Сб. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. «Наука», 1966.
8. Дж. А. Льюис, Е. Е. Зайак. Сб. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. «Наука», 1966.
9. В. И. Красовский. Тр. Всесоюзной конференции по физике космического пространства. «Наука», 1965.

В. С. НОВОСЕЛОВ, Л. К. БАБАДЖАНЯНЦ, Л. И. ФЕДОРОВА

ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ИСЗ

§ 1. Уравнения вращательного движения и постановка задачи

Рассматриваются уравнения в оскулирующих элементах L, ρ, σ, ϑ, φ, ψ в общем случае динамически несимметричного тела:

$$\dot{L}=M_3, \tag{1}$$

$$\dot{\rho}=\frac{1}{L}M_1, \tag{2}$$

$$\dot{\sigma}=\frac{1}{L\sin\rho}M_2, \tag{3}$$

$$\dot{\vartheta}=L\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{I_x}-\frac{1}{I_y}\right)+\frac{M_2\cos\psi-M_1\sin\psi}{L}, \tag{4}$$

$$\dot{\varphi}=L\cos\vartheta\left(\frac{1}{I_z}-\frac{\sin^2\varphi}{I_x}-\frac{\cos^2\varphi}{I_y}\right)+\frac{M_1\cos\psi+M_2\sin\psi}{L\sin\vartheta}, \tag{5}$$

$$\dot{\psi}=L\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_x}+\frac{\cos^2\varphi}{I_y}\right)-\frac{M_1\cos\psi+M_2\sin\psi}{L\sin\vartheta}\cos\vartheta-\frac{M_2}{L}\operatorname{ctg}\rho. \tag{6}$$

Вывод этих уравнений дан Ф. Л. Черноусько (см. [1]). Смысл входящих в (1)—(6) букв такой же, как и в книге В. В. Белецкого (см. [2]). Не будем останавливаться на том, почему выбраны именно эти уравнения — об их преимуществе для случая быстрозакрученного ИСЗ подробно сказано в вышеупомянутой книге В. В. Белецкого.

Уравнения (1)—(6) отражают верно (в известном смысле) реальное вращение ИСЗ в той мере, в какой близки к истинным моменты M_1, M_2, M_3, где $\vec{M}$ — возмущающий момент всех внешних сил.

Для того чтобы прогнозировать вращение ИСЗ, необходимо уметь решать две задачи.

I. Найти достаточно близкую к реальной вектор-функцию для возмущающих моментов $\vec{M}(t)$ (время t может входить как явно, так и через посредство L, ρ, σ, ϑ, φ, ψ, $\dot{L}$, $\dot{\rho}$, $\dot{\sigma}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$).

II. Проинтегрировать систему (1)—(6) на достаточно большом интервале времени и достаточно точно.

Рассмотрение проводится для случая ИСЗ на круговых орбитах высоты порядка 700 *км*.

§ 2. Теоретические формулы для возмущающих моментов

Имеем

$$\vec{M} = \| \alpha \| \, \vec{m}, \tag{7}$$

где $\vec{M}=(M_1, M_2, M_3)$, $\vec{m}=(M_x, M_y, M_z)$, а $\| \alpha \| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{13} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_{31} & \ldots & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ суть матрица направляющих косинусов.

Система (x, y, z) жестко связана со спутником. Составляющие α_{ij} выражаются через эйлеровы углы ϑ, ψ и φ с помощью формул (1.1.5) из книги Белецкого (см. [1], стр. 21). Как и в работе [3], напишем

$$M_x = \frac{1}{981}\left(M_x^{\text{мт}} + M_x^{\text{мм}} + M_x^{\text{в}}\right) + M_x^{\text{к}} + M_x^{\text{а}} + L_x, \tag{8}$$

$$M_y = \frac{1}{981}\left(M_y^{\text{мт}} + M_y^{\text{мм}} + M_y^{\text{в}}\right) + M_y^{\text{к}} + M_y^{\text{а}} + L_y, \tag{9}$$

$$M_z = \frac{1}{981}\left(M_z^{\text{мт}} + M_z^{\text{мм}} + M_z^{\text{в}}\right) + M_z^{\text{к}} + M_z^{\text{а}} + L_z. \tag{10}$$

