САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра механики управляемого движения

Г.В.Алферов

С Т А Т И К А

В вопросах и ответах

Пособие для подготовки к коллоквиуму

Санкт – Петербург

2005

СОДЕРЖАНИЕ

С Т А Т И К А

в вопросах и ответах

ВОПРОС 1.
Исторические сведения о развитии статики, как раздела механики.

ОТВЕТ.
Название «механика» впервые ввёл великий мыслитель и учёный древности Аристотель, ученик Платона, живший с384 по 322 г. до нашей эры. Аристотель коснулся вопросов механики в трёх своих сочинениях: «Физика», «О небе» и « О возникновении и уничтожении». В сочинениях Аристотеля, носящих в основном философский, а не естественно научный характер, излагается учение о равновесии рычага и других машин. Во времена Аристотеля механика развивалась очень медленно. Можно отметить только один случай очень быстрого, почти скачкообразного развития механики, связанный с именем величайшего механика всех времён и народов - сиракузского учёного Архимеда (287 –212 г. до н.зры.), который дал механике настоящее научное обоснование, включив её в область точных наук. В своих сочинениях Архимед изложил теорию равновесия рычага, находящегося под воздействием параллельных сил, создал учение о центре тяжести тел, а также исследовал равновесие тел, плавающих в жидкости. Сочинения Архимеда отличаются строгостью своих выводов и изяществом метода. На протяжении почти двух тысяч лет после Архимеда не было учёных такого большого значения. Среди исследователей за этот период можно упомянуть Герона из Александрии, занимавшегося теорией равновесия простых машин. В конце III века нашей эры оставил после себя работы по механике Папп Александрийский. В частности, ему принадлежат две важные теоремы о центре тяжести.
Среди деятелей эпохи Возрождения особенно выделялся гениальный художник, геометр и инженер итальянец Леонардо да Винчи (1452 – 1519г.г.), которому принадлежат исследования в области теории механизмов, трения в машинах и движения по наклонной плоскости.
Далее следует упомянуть о работе голландца Симона Стевина (1548-1620), который исследовал законы равновесия тел на наклонной плоскости и в результате пришел к выводу основных законов статики. Он открыл закон равновесия трёх сил, пересекающихся в одной точке.
В геометрическую статику большой вклад внесли французские учёные П. Вариньон (1654-1722г.г.) и Л. Пуансо (1777-1859г.г.). Вариньон установил в окончательном виде понятие момента силы относительно точки и доказал теорему о моменте равнодействующей, носящую его имя. В своей работе « Проект новой механики» (1687г.) Вариньон, пользуясь этой теоремой, а также методом сложения и разложения сил, даёт строгую статическую теорию простейших машин. В этой работе статика твёрдого тела получила почти полное завершение.
В 1804г. появилось сочинение Л. Пуансо «Элементы статики», в котором излагается стройная система геометрической статики. В этой работе Пуансо устанавливает понятие пары сил, разрабатывает теорию пар и затем применяет эту теорию к решению в общем случае задачи о приведении к простейшему виду системы сил, приложенных к твёрдому телу, и к выводу условий равновесия твёрдого тела.
Основоположником аналитической статики является великий французский математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736-1813г.г.). В механике Лагранж выполнил работу по систематизации полученных результатов и по их обоснованию. В основу статики Лагранж положил принцип возможных перемещений.

Дальнейшее развитие аналитической статики связано с именем великого русского математика и механика М.В. Остроградского (1801-1862 г.г). Академик М.В. Остроградский является крупнейшим представителем аналитического направления в механике и родоначальником русской школы аналитиков – механиков. Его главнейшие работы относятся к аналитической механике и её основным принципом. Так, принцип возможных перемещений Остроградский обобщил на случай так называемых неудерживающих связей, то есть связей, выражающихся математически неравенствами.
Другим выдающимся русским математиком и механиком является академик П.Л. Чебышев (1821-1894 г.г.), известный своими многочисленными математическими исследованиями и трудами по прикладной механике. Чебышев является основоположником русской школы теории механизмов и машин.
В обосновании аксиоматики статики большую роль сыграли Л. Эйлер (1707-1783 г.г.), Н.Е. Жуковский (1847-1921 г.г.), С.А.Чаплыгин (1869-1942г.г.), В.Г. Имшенецкий (1832-1892г.г.), О.И. Сомов (1815-1876г.г.).
Большой вклад в развитие графостатики внес В.Л. Кирпичёв (1845-1913г.г.)

ВОПРОС 2.
Предмет статики. Основные задачи статики.

ОТВЕТ.
Статика – раздел теоретической механики, в котором рассматривают свойства сил, приложенных к точкам твердого тела, и условия их равновесия. Основные задачи:
1. Преобразования систем сил в эквивалентные системы сил.
2. Определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

ВОПРОС 3.
Понятие материальной точки. Определение механической системы и абсолютно твердого тела (А.Т.Т.).

ОТВЕТ.
Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу. Механической системой называется любая совокупность материальных точек. А.Т.Т., или неизменяемой механической системой называют механическую систему, расстояния, между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях.

ВОПРОС 4.
Понятие силы и системы сил. Равновесная система сил. Эквивалентные системы сил.

ОТВЕТ.
Силой называют одну из векторных мер действия одного материального объекта на другой объект. Понятие силы в Т.М. является основным, первичным понятием. Системой сил называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело или в более общем случае на точки механической системы. Системой сил, эквивалентной нулю, или равновесной системой сил называют такую систему сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.
Две системы сил называются эквивалентными, если их действие по отдельности

на одно и тоже твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях. Условия эквивалентности двух систем сил $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ...\overrightarrow{F_n}\}$ *и* $\{\overrightarrow{F_1^1}, \overrightarrow{F_2^1}, ...\overrightarrow{F_k^1}\}$ выражают в форме $\{\overrightarrow{F_i}\}_{i=1}^{n} \infty \{\overrightarrow{F^1_j}\}_{j=1}^{k}$

ВОПРОС 5.

Равнодействующая сила. Уравновешивающая сила.

ОТВЕТ.

Равнодействующей силой рассматриваемой системы сил называют силу $\overrightarrow{R^x}$,
действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Это выражается в виде $\overrightarrow{R^x} \infty \{\overrightarrow{R_i}\}_{i=1}^{n}$

Уравновешивающей силой заданной системы сил называется такая сила, добавление которой к заданной дает новую систему, эквивалентную нулю. Если $\overrightarrow{R^x}$ является уравновешивающей силой системы сил $\{\overrightarrow{R_i}\}_{i=1}^{n}$, то она удовлетворяет условию $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ...\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{R^x}\} \infty 0$

ВОПРОС 6.

Геометрическая связь. Реакция связи.

ОТВЕТ.

Связью для абсолютно твердого тела или материальной точки называются материальные объекты (тела и/или точки), которые ограничивают свободу перемещения рассматриваемого твердого тела или материальной точки.

Примеры связей: стол, поддерживающий компьютер; трос, на котором висит груз; рельсы, на которые опирается вагон. В машинах связями для любой детали служат другие детали, взаимодействующие с данной.

