САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра механики управляемого движения

Г.В.Алферов

Механика в криволинейных координатах.

В вопросах и ответах

Пособие для подготовки к коллоквиуму

Санкт – Петербург
2006

Содержание

Кинематика точки в криволинейных координатах

1. Вопрос: Ретроспектива кинематики

Первые исследования по кинематике связаны с появлением огнестрельного оружия. Вопросы определения траектории полета снаряда, уточнение понятий о неравномерном и криволинейном (параболическом) движения точки стали актуальными. Итальянский ученый и живописец Леонардо да Винчи (1452-1519) первым изучил вопрос о свободном вертикальном падении тяжелого тела. Однако, первые научные положения в области кинематики отражены в исследованиях итальянского механика и астронома Галилео Галилея (1564-1642).

Г.Галилей ввел понятие об ускорении и показал, что траекторией движения снаряда, брошенного в пустоте под некоторым углом к горизонту, является парабола. Законы, выведенные Г.Галилеем, нашли свое дальнейшее развитие в исследованиях итальянского математика, физика и механика Эванжелиста Торричелли (1608-1647), получившего формулу для определения скорости падения тела.

Нидерландскому механику и математику Христиану Гюйгенсу (1629-1695) принадлежит дальнейшее развитие понятия ускорения точки в криволинейном движении. Х.Гюйгенс впервые обратил внимание на возможность разложения ускорения на касательное и нормальное, строгое доказательство которого дал петербургский академик Леонард Эйлер (1707-1783).

Эйлеру принадлежат основополагающие исследования по кинематике точки при естественном способе задания движения, по кинематике вращательного движения твердого тела около неподвижной точки.

Развитие кинематики системы точек связано с именем французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813).

В XIX веке развилась кинематика относительного движения. Была сформулирована теорема о сложении ускорений, которая была доказана французским механиком Гюставом Кориолисом (1792-1843). Однако есть основания полагать, что эта теорема была ранее известна немецкому математику и астроному Карлу Фридриху Гауссу (1777-1855), который ее не опубликовал. К.Гаусс вычислил орбиту малой планеты Цереры, написал книгу «Теория движения небесных сил» (1809), в которой содержатся положения, до сих пор лежащие в основе вычисления планетных орбит.

Развитие теории механизмов и машин в XIX веке позволило выделить кинематику в особый раздел механики[1]. Эта идея принадлежит французскому ученому Андре Амперу (1775-1836), который и ввел сам термин *кинематика*.

Теоретическая кинематика развивалась в тесной связи с теорией механизмов и машин. Особое развитие получила кинематика твердого тела, в частности, теория плоско-параллельного движения. Глубокие исследования в этом направлении принадлежат французким ученым Мишелю Шалю (1793-1880), Луи Пуансо (1777-1859), Жан Виктору Понселе (1788-1867).

В России основателем научной школы по кинематике механизмов является великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев (1821-1894). П.Л.Чебышев указал особые методы синтеза механизмов, которые были названы аналитическими в отличие от геометрических методов.

Задача построения механизма, осуществляющего некоторое заданное движение, т.е. задача синтеза механизмов часто содержит несовместимые условия. Ввиду этого задача построения механизма, выполняющего заданное движение, может быть решена с известными ограничениями лишь приближенно. Разрабатывая приближенные аналитические методы синтеза механизмов, П.Л.Чебышев расширил методы математического анализа и указал способы построения функций, осуществляющих наилучшее приближение в указанном им смысле. В настоящее время научное наследие П.Л.Чебышева по кинематике механизмов разрабатывали российские ученые, среди которых отметим Ивана Ивановича Артоболевского (1905-1977), Александра Петровича Котельникова (1865-1944), Николая Борисовича Делоне (1856-1931), Дмитрия Степановича Зернова (1860-1922), Леонида Владимировича Ассура (1878-1920) и др.