Возмущающие моменты от магнитнотвердого железа:

$$M_x^{\text{мт}} = D_y^{\text{т}} H_z - D_z^{\text{т}} H_y, \tag{11}$$

$$M_y^{\text{мт}} = D_z^{\text{т}} H_x - D_x^{\text{т}} H_z, \tag{12}$$

$$M_z^{\text{мт}} = D_x^{\text{т}} H_y - D_y^{\text{т}} H_x. \tag{13}$$

Возмущающие моменты от магнитномягкого железа:

$$M_x^{\text{мм}} = k_1 H_y H_z, \qquad k_1 = k_{22} - k_{33}, \tag{14}$$

$$M_y^{\text{мм}} = k_2 H_x H_z, \qquad k_2 = k_{33} - k_{11}, \tag{15}$$

$$M_z^{\text{мм}} = k_3 H_x H_y, \qquad k_3 = k_{11} - k_{22}. \tag{16}$$

Моменты от вихревых токов:

$$M_x^{\text{в}} = -k_x \omega_x (H_y^2 + H_z^2) + k_y \omega_y H_x H_y + k_z \omega_z H_x H_z, \tag{17}$$

$$M_y^{\text{в}} = k_x \omega_x H_x H_y - k_y \omega_y (H_x^2 + H_z^2) + k_z \omega_z H_y H_z, \tag{18}$$

$$M_z^{\text{в}} = k_x \omega_x H_x H_z + k_y \omega_y H_y H_z - k_z \omega_z (H_x^2 + H_y^2). \tag{19}$$

Возмущающие моменты от нескомпенсированного кинетического момента:

$$M_x^{\text{к}}=\omega_z L_y-\omega_y L_z, \tag{20}$$
$$M_y^{\text{к}}=\omega_x L_z-\omega_z L_x, \tag{21}$$
$$M_z^{\text{к}}=\omega_y L_x-\omega_x L_y. \tag{22}$$

Гравитационные возмущающие моменты:

$$L_x=3\omega_0^2\,(I_z-I_y)\,a_{13}a_{12}, \tag{23}$$
$$L_y=3\omega_0^2\,(I_x-I_z)\,a_{11}a_{13}, \tag{24}$$
$$L_z=3\omega_0^2\,(I_y-I_x)\,a_{12}a_{11}. \tag{25}$$

Аэродинамические возмущающие моменты

$$M_x^{\text{а}}=\frac{1}{2}c\rho v_0\,[-I_1\omega_x+I_2\,(a_{23}\omega_y-a_{22}\omega_z), \tag{26}$$

$$M_y^{\text{а}}=\frac{1}{2}\rho v_0^2\,(a_0^6+a_2^6a_{21}^2)\,a_{23}+\frac{1}{2}c\rho v_0\,(a_{23}I_4\omega_x-I_3\omega_y), \tag{27}$$

$$M_z^{\text{а}}=-\frac{1}{2}\rho v_0\,(a_0^6+a_2^6a_{21}^2)\,a_{22}+\frac{1}{2}c\rho v_0\,(-a_{22}I_4\omega_x-I_3\omega_z). \tag{28}$$

Проекции напряженности геомагнитного поля на связанные оси определятся в виде

$$H_x=H_{x1}a_{11}+H_{y1}a_{21}+H_{z1}a_{31}, \tag{29}$$
$$H_y=H_{x1}a_{12}+H_{y1}a_{22}+H_{z1}a_{32}, \tag{30}$$
$$H_z=H_{x1}a_{13}+H_{y1}a_{23}+H_{z1}a_{33}. \tag{31}$$

Для высоты круговой орбиты спутника порядка 700 *км*, можно принять в эрстедах

$$H_{x1}=-0{,}630\left(\frac{R_3}{R_3+h_c}\right)^3\sin i\cdot\sin\omega_0 t, \tag{32}$$

$$H_{y1}=0{,}315\left(\frac{R_3}{R_3+h_c}\right)^3\sin i\cos\omega_0 t, \tag{33}$$

$$H_{z1}=0{,}315\left(\frac{R_3}{R_3+h_c}\right)^3\cos i. \tag{34}$$

Проекции угловой скорости вращения спутника запишем так:

$$\omega_x=\dot\rho\alpha_{21}+\dot\sigma\,(\alpha_{31}\cos\rho-\alpha_{11}\sin\rho)+\dot\vartheta\cos\varphi+\dot\psi\alpha_{31}, \tag{35}$$
$$\omega_y=\dot\rho\alpha_{22}+\dot\sigma\,(\alpha_{32}\cos\rho-\alpha_{12}\sin\rho)-\dot\vartheta\sin\varphi+\dot\psi\alpha_{32}, \tag{36}$$
$$\omega_z=\dot\rho\alpha_{23}+\dot\sigma\,(\alpha_{33}\cos\rho-\alpha_{13}\sin\rho)+\dot\varphi+\dot\psi\alpha_{33}. \tag{37}$$