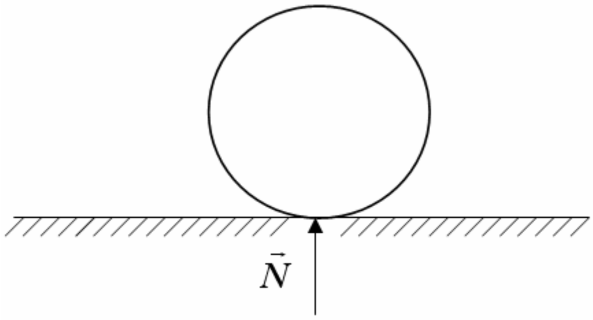
Реакцией связи называется сила, с которой связь действует на тело. Реакция связи возникает в результате действия тела на связь. Направление реакции связи противоположно направлению, в котором связь препятствует перемещению тела.

Если на перемещение тела или материальной точки не наложено никаких ограничений, то они называются свободными.

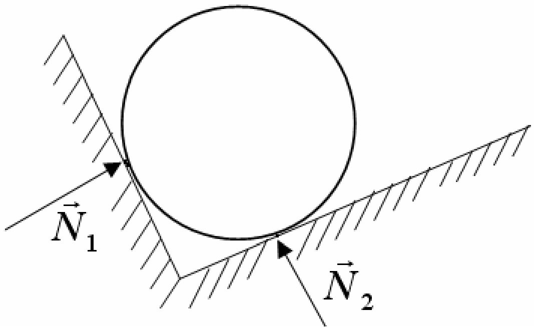
Работы И.Ньютона (1642-1727гг.), заложившие основы классической механики, содержали законы движения свободных систем материальных точек. Это объясняется тем, что в XVII веке доминирующие значение имели задачи астрономии. Однако, развитие техники в XVIII веке привело к развитию механики несвободных систем, так как машины и механизмы являются несвободными системами материальных точек.

Если в месте соприкосновения тела со связью нет трения, связь называется идеальной. Реакция идеальной связи направлена по нормали к соприкасающимся поверхностям в точке контакта.

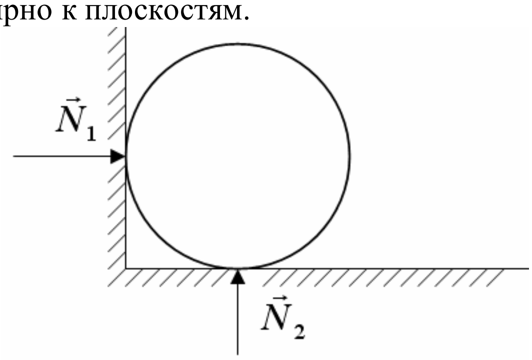
Рассмотрим несколько примеров идеальных связей.



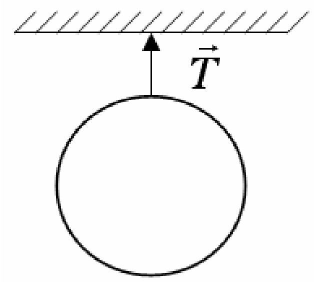
На этом рисунке изображен шар, лежащий на горизонтальной плоскости. Плоскость не дает шару опускаться. Поэтому $\vec{N}$ направлена вертикально вверх.



На втором рисунке шар лежит на двух плоскостях. Реакции этих плоскостей $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ направлены перпендикулярно к плоскостям.



На третьем рисунке изображен шар, лежащий на горизонтальной плоскости и касающийся вертикальной стенки.
Реакция связи возникает в результате действия тела на связь. Шар действует на связи своей силой тяжести. Эта сила не может прижать шар к вертикальной стенке. Поэтому сила $\vec{N}_1$ равна нулю и ее изображать не нужно.



На этом рисунке гибкая нерастяжимая нить, закрепленная в точке А, не препятствует шару перемещаться в любом направлении, кроме одного: шар не может удалиться от точки А более чем на длину нити. Поэтому реакция нити всегда направлена вдоль нити в сторону закрепленного конца.

ВОПРОС 7.
Аксиомы статики.

ОТВЕТ.
1. Аксиома об уравновешенности двух сил, приложенных к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если силы направлены в разные стороны вдоль общей линии действия и модули их равны.
2. Аксиома присоединения и исключения уравновешенных систем сил: действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней добавить или из неё исключить уравновешенную систему сил.

Следствие 1.

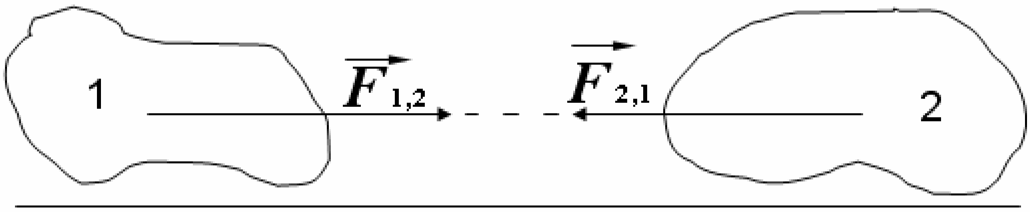
Силу, приложенную к точке абсолютно твердого тела, можно переносить в любую точку линии её действия.

3. Аксиома параллелограмма сил.

Две силы, приложенные к точке тела, можно заменить равнодействующей силой, приложенной в той же точке, которая определяется величиной и направлением диагонали параллелограмма, построенного на этих силах.

Следствие 2.

Если абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя, над действием трёх непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.



4. Аксиома действия и противодействия.

Действие всегда равно и прямо противоположно противодействию, т.е.

1). $\overrightarrow{F_{1,2}} = \overrightarrow{F_{2,1}}$;

2). силы $\overrightarrow{F_{1,2}}$ *и* $\overrightarrow{F_{2,1}}$ действуют по одной прямой. Заметим, что силы $\vec{F}_{1,2}$ *и* $\overrightarrow{F_{2,1}}$ нельзя рассматривать как уравновешенную систему сил, так как они приложены к различным телам.

5. Аксиома связи.

Связь можно отбросить и заменить её силой, называемой реакцией связи.

6. Аксиома отвердевания

Если механическая система находится в состоянии равновесия, то оно сохранится, если на систему наложить дополнительные связи или если она отвердеет (станет абсолютно твердым телом).

ВОППОС 8.

Трение скольжения.

ОТВЕТ.

Трение между твердыми телами бывает трех видов:

- Трение скольжения, соответствующее поступательному движению соприкасающихся тел относительно друг друга;
- Трение качения (например, колеса по рельсу);
- Трение верчения (например, в подпятнике), имеющее по своей природе много общего с трением скольжения.

Простейшие свойства трения скольжения или трения первого рода установлены Г.Амонтоном (1663-1705г.г.) и Ш.Кулоном (1736-1806г.г.).

<u>Свойство 1.</u> Сила трения направлена в сторону, прямо противоположную направлению движения тела относительно поверхности связи.

<u>Свойство 2.</u> Величина силы трения в состоянии предельного равновесия прямо пропорциональна величине нормальной составляющей реакции поверхности связи

$$F_{max} = fN$$

Коэффициент пропорциональности f называется статическим коэффициентом трения скольжения.