Николаю Егоровичу Жуковскому (1847-1921) принадлежат многие работы по теоретической механике, в том числе по кинематике, в которых широко используются геометрические методы доказательств различных теорем. Ряд глубоких исследований по

---

[1] Наиболее полная система античной механики предложена древнегреческим ученым Аристотелем (384-322гг. до н.э.) в сочинениях «Механика», «Физика», «О мире и небе», в которых он систематизировал и обобщил научные наблюдения и выводы, накопленные древнегреческими натуралистами и ввел сам термин *механика*. Система механики Аристотеля сыграла исключительную роль в дальнейшем развитии механики, оставаясь до XVI века основным ее стержнем. Основоположником теоретической механики как науки следует считать не Аристотеля, а великого сиракузского математика и механика Архимеда (287-212гг. до н.э.), родившегося несколько лет спустя после смерти Аристотеля. Архимед, опираясь на строгую систему аксиом, дал первое строго научное изложение теории рычага и тем самым заложил основы новой науки – механики.

кинематике провел Валериан Николаевич Личин (1846-1900), создав в Одессе школу в области кинематики механизмов.

В настоящее время развитие ракетной и космической техники, создание роботов-манипуляторов и мехатронных систем дало новый толчок в развитии кинематики твердых тел и пространственных механизмов.

2. Вопрос: Понятие криволинейных координат точки

Положение точки в пространстве обычно задается декартовыми координатами X, Y, Z. В некоторых случаях для определения положения точки удобнее использовать какие-нибудь другие параметры.

Любые три независимые переменные, однозначно определяющие положение точки в пространстве, могут быть выбраны в качестве координат этой точки. Такие координаты точки называются *криволинейными* или *независимыми обобщенными координатами* q_1, q_2, q_3.

Примерами криволинейных координат являются полярные, цилиндрические, сферические и др.

В задачах механики криволинейные координаты движущейся точки являются функциями времени и однозначно определяют ее положение в пространстве в любой момент времени

$$q_1 = q_1(t),\ q_2 = q_2(t),\ q_3 = q_3(t)$$

Радиус-вектор точки $\vec{r}$ будет векторной функцией обобщенных (криволинейных) координат q_1, q_2, q_3.

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

Изучая движение точки в трехмерном пространстве, свяжем с этим пространством неподвижную систему прямоугольных осей, которую назовем основным координатным базисом. Обозначая орты этой системы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и, пользуясь разложением радиус-вектора $r = x\vec{r} + y\vec{j} + z\vec{k}$, напишем

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$

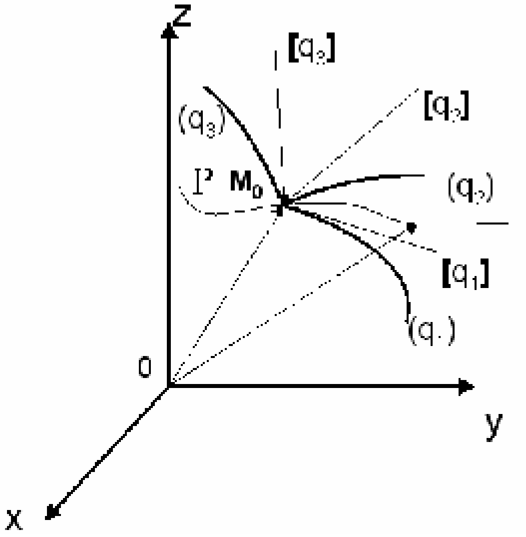
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

Решая эту систему, находим обратные соотношения, выражающие криволинейные координаты точки в функции от декартовых координат базиса.

3. Вопрос: Геометрические характеристики криволинейных координат

Рассмотрим общие геометрические свойства, характерные для всех систем криволинейных координат.



Фиксируя поочередно значения двух координат из трех, т.е. допуская изменение только одной координаты, приходим к представлению координатной линии q_1, которая вычерчивается концом вектора $\bar{r}$, согласно уравнению $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$.

Аналогично получаем уравнения еще двух координатных линий (q_2) и (q_3).

$$(q_2): \bar{r} = \bar{r}(q_{10}, q_2, q_{30})$$
$$(q_3): \bar{r} = \bar{r}(q_{10}, q_{20}, q_3)$$

Таким образом, *координатные линии* являются годографами векторной функции $\bar{r}(q_1, q_2, q_3)$, образованными непрерывным изменением этой функции при изменениях поочередно только одной из трех криволинейных координат.