Вывод формул (7)—(37) дан в работе [3]. Приняты те же обозначения.

Выражения для a_{ij} через L, ρ, σ, φ, ψ, ϑ, t легко получить, воспользовавшись формулами (1.1.3) и (1.1.4) из книги Белецкого ([1], стр. 20—22). Имеем

$$a_{11}=\gamma_1\cos\omega_0\,(t-t_\Omega)+\alpha_1\sin\omega_0\,(t-t_\Omega). \tag{38}$$
$$a_{12}=\gamma_2\cos\omega_0\,(t-t_\Omega)+\alpha_2\sin\omega_0\,(t-t_\Omega), \tag{39}$$

$$a_{13}=\gamma_3 \cos \omega_0 (t-t_{\Omega})+\alpha_3 \sin \omega_0 (t-t_{\Omega}). \quad (40)$$
$$a_{21}=\alpha_1 \cos \omega_0 (t-t_{\Omega})-\gamma_1 \sin \omega_0 (t-t_{\Omega}), \quad (41)$$
$$a_{22}=\alpha_2 \cos \omega_0 (t-t_{\Omega})-\gamma_2 \sin \omega_0 (t-t_{\Omega}), \quad (42)$$
$$a_{23}=\alpha_3 \cos \omega_0 (t-t_{\Omega})-\gamma_3 \sin \omega_0 (t-t_{\Omega}), \quad (43)$$
$$a_{31}=\beta_1, \quad (44)$$
$$a_{32}=\beta_2, \quad (45)$$
$$a_{33}=\beta_3, \quad (46)$$
$$\alpha_1=m_1\alpha_{11}+m_2\alpha_{21}+m\alpha_{31}, \quad (47)$$
$$\alpha_2=m_1\alpha_{12}+m_2\alpha_{22}+m\alpha_{32}, \quad (48)$$
$$\alpha_3=m_1\alpha_{13}+m_2\alpha_{23}+m\alpha_{33}, \quad (49)$$
$$\beta_1=n_1\alpha_{11}+n_2\alpha_{21}+n\alpha_{31}, \quad (50)$$
$$\beta_2=n_1\alpha_{12}+n_2\alpha_{22}+n\alpha_{32}, \quad (51)$$
$$\beta_3=n_1\alpha_{13}+n_2\alpha_{23}+n\alpha_{33}, \quad (52)$$
$$\gamma_1=k_1\alpha_{11}+k_2\alpha_{21}+k\alpha_{31}, \quad (53)$$
$$\gamma_2=k_1\alpha_{12}+k_2\alpha_{22}+k\alpha_{32}, \quad (54)$$
$$\gamma_3=k_1\alpha_{13}+k_2\alpha_{23}+k\alpha_{33}, \quad (55)$$
$$m_1=\cos\rho \sin\sigma, \quad (56)$$
$$m_2=\cos\sigma, \quad (57)$$
$$m=\sin\rho \sin\sigma, \quad (58)$$
$$n_1=-\sin\rho, \quad (59)$$
$$n_2=0, \quad (60)$$
$$n=\cos\rho, \quad (61)$$
$$k_1=\cos\rho \cos\sigma, \quad (62)$$
$$k_2=-\sin\sigma, \quad (63)$$
$$k=\sin\rho \cos\sigma. \quad (64)$$

Как уже упоминалось в § 1, задача прогнозирования состоит из I и II задач, для решения которых необходимо уточнить значения начальных данных $L(0)$, ..., $\psi(0)$, а также параметров k_1, k_2, k_3, k_x, k_y, k_z, $D_x^{\text{т}}$, $D_y^{\text{т}}$, $D_z^{\text{т}}$ (или некоторых из них), которые известны в грубом приближении. После этого задача решается численным интегрированием вышеприведенных уравнений с фиксированными начальными условиями и известными правыми частями.