До достижения телом состояния предельного равновесия величины силы трения удовлетворяет неравенству

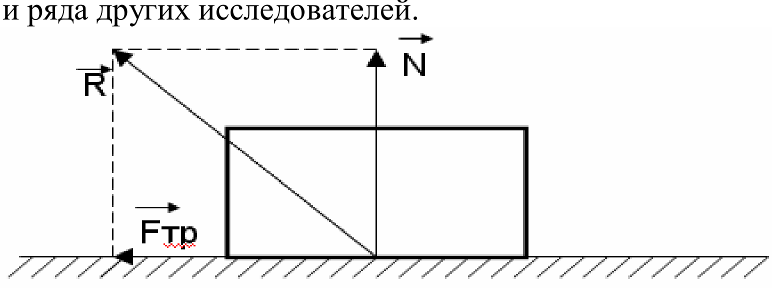
$F_{тр} \leq fN$

После начала движения коэффициент трения скольжения несколько уменьшается и принимает значение динамического коэффициента трения скольжения

$f_{дин} < f$

Согласно кулоновским законам трения коэффициенты трения скольжения не зависят не от давления, ни от величины трущихся поверхностей, ни от скорости. Они зависят физической природы трущихся тел, шлифовки поверхностей. Изложенные вопросы о трении скольжения относятся только к сухому трению. При наличии смазки существуют свои законы трения.

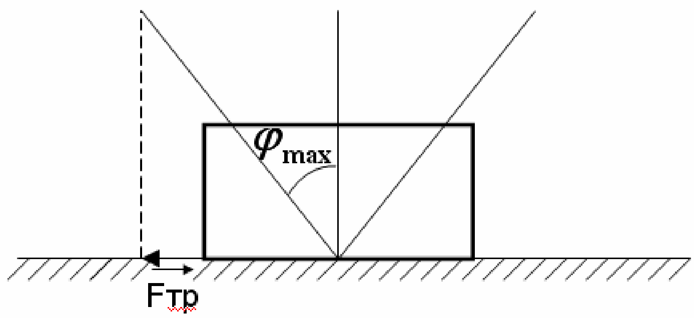
Основоположником теории трения при наличии смазки является русский ученый Н.П.Петров (1836-1920г.г.). Дальнейшее развитие эта теория получила в работах Н.Е.Жуковского и ряда других исследователей.



Определения.

1. Равнодействующая $\vec{R}$ нормальной реакции и силы трения называется полной реакцией.
2. Равнодействующая $\vec{R}_{max}$ нормальной реакции и максимальной силы трения называется максимальной полной реакцией.
3. Угол между максимальной полной реакцией и нормальной реакцией называется углом трения φ_{max}.

Из определения следует, что $tg\varphi_{max}=f$.



Построим конус, ось которого совпадает с направлением нормальной реакции, а угол между образующей конуса и нормальной реакцией равен углу трения. Полученный конус называется конусом трения. Из рисунка видно, что полная реакция лежит либо внутри, либо на поверхности конуса трения.

Конусом трения объясняется явление заклинивания узлов машин. А именно: если на тело лежащее, на негладкой плоскости, оказывает давление сила, линия действия которой лежит внутри конуса трения, то, сколь бы велика ни была такая сила, она не приведет тело в движение.

ВОПРОС 9.

Основные этапы решения задач статики.

ОТВЕТ.

1. Освобождение от внешних связей. Освобождаем рассматриваемую механическую систему от внешних связей, заменяя их реакциями.

2. Решение. Освобождённую от внешних связей механическую систему расчленяем на отдельные тела и действие тел друг на друга заменяем силами, согласно аксиомам связи и равенства действия и противодействия.
3. Равновесие. Рассматриваем состояние покоя выделенных тел или частей системы тел, считая их отвердевшими, и применяя к ним условия равновесия сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу.

ВОПРОС 10.

Понятие момента силы относительно точки.

ОТВЕТ.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется, взятое с соответствующим знаком, произведение величины силы на расстояние h от точки O до линии действия силы $\overrightarrow{F_0}$. Это произведение берётся со знаком плюс, если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело против хода часовой стрелки, и со знаком -, если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело по ходу часовой стрелки, то есть $m_0\vec{F} = Fh,\ m_0\vec{F_1} = -F_1h_0$. Длина перпендикуляра h называется плечом силы $\vec{F}$ точки O. Эффект действия силы т.е. угловое ускорение тела больше, чем больше величина момента силы.

ВОПРОС 11.

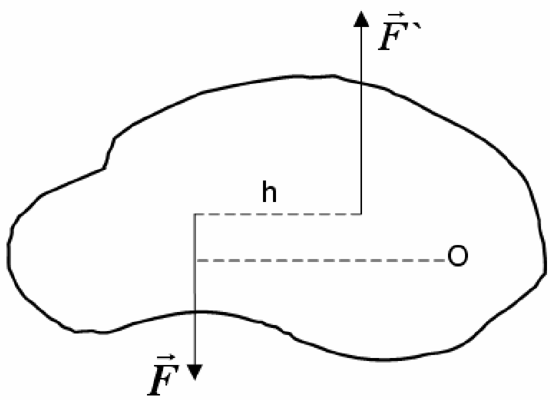
Пара сил. Момент пар сил на плоскости. Сумма моментов сил пары.

ОТВЕТ.

Парой сил называется система, состоящая из двух равных по величине параллельных сил, направленных в противоположные стороны. Расстояние h между линиями действия сил называется плечом пары. Моментом пары сил $m(\vec{F},\overrightarrow{F'})$ называется взятое с соответствующим знаком произведение величины одной из сил, составляющих пару на плечо пары. Записывается это так: $m(\vec{F},\vec{F}') \pm F \cdot h$, где Произведение берется со знаком плюс, если пара сил стремится вращать тело против хода часовой стрелки и со знаком минус, если пара сил стремится вращать тело по ходу часовой стрелки.

Теорема о сумме моментов сил пары.

Сумма моментов сил пары $(\vec{F},\vec{F}')$ относительно любой точки 0, взятой в плоскости действия пары, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары. Действительно, с одной стороны



$$m_0\overline{F} = F \cdot H, \quad m_0\overline{F}' = -F'(H-h)$$

$$m_0\vec{F} + m_0\vec{F}' = F \cdot h$$

С другой стороны, по определению $m(\overline{F},\overline{F}')=F\cdot h$ m, следовательно,

$$m(\overrightarrow{F},\overrightarrow{F}')=m_0\overrightarrow{F}+m_0\overrightarrow{F}'$$

Характерным элементом пары, определяющим ее действие на тело, является момент пары.

ВОПРС 12.