Координатные линии $(q_i), i = 1,2,3$ проходят через общую точку пространства M_0, определяемую криволинейными координатами q_{10}, q_{20}, q_{30} (см. рис.).

Касательные, проведенные к координатным линиям в данной точке M_0, называются *координатными осями* $[q_i]$.

Координатные оси образуют триэдр координатных осей, которые в различных точках пространства изменения криволинейных координат образуют между собой различные углы.

Если для всех точек пространства координатные оси образуют между собой прямые углы, то система криволинейных координат называется *ортогональной*.

Направления координатных осей $[q_i]$ соответствуют возрастанию координат и связываются соответственно с единичными векторами $\bar{e}_i \; (i = \overline{1,3})$.

<u>Особенность осей криволинейной системы</u>

Каждой позиции движущейся в пространстве точки соответствует своя система координатных линий и, следовательно, свои координатные оси.

4. Вопрос: Коэффициенты Ламе[2]

Координатные линии являются годографами векторных функций $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$, $\bar{r} = \bar{r}(q_{10}, q_2, q_{30})$, $\bar{r} = \bar{r}(q_{10}, q_{20}, q_3)$. Орты координатных осей $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$,$\bar{e}_3$ совпадают по направлению с частными производными векторной функции $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$, взятыми по соответствующим криволинейным координатам.

Поэтому $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \bar{e}_i$, $i = 1,2,3$,

где $\bar{e}_i$ - единичный вектор, касательный к координатной линии, проходящей через данную точку пространства, направленный в сторону возрастания координаты q_i,

множители $H_i > 0$ называются *коэффициентами Ламе* или дифференциальными параметрами Ламе.

Коэффициенты Ламе – функции обобщенных координат q_1, q_2, q_3, которые удобно определять по формуле $H_i = \left| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right|$.

Если учесть, что $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}$,

тогда $H_i = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$

---

[2] Габриэль Ламе (1795-1870) французский математик и механик, член Парижской АН (с 1843), чл.-кор. Петербургской АН (с 1829). Основные труды по математической физике, геометрии и алгебре. В 1816г. представил в Парижскую АН «Мемуар о пересечении линий и поверхностей», содержавший несколько новых теорем. В 1818г. опубликовал сочинение «Исследования различных методов, применяемых для решения геометрических задач», которые высоко оценили Ж.Понселе и М.Шаль.

В дальнейшем он работал над вопросами математической физики, теории упругости, разработал теорию *криволинейных координат* и их применения в механике и теории упругости, ввел функции Ламе. Разработал (1859) идеи, положенные в основу тендерного анализа. Доказал (1840) неразрешимость в целых числах уравнения $x^7 + y^7 = z^7$. Написал «Курс рациональной математической физики» (1865). Автор «Лекций по математической теории упругости твердых тел» (1852) – первого трактата по теории упругости. Именем Ламе назван кратер краевой зоны Луны.

5. Вопрос: Ортогональные криволинейные координаты и условия их ортогональности

Рассмотрим условие ортогональности осей криволинейной системы. Чтобы в любой точке пространства координатные оси были взаимно перпендикулярны, необходимо выполнение условия

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Вектор $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$ направлен по касательной к координатной линии, поэтому $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$,

где $\vec{e}_i$ - единичный вектор, касательный к координатной линии,

H_i - коэффициент Ламе.

Отсюда $\vec{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$, $i = 1,2,3$,

Где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$

Условие ортогональности осей криволинейной в аналитической форме принимает вид

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} = H_i H_j \delta_{ij}$$

Здесь δ_{ij} символ Кронекера[3]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если} & i \neq j \\ 1, \text{ если} & i = j \end{cases}$$

[3] Леопольд Кронекер (1823-1891) – немецкий математик, член Берлинской АН (с 1861), члю-кор. Петербургской АН (с 1872). Основные работы относятся к теории чисел, теории квадратных форм и теории групп, а также к теории эллиптических функций. Был сторонником арифметизации математики, считал, что только арифметика обладает подлинной реальностью, что математику следует свести к арифметике целых чисел.

Вел упорную борьбу против теоретико-функциональной школы К.Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Г.Кантора. Усовершенствовал технику счета, для этого ввел ряд символов. Доказал теорему о сходимости бесконечного ряда. Ввел (1866) символ Кронекера δ_{ij} - функцию двух целочисленных аргументов *i* и *j*. Этот символ находит применение в матричном и тензорном исчислении.