Таким образом, окончательно можно утверждать, что требуется решить две задачи.

А. Уточнение параметров и начальных значений.

В. Численное интегрирование на заданном промежутке времени.

Однако для решения задачи А требуется многократное решение задачи В, в которой и кроется принципиальная сложность. Дело в том, что в случае быстрозакрученного ИСЗ в уравнениях (1)—(6) переменные φ и ψ — быстро меняющиеся функции времени t. Поэтому пошаговое численное интегрирование (1)—(6) (из-за малого шага порядка 0,2—2,5 *сек*) на длительном промежутке требует больших затрат машинного времени.

В настоящей работе изучаются два подхода к задаче прогнозирования вращательного движения закрученного несимметричного ИСЗ: прогнозирование на коротком промежутке времени по точным (неосредненным уравнениям) и прогнозирование на большом промежутке времени при осреднении по φ и ψ.

§ 3. Математический алгоритм интегрирования уравнений вращательного движения несимметричного спутника на коротком промежутке времени

1°. В правые части уравнений (1)—(6) входят моменты M_1, M_2, M_3. Эти моменты расписываются в явном виде с помощью формул (7)—(64), причем формулы (35)—(37) содержат производные искомых функций. Все (известные нам) численные методы решения систем дифференциальных уравнений 1-го порядка разработаны для случая правых частей, в которые не входят производные искомые функций.

Разумеется, к таким системам легко применять разностные методы и особенно экстрополяционные, применяя на каждом шаге итерационный метод определения производных. Мы, однако, не будем пользоваться этими методами как ввиду большой сложности составления начальных таблиц в этом случае, так и потому, что существо рассматриваемой нами задачи требует частого изменения шага интегрирования в процессе пользования программой.

Метод Рунге—Хейна—Кутта свободен от этих двух недостатков, однако его применение к неразрешенным относительно производных системам приводит к большим трудностям. Трудности эти заключаются в том, что на каждом шаге придется четырежды применять метод итераций. Конечно, в силу линейности M_1, M_2, M_3 относительно всех производных можно разрешить систему (1)—(6) относительно последних. Этот путь, однако, также нам непригоден по следующим соображениям.

Пусть для вычисления каждой правой части системы (1)—(6) требовалось бы p операций. Разрешая эту систему относительно производных, мы получим новую систему, правые части которой содержат определители 6-го порядка. Для вычисления каждого элемента такого определителя в среднем требуется $p/6$ операций, а всего для вычисления (точным взятием) определителя в среднем $(6!)\cdot p/6=120\ p$ операций. Можно, конечно, вычислить определитель приближенно, но, как легко видеть, это почти то же, что и применение метода итераций, о чем говорилось выше. Таким образом, поскольку ω_x, ω_y и ω_z зависят от производных, относительно которых разрешаются уравнения, то рассматриваемая задача существенно усложняется.

2°. Ниже излагается прием, позволяющий обойти вышеуказанные трудности.

а) Значения $\dot{L}_0$, $\dot{\rho}_0$, $\dot{\sigma}_0$, $\dot{\theta}_0$, $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\psi}_0$ в начальной точке находятся из системы (1)—(6) методом итераций, причем за начальные приближения этих величин берутся соответственно величины, равные правым частям, если в последние вместо производных подставлены значения

$$\dot{\rho}_0=0, \qquad \dot{\sigma}_0=0,$$
$$\dot{\theta}_0=L_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0\left(\frac{1}{I_x}-\frac{1}{I_y}\right),$$
$$\dot{\varphi}_0=L_0\cos\theta_0\left(\frac{1}{I_z}-\frac{1}{I_x}\sin^2\varphi_0-\frac{1}{I_y}\cos^2\varphi_0\right);$$
$$\dot{\psi}_0=L_0\left(\frac{1}{I_x}\sin^2\varphi_0+\frac{1}{I_y}\cos^2\varphi_0\right).$$

б) Заменим теперь в правых частях уравнений (1)—(6) $\dot{\rho}$ и $\dot{\sigma}$ на $\dot{\rho}_0$ и $\dot{\sigma}_0$, а $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ на