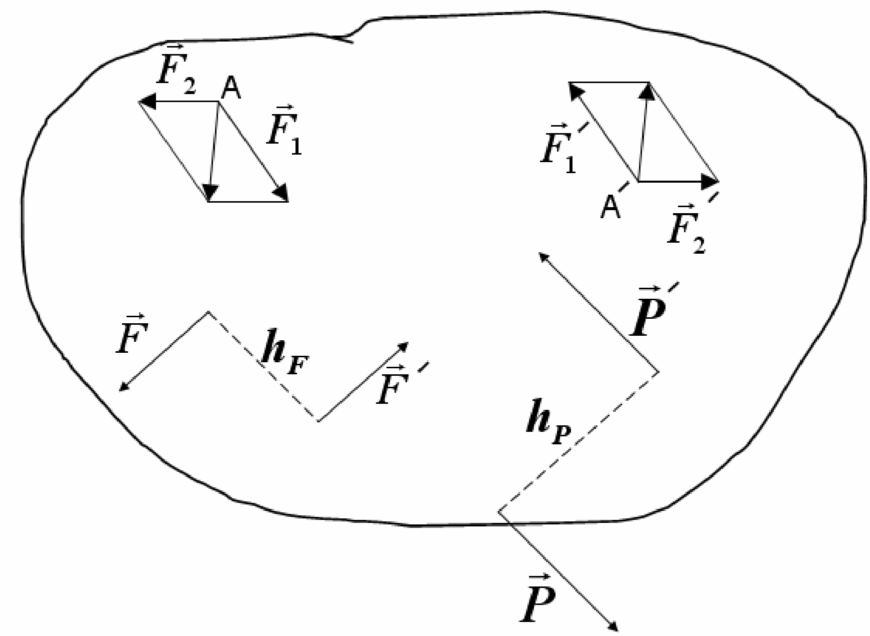
Теорема об эквивалентных парах. Следствия.

ОТВЕТ.

Теорема. Две пары, моменты которых равны между собой, эквивалентны, т.е. $(\vec{F},\vec{F}')\sim(\vec{P},\vec{P}')$

Следствие 1. Пару сил можно переносить в любое место плоскости ее действия а также поворачивать на любой угол и изменять плечо и величину сил пары,
сохраняя при этом момент пары.

Следствие 2. Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть
уравновешена одной силой, лежащей в плоскости пары.



ВОПРОС 13.

Сложение и условие равновесия системы пар на плоскости.

ОТВЕТ.

1. Теорема о сложении пар, лежащих в одной плоскости. Систему пар, как угодно расположенных в одной плоскости, можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов данных пар, т.е. $m(\vec{P},\vec{P}')=\sum_i m(\overrightarrow{F_i},\overrightarrow{F_i})$

2. Теорема о равновесии системы пар на плоскости.

Для того, чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием системы пар, как угодно расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех пар была равна нулю, то есть $\sum_i m(\overrightarrow{F_i},\overrightarrow{F_i})=0$

ВОПРОС 14.

Лемма Пуансо о переносе силы.

ОТВЕТ.

Лемма Пуансо:

Силу $\vec{F}$, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить параллельно самой себе в любую точку О тела, добавляя при этом пару, момент которой равен моменту силы $\vec{F}$ относительно точки 0, то есть $\vec{F} \sim \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\}$, *где* $\vec{F}' = \vec{F} = -\vec{F}''$, $m(\vec{F}, \vec{F}'') = m_0 \vec{F}$

ВОПРОС 15.

Приведение плоской системы сил к данному центру. Главный вектор системы сил, главный момент системы сил.

ОТВЕТ.

Теорема.

Произвольную плоскую систему сил можно заменить одной силой $\vec{R}$, приложенной в произвольной точке 0 плоскости, равной геометрической сумме этих сил и парой $(\vec{P}, \vec{P}')$, момент которой равен алгебраической сумме моментов всех данных сил относительно той же точки 0, то есть $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n \sim \{\vec{R}, (\vec{P}, \vec{P}')\}$, *где* $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$, $\mathrm{M}_0 = m(\vec{P}, \vec{P}') = \sum_i m_0 \vec{F}_i$

Вектор $\vec{R}$, равный геометрической сумме векторов данных сил, называют главным вектором этой системы сил. Момент M_0 пары $(\vec{P}, \vec{P}')$, равный сумме моментов данных сил относительно точки 0, называют главным моментом системы сил.

Процедуру замены системы сил результирующей силой $\vec{R}$, приложенной к точке 0 и парой $(\vec{P}, \vec{P}')$, с моментом M_0, называют приведением системы сил к данному центру 0, а точка 0 называется центром приведения.

Заметим, что уравнение $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ – векторное, а уравнение $M_0 = m(\vec{P}, \vec{P}') = \sum_i m_0 \vec{F}_i$ – скалярное.

ВОПРС 16.

Условия равновесия произвольной плоскости системы сил.

ОТВЕТ.

Теорема 1. Для того, чтобы свободное абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этих сил относительно произвольно выбранной точки плоскости были равны нулю, т.е. должно выполняться векторное уравнение $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ и скалярное уравнение $M_0 = \sum_i m_0 \vec{F}_i = 0$

Теорема 2. Для того, чтобы свободное абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно произвольной точки 0 плоскости действия сил были равны нулю, то есть

$$\sum_i X_i = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0$$

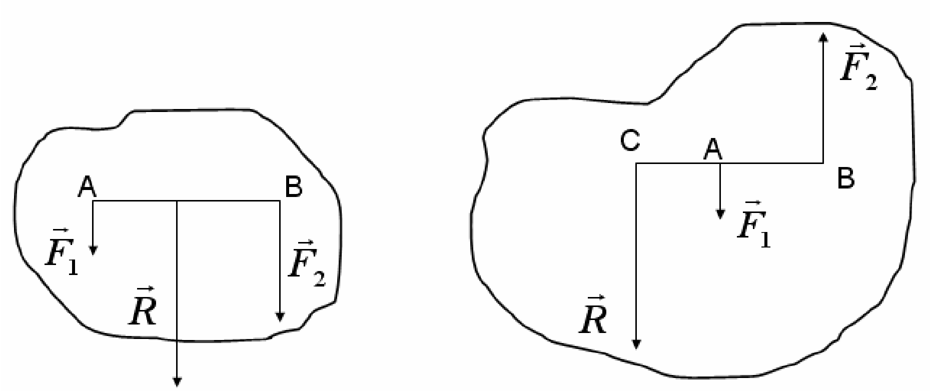
$$\sum_i m_0 \vec{F}_i = 0$$

ВОПРОС 17.
Теорема Вариньона

ОТВЕТ.
Теорема. Если система сил на плоскости эквивалентна равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки плоскости равен сумме моментов всех сил относительно той же точки, то есть

$$m_0\vec{R} = \sum_i m_0\vec{F}_i$$

ВОПРОС 18.
Сложение двух параллельных сил.



ОТВЕТ.
1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону.

Две параллельные силы, направленные в одну сторону, приводятся к одной равнодействующей силе, им параллельной и направленной в ту же сторону. Величина равнодействующей равна сумме величин данных сил, а точка ее приложения с делит расстояние между линиями действия сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные величинам этих сил, то есть

$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}, \qquad R = F_1 + F_2, \qquad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{BC}{AC}$

2. Сложение двух не равных по величине параллельных сил, направленных в противоположные стороны.

Две не равные по величине антипараллельные силы приводятся к одной равнодействующей силе им параллельной и направленной в сторону большей силы.
Величина равнодействующей равна разности величин данных сил, а точка ее приложения С, делит расстояние между линиями действия сил внешним образом на части, обратно пропорциональные величинам этих сил, то есть

$R = F_1 - F_2, \qquad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{BC}{AC}$

заметим , что равные антипараллельные силы не имеют равнодействующей, а образуют пару сил.

