

Структура и содержание учебных занятий курса «Методы Монте-Карло в теории и практике».

1. Введение — 2 часа.

- 1.1. *Предисловие.* Исторические факты. Статистические методы вычислений. Пример (игла де Бюффона).
- 1.2. *Три этапа решения задачи методом Монте-Карло.* Численные и имитационные методы Монте-Карло. Построение вероятностной модели. Моделирование случайных величин с требуемым законом распределения. Проведение вычислительного эксперимента и статистическая оценка полученного результата. Доверительные интервалы.
- 1.3. *Статистическая оценка решения.* Выборочное среднее. Несмещённость и состоятельность оценки. Элементарное распараллеливание алгоритмов Монте-Карло. Оценка решения на основе теоремы Чебышёва. Скорость сходимости методов Монте-Карло. Пример с испытаниями Бернулли. Выборочная дисперсия. Случай бесконечной дисперсии. Оценка решения на основе центральной предельной теоремы Линдберга—Леви. Условие Ляпунова. Понятие вероятной ошибки. Абсолютная и относительная погрешности решения. Случай редких событий. Оценка решения на основе теоремы Фишера. Замечания о доверительных интервалах и предположении о нормальности. Алгоритм достижения заданной погрешности решения с заданной вероятностью. Итоги и выводы вводной главы.

2. Моделирование случайных величин — 8 часов.

- 2.1. *Случайные числа и цифры, псевдослучайные числа.* Равномерно распределённая случайная величина. Свойства случайных и псевдослучайных чисел (теоремы). Таблицы случайных цифр. Физические датчики и их калибровка. Элементарные алгоритмы генераторов псевдослучайных чисел. Пример фон Неймана. Требования к рекуррентным формулам. Конгруэнтный метод (пример Лемера). воспроизводимость результата статистического эксперимента, номер посева. Периодичность и отрезок аperiodичности. Дополнительные исторические примеры: от эмпирики к теории чисел.
- 2.2. *Статистическая проверка случайных чисел.* Критерий Пирсона. Сравнение гистограммы с генеральной плотностью распределения, замечания. Критерий Крамера—фон Мизеса—Смирнова. Сравнение выборочной и генеральной функций распределения, функционалы (или меры) близости. Вариационный ряд. Критерий Колмогорова—Смирнова. Исторические примеры тестов Кендалла и Бэбингтона Смита. Современные батареи тестов: DIEHARD, ENT, NIST, TestU01. Современные генераторы псевдослучайных чисел, проходящие подавляющее большинство тестов: MT19937, DX-15972-7, Brent-xor4096s.
- 2.3. *Детерминистский подход.* Равномерная распределённость по Вейлю. Необходимые и достаточные условия. Равномерная распределённость векторов. Примеры равномерных последовательностей Лемера. Отклонение группы точек. Скорость сходимости квазимонтекарловских методов. Последовательность Соболя. Последовательность Холтона.

- 2.4. *Преобразование случайных чисел.* Моделирование дискретных случайных величин. Распределение Бернулли. Имитационное моделирование. Биномиальное и гипергеометрическое распределение. Моделирование непрерывных случайных величин. Метод обратной функции. Показательное распределение. Моделирование многомерных случайных величин. Случай зависимых и независимых координат случайного вектора. Примеры. Преобразование плотности вероятностей при переходе в другую систему координат. Равномерная распределённость в шаре. Выбор случайного направления. Нормальное распределение. Метод суперпозиции. Примеры. Преобразование общего вида (получение случайной величины с нужным законом распределения из двух и более равномерно распределённых). Распределение Эрланга, биномиальное и нормальное распределения. Методы отбора. Простые и сложные области и функции. Ещё раз о нормальном распределении. Усечённые распределения. Метод фон Неймана и его расширение.
3. **Вычисление определённого интеграла** — 10 часов.
- 3.1. *Простейшие методы.* Вычисление среднего значения. Геометрический метод. Пример вычисления числа π . Понятие точности, трудоёмкости и эффективности.
- 3.2. *Улучшенные несмещённые оценки.* Уменьшение дисперсии. Выделение главной части. Интегрирование по части области. Интегрирование по части переменных. Метод существенной выборки. Понятие допустимой плотности. Симметризация подинтегральной функции. Простая и сложная симметризация. Выборка по группам. Типическая выборка. Двухэтапные схемы расчёта. Случайные квадратурные формулы. Леммы, теоремы и примеры.
- 3.3. *Использование смещённых оценок.* Взвешенная равномерная выборка. Метод с поправочным множителем. Теорема и примеры. Сводная таблица рассмотренных методов на общем примере.
- 3.4. *Интегралы, зависящие от параметра.* Зависимые и независимые испытания. Численное дифференцирование оценки интеграла. Пример.
4. **Решение линейных уравнений** — 10 часов.
- 4.1. *Интегральные преобразования.* Итерации функций. Пример. Вычисление линейных функционалов. Построение случайных траекторий. Начальная и переходная плотности, веса. Вычисление значений итераций: фиксированная начальная точка, средние по области значения, оценка коэффициентов Фурье. Случайные траектории с поглощением. Теоремы и замечания.
- 4.2. *Неоднородные интегральные уравнения.* Постановка задачи. Ряд Неймана. Условия сходимости в среднем, равномерной и абсолютной сходимости. Следствие к сходимости в среднем. Оценка линейных функционалов от последовательного приближения (отрезок ряда Неймана). Оценка линейных функционалов от предельного значения (сумма ряда Неймана). Бесконечные случайные траектории. Мажорантное уравнение. Теоремы. Связь дисперсий оценок, основанных на траекториях с поглощением и без. Условия конечности дисперсий оценок. Леммы. Использование сопряжённого уравнения. Связь с трудоёмкостью вычисления функций (случай вещественного симметричного ядра). Случай точечного источника. Замечания. Пример.
- 4.3. *Однородные интегральные уравнения.* Первое собственное значение и первая собственная функция. Метод Келлога. Пример. Способ установления других собственных значений и функций. Метод существенной выборки для

траекторий. Теорема. Другие методы расчёта. Пример (интегральное уравнение Пайерлса).

- 4.4. *Системы линейных алгебраических уравнений.* Алгебраическая система как частный случай интегрального уравнения. Особенности построения случайной траектории (цепи Маркова с конечным числом состояний). Матричный ряд как аналог ряда Неймана. Достаточные условия сходимости. Случай цепи с поглощением. Теоремы. Вычисление одной компоненты решения. Пример. Обратная матрица. Пример. Целесообразность: матрицы большого размера и вычисления в режиме реального времени.
- 4.5. *Дифференциальные уравнения.* Сведение к алгебраической системе, дискретизация. Граничные и внутренние узлы, ранг матрицы. Разностные аналоги производных. Пример (уравнение Пуассона). Пример (уравнение Лапласа). Связь шага численного дифференцирования с количеством статистических испытаний. Сведение к интегральному уравнению. Сопряжённый оператор и вторая формула Грина. Параметрикс. Функция Леви. Функция Грина. Блуждание по сферам. Бессеточные методы. Пример (уравнение Лапласа).