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\dot{\vartheta}}&=L\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{I_x}-\frac{1}{I_y}\right)+\dot{\sigma}_0\sin\rho\cos\psi-\dot{\rho}_0\sin\psi,\\
\bar{\dot{\varphi}}&=L\cos\vartheta\left(\frac{1}{I_z}-\frac{1}{I_x}\sin^2\varphi-\frac{1}{I_y}\cos^2\varphi\right)+\\
&\quad+\frac{1}{\sin\vartheta}(\dot{\rho}_0\cos\psi+\dot{\sigma}_0\sin\rho\sin\psi),\\
\bar{\dot{\psi}}&=L\left(\frac{1}{I_x}\sin^2\varphi-\frac{1}{I_y}\cos^2\varphi\right)-\\
&\quad-\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}(\dot{\rho}_0\cos\psi+\dot{\sigma}_0\sin\rho\sin\psi)-\dot{\sigma}_0\cos\rho_0.
\end{aligned}\right\}\quad (*)$$

Применим к полученной системе один шаг метода Рунге—Хейна—Кутта. Пусть этот шаг будет h (о выборе его речь пойдет ниже).

в) Следующий шаг метода Рунге—Хейна—Кутта применяется к системе, которая получается так же, как в б), но вместо величин $\dot{\rho}_0$ и $\dot{\sigma}_0$ следует употребить $\dot{\rho}_1$ и $\dot{\sigma}_1$ ($\dot{\rho}_1$ и $\dot{\sigma}_1$—значения $\dot{\rho}$ и $\dot{\sigma}$ в точке $t_1=t_0+h$, которые уже вычислены согласно б)).

Теперь о выборе шага h. Пусть фиксирован шаг h_0. Решаем систему с этим шагом так, как в б). Затем решаем ее с $h_0/2$ два шага согласно б) и в) опять от начальной точки. Если согласование хорошее, то берем $h=h_0$, в противном случае заменяем h_0 на $h_0/2$ и повторяем эту процедуру и т. д.

Наша программа (с целью сокращения времени счета) составлена так, что такой выбор шага производится лишь через каждые 50 шагов. Таким образом, программа работает, так сказать, с «кусочно-постоянным» шагом с «длиной куска» в 50 шагов.

Заметим, что наш способ выбора шага практически гарантирует не только достаточную точность метода Рунге—Хейна—Кутта, но и правомерность вышеуказанных изменений в исходной системе (1)—(6).

Замечание. Очевидно, подобная методика может быть применена к любым неразрешенным системам дифференциальных уравнений 1-го порядка. Применение ее в данном случае оправдывается тем, что функции L, ρ, σ изменяются медленно по сравнению с φ и ψ для быстро закрученного спутника.

Как показали вычисления для модельных задач, шаг интегрирования, вообще говоря, возрастает с течением времени. Это говорит о том, что решающим фактором при выборе шага является поведение φ и ψ (спутник становится менее закрученным и шаг увеличивается, при этом ρ и σ будут уже не столь медленно меняющимися функциями). По предлагаемой программе, конечно, можно прогнозировать и дальнейшее вращение этого спутника — уже не быстро закрученного. Однако при слишком малых L вышеприведенное изменение в системе (1)—(6) уже может привести к значительным погрешностям, поэтому программу нежелательно применять в случае слабо закрученного спутника — в этом случае надо пользоваться уравнениями Эйлера.

§ 4. Осреднение уравнений несимметричного спутника

Аналогично тому, как в книге Белецкого [2] написаны уравнения для симметричного спутника, дадим запись соответствующих уравнений для несимметричного ИСЗ. Будем их писать в «аэродинамических» переменных ϑ, λ, так как в этих переменных удобнее вести интегрирование и компактнее записываются сами уравнения.

При записи этих уравнений учтем все факторы, влияющие на вековую эволюцию ротационного движения (за исключением моментов сил светового давления).