ВОПРОС 19.
Различные виды уравнений равновесия плоской системы сил.

ОТВЕТ.

1. Первая форма уравнений равновесия

$$\sum_i X_i = 0 \qquad \sum Y_i = 0, \qquad \sum m_0 \overrightarrow{F_i} = 0$$

Заметим, что на выбор осей координат x и y и центра моментов 0 не наложено никаких ограничений.

2. Вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил.

$$\sum X_i = 0$$

$$\sum_i m_A \overrightarrow{F_i} = 0 \qquad AB \;\; не \;\; \perp \;\; Ox$$

$$\sum_i m_B \overrightarrow{F_i} = 0$$

Для того, чтобы абсолютно твердое тело под действием плоской системы сил находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на какую-либо ось была равна нулю, а сумма моментов всех сил относительно каждой из двух точек, лежащих на линии, не перпендикулярной к выбранной оси, были равны нулю.

3. Третья форма уравнений равновесия плоской системы сил.

$$\sum_i m_A \overrightarrow{F_i} = 0$$

$$\sum_i m_B \overrightarrow{F_i} = 0$$

$$\sum_i m_C \overrightarrow{F_i} = 0$$

Для того, чтобы абсолютно твердое тело под действием плоской системы сил находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно каждой из трех точек, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

ВОПРОС 20.

Пара сил, приложенная к абсолютно твердому телу. Какими элементами определяется действие пары сил. Момент пары.

ОТВЕТ.

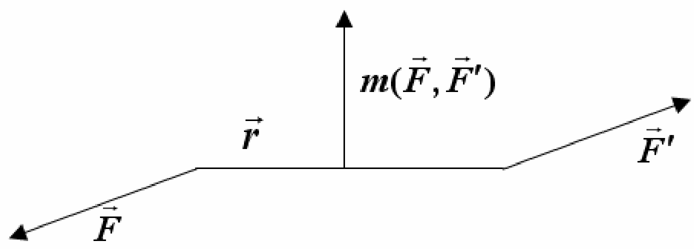
Теорема. Пару сил, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары.

Заметим, что действие пары сил на абсолютно твердое тело не зависит от положения плоскости действия пары и определяется только направлением нормали плоскости действия пары.

Действия пары сил на абсолютно твердое тело определяется тремя элементами;

- величиной момента пары,
- направлением вращения пары,
- направлением нормали плоскости действия пары.

Моментом пары называется свободный вектор равный произведению одной из сил пары на ее плечо и направленный по нормали плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение тела парой представляется против движения часовой стрелки. Вектор-момент пары полностью определяет пару сил.



$m(\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F}') = \vec r \times \vec F$

ВОПРОС 21.
Основные теоремы о парах сил

ОТВЕТ.
Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть уравновешена одной силой.
Теорема о сумме моментов сил пары.
Вектор-момент пары равен геометрической сумме вектор-моментов сил пары относительно произвольной точки 0, то есть $m(\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F}') = m_0\vec F + m_0\overrightarrow{F}'$
Теорема о сложении пар, лежащих в пересекающихся областях.
Две пары, приложенные к абсолютно твердому телу и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной им эквивалентной парой вектор-момент которой равен геометрической сумме вектор-моментов данных пар.
Заметим, что если на абсолютно твердое тело действует система пар $\{(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1}'),...,(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n}')\}$, то эту систему пар можно заменить одной равнодействующей парой $(\vec R, \vec R') \sim \{(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1}'),...,(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n}')\}$, вектор-момент $m(\vec R, \vec R')$, который равен геометрической сумме вектор-моментов данных пар

$$m(\vec R, \vec R') = \sum_{i=1}^{n} m(\overrightarrow{F_{i_0}}\ \overrightarrow{F_i}')$$

Теорема о равновесии системы пар в пространстве.
Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в покое под действием системы пар, расположенных в пространстве необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар была равна нулю, то есть $\sum_{i=1}^{n} m(\overrightarrow{F_i}\ \overrightarrow{F_i}') = 0$

ВОПРОС 22.
Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный вектор-момент.

ОТВЕТ.
Основная теорема статики. Произвольная система сил $\{\overrightarrow{F_1},...,\overrightarrow{F_n}\}$, приложенная к абсолютно твердому телу, эквивалентна системе сил, состоящей из силы $\overline{R}$, равной геометрической сумме сил, приложенной в любой точке 0 тела и пары сил $(\vec P, \vec P')$ с моментом $\overline{L_0}$, равным сумме моментов всех сил относительно точки 0, то есть

$$\{\overrightarrow{F_1},...,\overrightarrow{F_n}\} \sim \{\vec R, (\vec P, \vec P')\}$$

$$\vec R = \sum_i \overrightarrow{F_i}, \qquad \overrightarrow{L_0} = m(\vec P, \vec P') = \sum_i m_0\overrightarrow{F_i}$$

Сила, приложенная в центре приведения, называется *Главным вектором системы сил*.
Момент пары, составляющей совместно с главным вектором систему, эквивалентную произвольной системе сил, называется *главным вектор-моментом.*

Замена системы сил силой $\overline{R}$, приложенной в точке 0, и парой $(\overline{P}, \overline{P}')$ с моментом $\overline{L_0}$ называется приведением системы сил к точке 0, а сама точка 0 называется *центром приведения.*

ВОПРОС 23.
Условия равновесия системы сил в векторной и аналитической формах.

ОТВЕТ.
1. Условия равновесия системы сил в векторной форме.
Теорема.
Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием произвольной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил и главный вектор-момент системы сил относительно любого центра приведения были равны нулю.
Иначе: для того, чтобы $(F_1,...,\overrightarrow{F_n}) \sim 0$, необходимы и достаточны условия $\vec{R} = 0, \quad \overrightarrow{L_0} = 0$.
Эти условия являются векторными условиями равновесия для произвольной системы сил.
2. Условия равновесия системы сил в аналитической форме.
Теорема.
Для того чтобы абсолютно твердо тело находилось в состоянии покоя под действием произвольной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси декартовых координат и суммы моментов всех сил относительно трех осей координат также были равны нулю, то есть

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{iz} = 0 \qquad \sum_i m_x \overrightarrow{F_i} = 0$$

