Проблема Вейерштрасса ("Что, где, когда" и Зачем…)

В седьмом томе журнала Acta Mathematica (1885/1886) на конкурс в честь предстоявшего шестидесятилетия Короля Швеции и Норвегии Оскара II жюри в составе Г.Миттаг-Леффлера, К.Вейерштрасса и Ш.Эрмита были предложены четыре проблемы (сформулированные на французском и немецком), автором первой и, как оказалось, наиболее значительной из которых был К.Вейерштрасс. В русском переводе формулировка проблемы представляется следующей:*"Для заданной системы из N притягивающихся между собой тел, подчиняющихся законам динамики Ньютона в предположении, что никакие два тела не сталкиваются между собой, найти решение уравнений движения в виде равномерно сходящихся степенных рядов, зависящих от времени и начальных данных, для всех значений времени и начальных данных."* Степенные ряды фигурируют здесь по понятной причине – Вейерштрасс предполагал [1, §5], что в методе построения глобальных решений, об открытии которого в 1858 году Дирихле сообщил Кронекеру, эти решения строились при помощи степенных разложений.

К назначенной предельной дате 01.06.1888 проблема не была решена, но приз был присужден Анри Пуанкаре за выдающиеся достижения в теории динамических систем и небесной механике. К сожалению, не обошлось без неприятностей для Пуанкаре и жюри конкурса: в уже премированной работе обнаружилась ошибка, Пуанкаре выкупил весь тираж (это обошлось ему в сумму, превысившую приз) и через год представил новую великолепную работу (считается, что она положила начало "теории хаоса" в динамике), хотя проблема Вейерштрасса так и осталась нерешенной.

Для случая $N=3$ ее решил К.Зундман в 1912 году [2]. Его статья стала канонической работой, на которую ссылаются всегда, когда касаются вопросов, связанных с глобальным решением задачи N тел. Для общего случая $N\geq 3$ решение проблемы Вейерштрасса было опубликовано в 1978 г. в статье "Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики" [3] (эта публикация содержит текст одноименного доклада, сделанного на Всесоюзном совещании «Алгоритмы небесной механики», прошедшем в октябре 1976 г. в ИТА АН СССР, г. Ленинград). В работе исследуется ряд вопросов, о направленности которых можно судить по ее названию. В частности, двумя различными методами была решена проблема Вейерштрасса для общей автономной полиномиальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и, тем самым, была решена и проблема Вейерштрасса для задачи N тел при любом $N\geq 3$, так как ее уравнения легко сводятся к полиномиальным. Все же, так как уравнения задачи N тел имеют специальный вид, то решение для этого специального случая можно получить при помощи более простых преобразований, что и было сделано (одним из методов, предложенных в [3]) в 1979 году в статье [4], опубликованной в журнале Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Статьи [3,4] остались почти незамеченными и через 12 лет (в том же журнале Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy) была опубликована статья [5], содержащая *аналогичное* [4] *по использованным идеям и технике* решение проблемы Вейерштрасса для задачи N тел.

То, что использовались аналогичные идеи неудивительно, - в статье [6] показано, что все полученные в статьях [2],[3,4],[5] решения естественно укладываются в рамки общей схемы метода интегрирования рядами, предложенного Анри Пуанкаре еще в 1886 году [7, глава XVII]. Дело в том, что в своем методе Пуанкаре использовал введение *нового времени* при помощи конкретного преобразования, зависящего от фазовых переменных и обладающего рядом необходимых свойств, которые он доказал для этого преобразования, пояснив при этом, что преобразований с такими свойствами можно предложить бесконечно много. Зундман использовал одно из таких преобразований, которое он назвал *регуляризирующим*, а в работах [3,4] предложены, напротив, *всегда не регуляризирующие* преобразования. Одно из преобразований с таким свойством используется и в [5], где оно названо *blow-up transformation*.

Почему Пуанкаре не представил на конкурс и упомянутый выше метод интегрирования рядами, становится понятным из его аналитического резюме по своим важнейшим работам [8]. В первой части этого резюме, посвященной его достижениям в теории дифференциальных уравнений, в разделе *III.Нелинейные уравнения* он говорит: "Оставалось для нелинейных уравнений проделать то, что я сделал для линейных, то есть отыскать разложения интегралов, которые были бы *всегда* сходящимися. Мне не удалось их получить, я выяснил только, что можно бесконечным числом способов выразить эти интегралы рядами, которые сходятся для всех вещественных значений переменной. Вот каким образом я действовал…"

Далее Пуанкаре описывает схематично свой метод (а точнее, класс методов) интегрирования рядами из работы [7], а затем заключает: "Как я уже сказал выше, я привел это решение лишь в качестве примера. Подобное интегрирование имеет совершенно другой и, очевидно, гораздо менее удовлетворяющий ум характер, чем интегрирование линейных уравнений посредством фуксовых функций." После этого он обсуждает различия проблем исследования линейных и нелинейных уравнений и, наконец, делает вывод: "Но во всяком случае проблема интегрирования нелинейных уравнений не может считаться решенной."