Уравнения можно записать в том же виде, что и для случая симметричного спутника, а именно:

$$\begin{gathered}
\dot{\lambda}=\lambda_{а}+\lambda_{д}+\lambda_{н}+\lambda'+\lambda^{дн},\\
\dot{\theta}=\bar{\theta}_{а}+\bar{\theta}_{д}+\bar{\theta}_{н}+\theta'+\theta^{дн},\\
\dot{L}=(M_z^{дн}\cos\lambda-M_y^{дн}\sin\lambda)\sin\theta+M_x^{дн}\cos\theta-p_{а}L, \qquad (65)\\
\frac{d\cos\vartheta}{dt}=f^{да}+f^{дн},\\
M^{д}_{x,\,y,\,z}=M^{да}_{x,\,y,\,z}+M^{дн}_{x,\,y,\,z},\\
P_{а}=\mathrm{const},
\end{gathered}$$

где $\lambda_а$, $\bar{\theta}_а$—аэродинамические члены, $\lambda_д$, $\bar{\theta}_д$—гравитационные и часть аэродинамических, λ', $\bar{\theta}'$—члены, обусловленные эволюцией орбиты, $\lambda_н$, $\dot{\theta}_н$—магнитные члены, $M^{да}_{x,y,z}$, $f^{да}$—члены аэродинамической диссипации, $M^{дн}_{x,y,z}$, $f^{дн}$—члены, обусловленные вихревыми токами. Уравнения записаны для случая круговой орбиты.

Остановимся на части аэродинамических и гравитационных членов. Общая теория ротационного движения ИСЗ под действием возмущений, имеющих силовую функцию, применима к случаю гравитационных и части аэродинамических.

Заметим, что на круговой орбите стоит учесть лишь член с

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \bar{\rho}_а \frac{\sin^2\nu}{(1+\cos\nu)^2}\,d\nu,$$

так как остальные величины I_i дают нули. Поэтому напишем

$$\lambda_а+\lambda_д=-N\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\cos\theta\sin^2\lambda,$$

$$\bar{\theta}_а+\bar{\theta}_д=-N\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\sin\theta\sin\lambda\cos\lambda,$$

где положено

$$\begin{gathered}N=\frac{3}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{L}\left\{I_x+I_y-2I_z+3\left(\frac{2T_0I_z}{L^2}-1\right)\times\right.\\ \left.\times\left[I_x+(I_y-I_x)\frac{K(k)-E(k)}{k^2K(k)}\right]\right\}-\frac{\rho_a v^2 a_1^6 I_3}{2L},\\ k^2=\frac{(I_y-I_x)(2T_0I_z-L_0^2)}{(I_z-I_y)(L^2-2T_0I_x)},\\ I_z\geqslant I_y\geqslant I_x.\end{gathered} \tag{66}$$

Запишем члены, обусловленные эволюцией орбиты (орбита круговая). Они будут иметь вид:

$$\begin{gathered}\lambda'=-\dot{\Omega}(\sin i+\cos i\operatorname{ctg}\theta\sin\lambda),\\ \theta'=\dot{\Omega}\cos i\cos\lambda.\end{gathered} \tag{67}$$

Здесь производная от долготы восходящего узла равна

$$\begin{gathered}\dot{\Omega}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\breve{I}_2R_3^2\omega_0}{(R_3+h)^2}\cos i,\\ \breve{I}_2=(1082{,}65\pm0{,}02)\,10^{-6}.\end{gathered} \tag{68}$$

Чтобы проводить осреднение по φ и ψ в магнитных возмущающих моментах на круговой орбите, следует сделать одно предположение, а именно: собственный магнитный момент ИСЗ и магнитный момент, индуцируемый в мягком железе спутника, направлены по оси cz. При невыполнении этого условия следует пользоваться неосредненными уравнениями. При выполнении этого условия магнитные члены выглядят так:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{н}} &= -\frac{I_0\mu_E}{981R^3L}\left\{\cos\vartheta\,(I_{\bar x}\alpha_\theta+I_{\bar y}\beta_\theta)+\frac{\mu_E}{R^3}k_{\text{н}}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\times\right.\\ &\left.\times[(I_{\bar x\bar x}-I_{\bar z\bar z})\,\hat\alpha\alpha_\theta+(I_{\bar y\bar y}-I_{\bar z\bar z})\,\hat\beta\beta_\theta+I_{\bar x\bar y}\,(\hat\alpha\beta_\theta+\hat\beta\alpha_\theta)]\right\},\\ \bar\theta_{\text{н}} &= \frac{I_0\mu_E}{981R^3L}\left\{\cos\vartheta\,(I_{\bar x}\alpha_\lambda+I_{\bar y}\beta_\lambda)+\frac{\mu_E}{R^3}k_{\text{н}}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\times\right.\\ &\left.\times[(I_{\bar x\bar x}-I_{\bar z\bar z})\,\hat\alpha\alpha_\lambda+(I_{\bar y\bar y}-I_{\bar z\bar z})\,\hat\beta\beta_\lambda+I_{\bar x\bar y}\,(\hat\alpha\beta_\lambda+\hat\beta\alpha_\lambda)]\right\},\end{aligned} \tag{69}$$