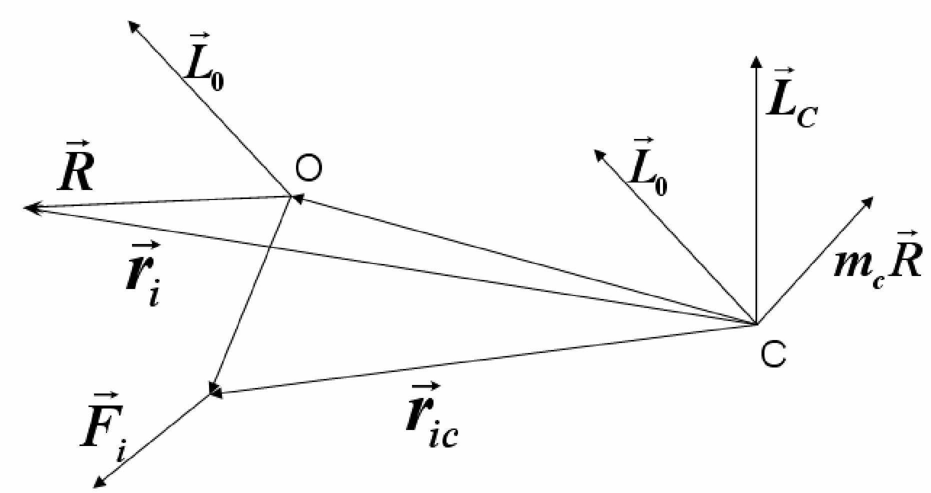
$$\sum_i m_y \overrightarrow{F_i} = 0 \qquad \sum_i m_z \overrightarrow{F_i} = 0$$

3. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.
Теорема. Для того, чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием пространственной системы параллельных сил, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма этих сил и суммы моментов сил относительно двух координатных осей, перпендикулярных силам, были равны нулю, то есть

$$\sum_i Z_i = 0, \qquad \sum_i m_x \overrightarrow{F_i} = 0, \qquad \sum_i m_y \overrightarrow{F_i} = 0$$

ВОПРОС 24.
Приведение пространственной системы сил к различным центрам.

ОТВЕТ.
Сначала приведем данную систему сил $\{\overrightarrow{F_1},...,\overrightarrow{F_n}\}$, приложенную к абсолютно твердому телу, к центру 0. Тогда получаем эквивалентную систему, которая характеризуется главным вектором $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_1}$ и главным моментом $\overrightarrow{L_0} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_0}(\overrightarrow{F_i}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overrightarrow{F_i}$



Затем приведем данную систему к новому центру С. Очевидно, главный вектор системы при этом не изменится. Главный момент изменится, так как относительно нового центра приведения момент каждой из сил системы станет другим. Найдем его изменение.

$$\overline{L_c} = \sum_{i=1}^{n} m_c \overrightarrow{F_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{r_{ic}} \times \overrightarrow{F_i}) = \sum_{i=1}^{n} [(\vec{r_i} + \overrightarrow{C0}) \times \overrightarrow{F_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \overrightarrow{F_i}) + \overrightarrow{C0} \times \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{L_0} + \overrightarrow{C0} \times \vec{R} = \overrightarrow{L_0} + m_c \vec{R}$$

Таким образом, при изменении центра приведения, главный момент изменяется на величину, равную моменту главного вектора относительно нового центра приведения.

ВОПРОС 25.
Статические инварианты.

ОТВЕТ.
Главный вектор пространственной системы сил не изменяется при перемене центра приведения, т.е. он представляет собой статический инвариант пространственной системы сил по отношению к изменению центра приведения.

Спроектируем равенство $\overrightarrow{L_c} = \overrightarrow{L_0} + m_c \vec{R}$ на направление главного вектора $\vec{R}$ и получим $\mathrm{Pr}_{\vec{R}} \overrightarrow{L_c} = \mathrm{Pr}_{\vec{R}} \overrightarrow{L_0}$.

Это равенство показывает, что проекции главных моментов относительно центров приведения О и С на направление главного вектора равны между собой, то есть проекция главного вектора-момента относительно любой точки на направление главного вектора есть второй статический инвариант пространственной системы сил.

Если левую и правую части равенства $\overrightarrow{L_c} = \overrightarrow{L_0} + m_c \vec{R}$ скалярно умножим на главный вектор $\overline{R}$, то получим $\overrightarrow{L_c} \cdot \vec{R} = \overrightarrow{L_0} \cdot \vec{R}$.

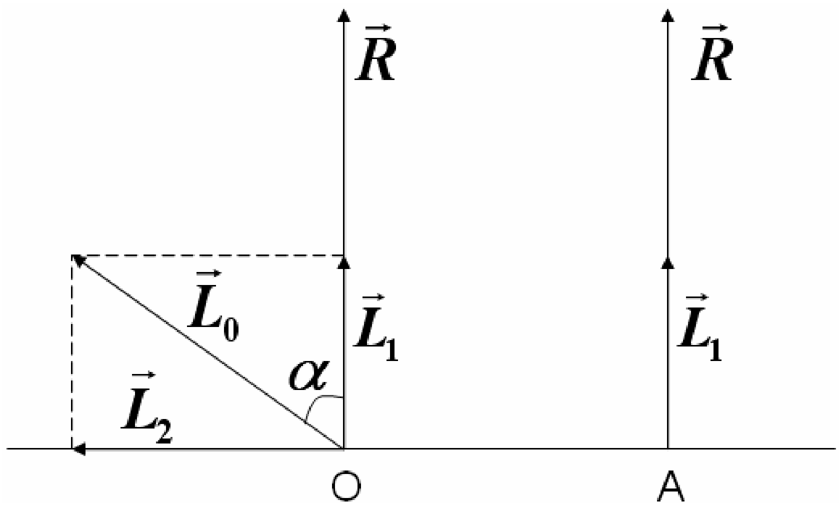
Таким образом, скалярное произведение главного-вектора момента системы относительно любой центра приведения на ее главный вектор дает другое выражение для второго статического инварианта.

ВОПРОС 26.
Динамический винт. Центральная ось симметрии.

ОТВЕТ.

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется динамой или динамическим винтом.
Теорема.
Если второй статический инвариант не равен нулю, то пространственную систему сил можно привести к динамическому винту.
Действительно, приведем систему сил к точке 0. Причем угол α между главным вектором $\vec{R}$ и главным моментом $\overrightarrow{L_0}$ не равен $\frac{\pi}{2}$. В этом случае момент $\overrightarrow{L_0}$ можно разложить на две составляющие, одна из которых $\overrightarrow{L_1}$ направлена по линии действия главного вектора $\vec{R}$, а вторая $\overrightarrow{L_2}$ перпендикулярна к ней.

$$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}$$



Главный вектор-момент $\overrightarrow{L_A}$ относительно точки А, не лежащей на линии действия главного вектора, будет

$$\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{L_0} + m_A\vec{R} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + m_A\vec{R}$$

Если в этом равенстве положить $\overrightarrow{L_2} + m_A\vec{R} = 0$, то $\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{L_1}$, то есть в точке А главный вектор-момент $\overrightarrow{L_A}$ геометрически равен вектору $\overrightarrow{L_1}$, направленному по линии действия главного вектора $\vec{R}$. Положение точки А определяем из соотношения $OA = \frac{L_2}{R} = \frac{L_0 Sin\alpha}{R}$.
Таким образом, доказано, что существует центр приведения А, для которого главный вектор и главный вектор-момент колинеарны.
Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тогда система сил приводится к одной равнодействующей силе, геометрически равной главному вектору $\vec{R}$, линия действия которой отстоит от точки 0 на расстоянии $OA = \frac{L_0}{R}$.

ВОПРОС 27.
Центральная ось симметрии – ось минимальных главных моментов.