В настоящее время естественной можно считать следующую уточненную постановку проблемы Вейерштрасса:

"В предположении, что конечное число $N \geq 3$ *материальных точек движется под действием только взаимного притяжения по закону Ньютона, требуется при любых допустимых начальных данных найти максимальное решение задачи Коши для соответствующих дифференциальных уравнений движения в параметрической форме так, чтобы время и само решение были представлены в виде равномерно сходящихся рядов по степеням некоторого параметра* $\lambda \in [0,1)$, *причем коэффициенты этих рядов зависят от начальных данных и вычисляются по известным формулам, а равномерная сходимость понимается в том смысле, что при любых допустимых начальных данных упомянутые степенные ряды сходятся равномерно по* λ *на любом замкнутом подынтервале интервала* $[0,1)$ *"* (напомним, что максимальное решение – это решение задачи Коши на максимальном интервале существования, то есть на максимальном интервале вещественной оси, на который может быть аналитически продолжено локальное решение этой задачи).

В чем ценность проблемы Вейерштрасса, какая может быть польза от ее решения? Естественно предположить, что она заключается не в самом факте решения, а в тех идеях, математических средствах и новых результатах, которые были использованы или получены в процессе работы над ней, и в перспективе их дальнейшего развития.

Как известно, идея регуляризации нашла важные продолжения в небесной механике и космической динамике (см., например, [9-11]). В то же время, проблему Вейерштрасса естественно и важно ассоциировать не только с задачей N тел и небесной механикой, а и с гораздо более общей задачей исследования и построения решений полиномиальных систем дифференциальных уравнений на конечных и бесконечных интервалах времени. В этой связи надо, прежде всего, отметить, что, как и предполагал Пуанкаре [7], дифференциальные уравнения, лежащие в основе важнейших моделей естествознания, могут быть сведены к полиномиальным системам методом дополнительных переменных [12]. Более того, такое сведение можно выполнять в автоматизированном режиме [13]. Это, в свою очередь, позволяет применять для исследования таких моделей эффективные высокоточные численные методы (см., например, [14-16]). Интересно, что в последние годы обнаружилась связь полиномиальных систем с теорией вычислимости функций [17]: оказалось, что вычислимость функции по Шеннону эквивалентна тому, что она удовлетворяет какой-нибудь полиномиальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволило исследовать ряд принципиальных свойств таких систем [18-19], связанных с возможностью построения алгоритмов, решающих те или иные задачи. Надо отметить, что этими свойствами как раз и обладают алгоритмы, предложенные в [3,4] для решения проблемы Вейерштрасса. Эти же алгоритмы могут служить содержательными примерами, иллюстрирующими «задачу об остановке» («halting problem») – одну из принципиальных задач теории алгоритмов [20].

Литература

[1] Зигель К.Л. Лекции по небесной механике // Пер. с нем. М. ИЛ, 1959. 300с.
[2] Sundman K. Memoire sur le probleme des trois corps // Acta Math.1912. V.36. P.105-179.
[3] Бабаджанянц Л.К. Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики // Труды ИТА АН СССР. Наука. 1978. Вып. XII. С. 3-45.
[4] Babadzanjanz L.K. Existence of the continuations of the N-body problem // Celestial Mechanics. Reidel Publishing Co. 1979. N 20. P. 43-57.
[5] Wang Qiudong. The global solution of the n-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. . Kluwer Academic Publishers. 1991. N 50. P. 73-88.
[6] Babadzanjanz L.K. On the global solution of the N-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Kluwer Academic Publishers. 1993. N 56. P. 427-449.
[7] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Пер. с фр. М. ОГИЗ, 1947. 392с.
[8] Пуанкаре А. Избранные труды. Том III // М. Наука. 1974. 772с.
[9] Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. // Пер. с англ. М. Наука. 1975. 304с.
[10] Aarseth S., Zare K. A regularization of the Three-body problem // Celestial Mechanics. 1974. v.10. P. 185-205.
[11] Полещиков С.М., Холопов А.А. Теория L-матриц и регуляризация уравнений движения в небесной механике. // Сыктывкар. СЛИ. 1999. 255с.
[12] Бабаджанянц Л.К. Метод дополнительных переменных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. 2010. Вып. 1. С. 3-11.
[13] Бабаджанянц Л.К., Брэгман К.М. Алгоритм метода дополнительных переменных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. 2012. Вып. 1. С. -.
[14] Carothers David C., Parker G.Edgar, Sochacki James S., Warne Paul G. 2005. Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2005. Vol. 2005. N 40. P. 1–17.
[15] Babadzanjanz L., Sarkissian D. Taylor series method for dynamical systems with control // Journal of Mathematical Scienses. Springer New York. 2006. Vol. 139. N 6. P. 7025-7046.
[16] Бабаджанянц Л.К. Метод рядов Тейлора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. 2010. Вып. 3. С. 13-29.
[17] Bournez O., Campagnolo M.L., Graza D.S., Hainry E. Polynomial differential equations compute all real computable functions on computable compact intervals //Journal of Complexity. Elsevier. 2007. V.23. P. 317–335
[18] Graza D.S., Buescu J., Campagnolo M.L. Boundedness of the Domain of Definition is Undecidable for Polynomial ODEs // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. Elsevier. 2008. V. 202. P. 49–57
[19] Graza D.S., Buescu J., Campagnolo M.L. Computational bounds on polynomial differential equations // Applied Mathematics and Computation. Elsevier. 2009. V. 215. Iss. 4. P. 1375-1385
[20] Baaz M., Papadimitriou C.H., Putnam H.W., Scott D.S., and Harper Ch.L (Editors) // Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth. Cambridge University Press. 2011. p. 540 (Ch.10. Karl Svozil “Physical Unknowables”,10.3.2)