где обозначено

$$\left.\begin{gathered}\hat\alpha=\cos\theta\cos i+\sin\theta\sin\lambda\sin i,\\ \hat\beta=\cos\theta\sin i-\sin\theta\sin\lambda\cos i,\\ \alpha_\theta=-\cos i+\operatorname{ctg}\theta\sin\lambda\sin i,\\ \beta_\theta=-\sin i-\operatorname{ctg}\theta\sin\lambda\cos i,\\ \alpha_\lambda=\cos\lambda\sin i,\quad \beta_\lambda=-\cos\lambda\cos i,\quad I_{\bar x}=-\frac{3}{2}\sin i\cos i,\\ I_{\bar z}=0,\quad I_{\bar y}=1-\frac{3}{2}\sin^2 i\quad I_{\bar y\bar y}=1-\frac{3}{2}\sin^2 i+\frac{27}{8}\sin^4 i,\\ I_{\bar z\bar z}=\frac{9}{8}\sin^2 i\quad I_{\bar x\bar y}=-\frac{3}{2}\sin i\cos i\left(1-\frac{9}{4}\sin^2 i\right),\\ I_{\bar x\bar x}=\frac{27}{8}\sin^2 i\cos^2 i;\quad \frac{\mu_E}{R^3}=0{,}315\left(\frac{R_3}{R_3+h}\right)^3,\\ k_{\text{н}}=\frac{k_{33}}{I_0}.\end{gathered}\right\} \tag{70}$$

Наибольшая трудность состоит в написании членов, обусловленных вихревыми токами, ибо не удается осреднить уравнения, подобные уравнениям (1.4), (1.5) [2]. Однако для учета этого фактора можно воспользоваться уравнениями (9.22). Мы также предполагаем, что вихревые токи приводят к возникновению дополнительного магнитного момента, направленного вдоль оси cz. Члены, обусловленные вихревыми токами, можно записать так:

$$\begin{aligned}\lambda^{\text{дн}} &= -\frac{1}{L\sin\theta}\left(M_y^{\text{дн}}\cos\lambda+M_z^{\text{дн}}\sin\lambda\right),\\ \bar\theta^{\text{дн}} &= \frac{1}{L}\,[(M_z^{\text{дн}}\cos\lambda-M_y^{\text{дн}}\sin\lambda)\cos\theta-M_x^{\text{дн}}\sin\theta],\end{aligned} \tag{71}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} M_x^{\text{дн}} &= \cos i\, M_{\bar{x}} + \sin i\, M_{\bar{y}}, \\ M_y^{\text{дн}} &= -\sin i\, M_{\bar{x}} + \cos i\, M_{\bar{y}}, \\ M_z^{\text{дн}} &= M_{\bar{z}}; \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} M_{\bar{x}} &= -\alpha^{\text{н}} \left[(I_{\bar{y}\bar{y}} + I_{\bar{z}\bar{z}})\, l_{\bar{x}} - I_{\bar{y}\bar{x}} l_{\bar{y}} \right], \\ M_{\bar{y}} &= -\alpha^{\text{н}} \left[(I_{\bar{x}\bar{x}} + I_{\bar{z}\bar{z}})\, l_{\bar{y}} - I_{\bar{y}\bar{x}} l_{\bar{x}} \right], \\ M_{\bar{z}} &= -\alpha^{\text{н}} \left[I_{\bar{y}\bar{y}} + I_{\bar{x}\bar{x}} \right] l_{\bar{z}}, \end{aligned} \tag{73}$$

$$\alpha^{\text{н}} = \frac{k_z}{I_z} \cdot 0{,}315 \left(\frac{R_3}{R_3 + h} \right)^6, \quad l_{\bar{x}} = \cos i l_x - \sin i l_y,$$

$$l_{\bar{y}} = \sin i l_x + \cos i l_y, \quad l_{\bar{z}} = l_z,$$

$$l_x = L \cos \theta,$$

$$l_y = -L \sin \theta \sin \lambda,$$

$$l_z = L \sin \theta \cos \lambda.$$

Далее будем иметь

$$f^{\text{дн}} = K_{\text{н}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta. \tag{74}$$