ОТВЕТ.
Прямая, при приведении к точкам, которой данная система сил заменяется динамой или одной равнодействующей силой, называется центральной осью симметрии.
Покажем, что величина главного момента системы относительно точек центральной оси является минимальной.

Возьмем точку А на центральной оси и точку В в любом месте абсолютно твердого тела. Тогда получим следующее соотношение $\overrightarrow{L_B} = \overrightarrow{L_A} + m_B \vec{R}$

Так как вектора $\overrightarrow{L_A}$ *и* $\vec{R}$ колинеарны, то вектор $m_B \vec{R} = \overrightarrow{BA}\, x\vec{R}$ всегда перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{L_A}$. Следовательно, $\left|\overrightarrow{L_A}\right| \langle \left|\overrightarrow{L_B}\right|$. Поэтому центральную ось называют осью минимальных главных моментов.

ВОПРОС 28.
Возможные случаи приведения произвольной пространственной системы сил.

ОТВЕТ.

Первый инвариант	Главный Вектор-момент	Второй инвариант	К чему приводится Система сил
$\vec{R} = 0$	$\vec{L}_0 \neq 0$	$\vec{R} \cdot \vec{L}_0 = 0$	К паре сил
$\vec{R} \neq 0$	$\vec{L}_0 = 0$	$\vec{R} \cdot \vec{L}_0 = 0$	К равнодействующей силе $\vec{F} = \vec{R}$
$\vec{R} \neq 0$	$\overrightarrow{L_0} \neq 0$ и перпендикулярен к $\vec{R}$	$\vec{R} \cdot \vec{L}_0 \neq 0$	К равнодействующей силе $\vec{F} = \vec{R}$
$\vec{R} \neq 0$	$\overrightarrow{L_0} \neq 0$ и не перпендикулярен к $\vec{R}$	$\vec{R} \cdot \vec{L}_0 \neq 0$	К динамическому винту
$\vec{R} = 0$	$\vec{L}_0 = 0$	$\vec{R} \cdot \vec{L}_0 = 0$	К равновесию данной системы сил, то есть система сил эквивалентна нулю

ВОПРОС 29.
Центр параллельных сил. Координаты центра параллельных сил.

ОТВЕТ.
Центром параллельных сил называется точка на линии действия равнодействующей этих сил, которая не изменяет своего положения при повороте всех сил вокруг точек их приложения на один и тот же угол в одном направлении.

Точка, через которую проходит равнодействующая система параллельных сил определяется по формуле

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \overrightarrow{r_i}}{F}, \qquad \text{где} \quad F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

Проектируя обе части этого равенства на координатные оси, получаем

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{F}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{F}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{F}.$$

Откуда следует, что положение центра параллельных сил не зависит от направления сил, а зависит только от их модулей и их точек приложения. Это позволяет сформулировать важное свойство системы параллельных сил, а именно: если все силы заданной системы параллельных сил повернуть на один и тот же угол, сохраняя неизменными их точки приложения, то и равнодействующая этих сил повернется на тот же угол, причем положение центра параллельных сил не изменится.

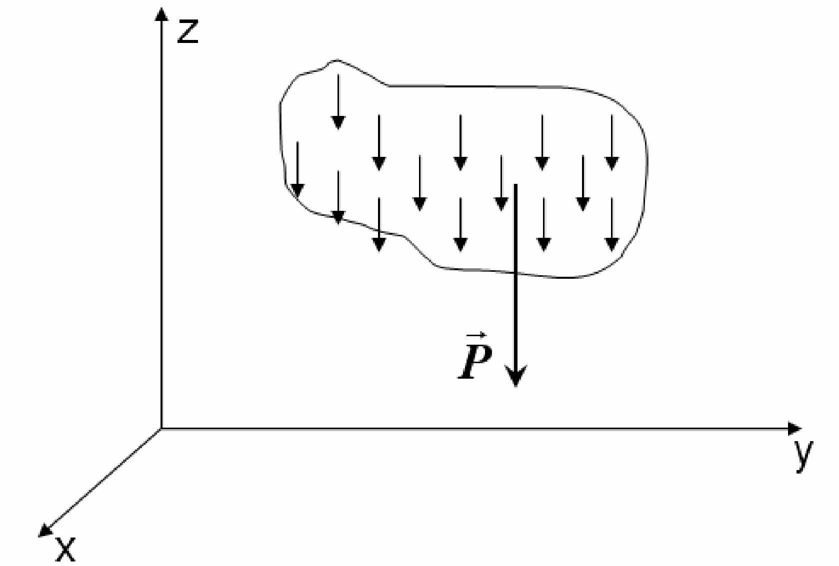
Выражения $\sum_{i=1}^{n} F_i \bar{r}_i$, $\sum_{i=1}^{n} F_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} F_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} F_i z_i$ соответственно называются статическими моментами параллельных сил относительно начала координат 0 и относительно координатных плоскостей z0y, x0z, y0x.

ВОПРОС 30.

Центр тяжести

ОТВЕТ.

Понятие центра тяжести впервые установлено Архимедом около 250 до н.э.



Всякое тело можно представить состоящим из большого числа материальных частиц. На каждую такую частицу действует сила тяжести $\vec{P_i}$. Введем гипотезу о параллельности сил тяжести, хотя фактически эти силы притяжения, направлены к центру Земли.

Равнодействующая $\vec{P} = \sum_i P_i$ называется весом тела, а центр С системы этих параллельных сил центром тяжести тела. Если тело будет менять свое положение в пространстве, то относительно тела силы $\vec{P_i}$ будут поворачиваться вокруг точек приложения, сохраняя при этом свою параллельность величину и точки приложения. При таком поворот параллельных сил центр С системы этих сил не изменит своего положения относительно тела. Координаты центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{P}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{P}$$

где $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ - вес тела и суммирование распространено на все материальные частицы тела.

Эти формулы являются общими формулами, определяющими координаты центра тяжести любого тела.

ВОПРОС 31.

Центр тяжести однородного твёрдого тела.

ОТВЕТ.

Будем называть тело, плоскую фигуру и линию однородными, если вес ν единицы объёма тела, вес λ единицы площади плоской фигуры и вес γ единицы длины. Линии имеют соответственно одно и тоже значение во всех частях тела, плоской фигуры и линии, а именно:

ν - const, λ - const, γ - const.

Координаты центра тяжести однородного твердого тела:

$$x_c = \frac{\underset{(V)}{S}\, xdV}{V},\quad y_c = \frac{\underset{(V)}{S}\, ydV}{V},\quad z_c = \frac{\underset{(V)}{S}\, zdV}{V},$$ где V – объём тела.

Из этих формул видно, что положение центра тяжести однородного тела не зависят от веса тела. Они зависят только от его объёма и формы. Поэтому центр тяжести однородного твердого тела можно назвать центром объёма тела. Интегралы, стоящие в числителях в выше написанных формулах, называются статическими моментами объёма тела относительно координатных плоскостей, то есть $\underset{(V)}{S}\, xdV$ - статический момент относительно плоскости y0z.

$\underset{(V)}{S}\, ydV$ - статический момент относительно плоскости x0z.

$\underset{(V)}{S}\, zdV$ - статический момент относительно плоскости x0y.

ВОПРОС 32.