Член аэродинамической диссипации по аналогии с (74) запишем так:

$$f^{\text{да}} = K_{\text{а}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta. \tag{75}$$

Итак, система (1)—(6) записана с учетом всех факторов. Решалась система численно методом Рунге-Кутта на М-20 (речь идет о модельной задаче). Результаты интегрирования следующие: за 50 оборотов спутника L и $\cos\vartheta$ изменялись примерно на 2%, а λ и ϑ незначительно.

§ 5. Методы определения неизвестных параметров по результатам летних испытаний

1°. Сначала сформулируем задачу. В уравнениях (1)—(6) начальные значения и параметры D_x^T, D_y^T, D_z^T, k_1, k_2, k_3 известны довольно грубо. Требуется их уточнить, если значения функций $L(t)$, $\rho(t)$, $\sigma(t)$, $\vartheta(t)$ в точках $t_1, t_2, \ldots, t_N$ известны из телеметрии. Обозначим значения этих функций в точке t_j через $\tilde{x}_{ij}$ ($i=1, 2, 3, 4$). Значения же этих функций и соответствующие уточненным начальным значениям и параметрам обозначим через x_{ij}. Будем считать, что дисперсии случайных величин $\frac{L(t_j)}{L(t_0)}$, $\rho(t_j)$, $\sigma(t_j)$, $\vartheta(t_j)$, средние значения которых (как указывалось выше) известны из телеметрии, одинаковы. Мы воспользуемся методом наименьших квадратов.

Для удобства записи несколько изменим обозначения. Именно

$$x_{ij} \equiv \frac{L(t_j)}{\tilde{L}(t_0)}, \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{\tilde{L}(t_j)}{\tilde{L}(t_0)}.$$

Составим функционал

$$\Phi(b_1, \ldots, b_{12}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{N} (x_{ij} - \tilde{x}_{ij})^2, \quad b_1 = D_x^T, \ldots,$$

$b_1, \ldots, b_{12}$ находим из условия локального $\min \Phi$. Этот минимум будем находить одним из методов градиента, а именно методом скорейшего спуска. Алгоритм метода таков.

Выберем начальное приближение (берутся данные грубые значения).

$$(b_1^0, \ldots, b_{12}^0) \equiv \vec{b}^0!$$

Вычисляется последовательность векторов $\vec{b}^1, \vec{b}^2, \ldots$ до тех пор, пока $\vec{b}^n$ и $\vec{b}^{n+1}$ с требуемой точностью не совпадут: $\vec{b}^{n+1}$ будет искомым вектором.

Последовательность вычисляется так:

$$\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n - \lambda \operatorname{grad} \Phi(\vec{b}^n),$$

где постоянная λ такова, что функционал $\Phi(\vec{b}^n - \mu \operatorname{grad} \Phi(\vec{b}^n))$ достигает своего локального min при $\mu = \lambda$. Вышеописанный метод реализован в программе для случая усредненных уравнений.

2°. Кроме того, уточнение параметров $(k_x, k_y, k_z, k_1, k_2, k_3)$ производилось еще одним способом. Суть его состоит в следующем. Пусть из телеметрии известны L, ρ, σ, θ, φ, ψ для моментов времени $t_1, \ldots, t_n$. Пользуемся формулами (1)—(6) для определения возмущающих моментов M_1, M_2 и M_3. При этом производные от L, ρ, $\ldots$, ψ находятся с помощью формул численного дифференцирования.

Уточнение искомых параметров по полученным значениям M_1, M_2, M_3 проводилось методом наименьших квадратов.

Литература

1. В. В. Белецкий. Движение искусственного спутника около центра масс. «Наука», М., 1965.
2. Ф. Л. Черноусько. ПММ, 28, вып. 1, 1963.
3. В. С. Новоселов, Г. Г. Агишев, А. А. Малков. Сб. Проблемы небесной механики и астродинамики, М., 1970.