Центр тяжести однородной плоской фигуры.

ОТВЕТ.

Если тело имеет форму тонкой однородной пластинки, то его можно рассматривать как плоскую однородную фигуру. Разобьём её на большое число очень малых площадок прямыми, параллельными координатным осям. Вес каждой такой площадки равен $P_i = \lambda\, \Delta S_i$

Тогда $$x_c = \frac{\sum_{r=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{r=1}^{n} P_i} = \frac{\sum_{r=1}^{n} x_i \Delta S_i}{S},\quad y_c = \frac{\sum_{r=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{r=1}^{n} P_i} = \frac{\sum_{r=1}^{n} y_i \Delta S_i}{S}.$$

Где S- площадь плоской фигуры.

$x_i y_i$ - координаты площадки ΔS_i.

Переходя к пределу при $\Delta S_i \to 0$, получим

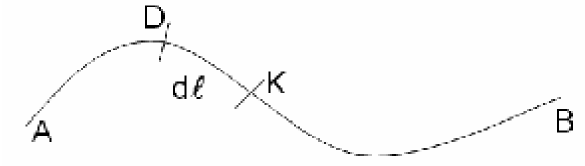
$$x_c = \frac{\underset{(S)}{S}\, xdS}{S},\qquad y_c = \frac{\underset{(S)}{S}\, ydS}{S}.$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры зависят от её площади и формы. Величины $\underset{(S)}{S}\, xdS$, $\underset{(S)}{S}\, ydS$ соответственно называются статическими моментами площади фигуры относительно координатных осей y и x.

ВОПРОС 33.

Центр тяжести плоской однородной линии.

ОТВЕТ.
Пусть однородное тело имеет форму тонкого криволинейного стержня АВ с постоянной площадью S поперечного сечения. Выделим элемент тела DK длиной dl и объёма всего тела: dV=S dl, V=Sl, где S- площадь поперечного сечения стержня, l- длина стержня. Тогда на основании формул центра тяжести однородного твёрдого тела



$$x_c = \frac{\underset{(V)}{S}\, xdV}{V}, \quad y_c = \frac{\underset{(V)}{S}\, ydV}{V}, \quad z_c = \frac{\underset{(V)}{S}\, zdV}{V}.$$

Учитывая, что интеграл по объёму соответствует интегралу по длине l:

$$SxdV = \int_l xSdl = S\int_{(l)} xdl$$

(V)

здесь S вынесли за знак интеграла, поскольку S постоянно на всей длине l, окончательно получим

$$x_c = \frac{\underset{(l)}{Sxdl}}{l}, \; y_c = \frac{\underset{(l)}{Sydl}}{l}, \; z_c = \frac{\underset{(l)}{Szdl}}{l}.$$

где x,y,z – координаты элемента криволинейного стержня, длина которого равна dl. Координаты центра тяжести однородной линии зависят только от её длины и формы. Величины Sxdl, Sydl, Szdl соответственно называются статическими моментами линии АВ относительно координатных плоскостей y0z, z0x, x0y.

ВОПРОС 34.
Способы определения центров тяжести некоторых тел.

ОТВЕТ.
1. Симметрия. Если однородное тело симметрично относительно плоскости или оси или точки, то центр тяжести лежит, соответственно, или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии. Например, центр тяжести однородного шара лежит в центре шара.
2. Разбиение. Если тело можно разбить на конечное число частей так, что центр тяжести каждой части будет известен, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам:

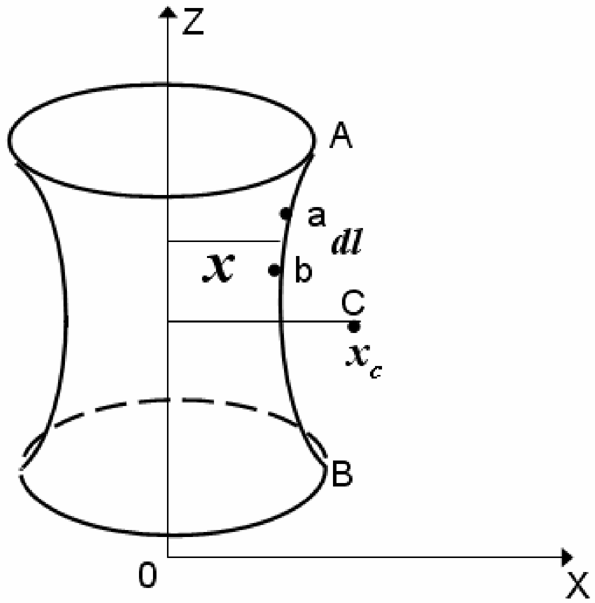
$$x_c = \frac{\sum_{r=1}^{n} P_i x_i}{P}, \; y_c = \frac{\sum_{r=1}^{n} P_i y_i}{P}, \; z_c = \frac{\sum_{r=1}^{n} P_i z_i}{P}$$

3. Метод отрицательных масс.

Этот метод является частным случаем метода разбиения. Он применяется к однородному телу, имеющему отверстия, при условии, что известен центр тяжести тела, в котором отверстия заполнены тем же веществом что и тело;
- центр тяжести отверстий также известны.

ВОПРОС 35.
Первая теорема Паппа-Гульдина.

ОТВЕТ.



С определением положений центров тяжести линий и площадей связаны две элементарные теоремы, называемые теоремами Паппа-Гульдина.
Теорема 1.
Поверхность тела, образованного вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости и ее не пересекающей, равна произведению длины L этой кривой, на длину окружности, описанной ее центром тяжести $S = L \cdot 2\pi x_c$. Действительно, пусть AB – плоская кривая, которая вращается вокруг оси 0z, образуя боковую поверхность тела вращения. Выделим на кривой AB элемент ab=dl.
Площадь элемента боковой поверхности тела, образованная вращением элемента dl , с точностью до бесконечно малой второго порядка малости может быть найдена, как боковая поверхность усеченного конуса.
Следовательно, dS = 2πx · dl, где x – приближенное значение координаты центра тяжести элемента dl.

Далее $S = 2\pi \int\limits_{(L)} xdl$, откуда на основании формулы $x_c = \dfrac{\int\limits_{(L)} xdl}{L}$ или $x_c L = \int\limits_{(L)} xdl$, получаем $S = 2\pi\, x_c \cdot L$.

ВОПРОС 36.
Вторая теорема Паппа-Гульдина.

ОТВЕТ.
Теорема 2.
Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее контур, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести, а именно:

$$V = 2\pi\, x_c \cdot S$$

Действительно, предположим, что плоская фигура Q вращается вокруг оси 0z. Выделим элемент площади dS и рассмотрим элемент объема тела вращения, описанного этим элементом площади. С точностью до бесконечно малых второго порядка малости этот элемент объема определяется по формуле $dV = 2\pi\ x \cdot ds$, где x- приближенное значение координаты центра тяжести элемента dS.

Тогда $V = 2\pi \int\limits_{(S)} xds$. Согласно формуле $x_c = \dfrac{\int\limits_{(S)} xds}{S}$ или $x_c \cdot S = \int\limits_{(S)} xdS$ имеем $V = 2\pi\ x_c \cdot S$.