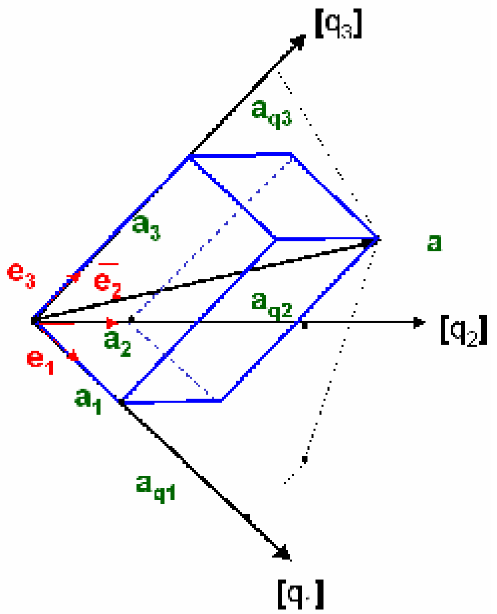
6. Вопрос: Разложение вектора по ортам осей криволинейной системы координат. Контравариантные и ковариантные компоненты вектора

Разложение любого вектора $\vec{a}$ по ортам осей криволинейной системы координат можно представить следующим образом

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

причем в общем случае $\vec{e}_\vartheta \vec{e}_\mu \neq 0,\ \vartheta \neq \mu,\ (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ \vec{e}_3) \neq 0$

Компоненты вектора $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ по осям являются его косоугольными проекциями на эти оси или контравариантными компонентами. В случае ортогональных проекций вектора $\bar{a}$ на эти оси они называются ковариантными компонентами. Ортогональные проекции вектора $\bar{a}$ на оси $[q_i]$, т.е. ковариантные компоненты, выражаются соотношениями



$$a_{q1} = \bar{a}\bar{e}_1,\ a_{q2} = \bar{a}\bar{e}_2,\ a_{q3} = \bar{a}\bar{e}_3$$

Для нахождения контравариантных компонентов вектора $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ спроектируем этот вектор на три ортогональные оси основного координатного базиса и получим

$$\bar{a}\bar{i} = a_1\vec{e}_1\bar{i} + a_2\vec{e}_2\bar{i} + a_3\vec{e}_3\bar{i}$$
$$\bar{a}\bar{j} = a_1\vec{e}_1\bar{j} + a_2\vec{e}_2\bar{j} + a_3\vec{e}_3\bar{j}$$
$$\bar{a}\bar{k} = a_1\vec{e}_1\bar{k} + a_2\vec{e}_2\bar{k} + a_3\vec{e}_3\bar{k}$$

Перепишем эти равенства с учетом выражений

$\vec{e}_i = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial q_i},\ i = \overline{1,3}$ в следующем виде

$$a_x = \frac{a_1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{a_2}{H_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{a_3}{H_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}$$
$$a_y = \frac{a_1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{a_2}{H_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{a_3}{H_3}\frac{\partial y}{\partial q_3}$$
$$a_z = \frac{a_1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} + \frac{a_2}{H_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} + \frac{a_3}{H_3}\frac{\partial z}{\partial q_3}$$

Зная проекции a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ на оси прямоугольного базиса и располагая соотношениями $x = x(q_1,q_2,q_3),\ y = y(q_1,q_2,q_3), z = z(q_1,q_2,q_3)$, решаем выше написанную систему уравнений и находим контравариантные компоненты a_1, a_2, a_3 вектора $\bar{a}$.

Заметим, что эта система уравнений допускает указанное решение при условии неравенства нулю ее определителя. А это условие выполняется, так как оно вытекает из предположения, что $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \neq 0$.

7. Вопрос: Скорость точки в криволинейной системе координат

Рассмотрим криволинейную систему координат q_1, q_2, q_3, которую в общем случае будем считать неортогональной. Радиус-вектор движущейся точки выражается функцией выбранных координат, которые изменяются с течением времени, т.е. $\bar{r} = \bar{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$.

Вектор скорости $\bar{v} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}$. Первая часть этого равенства является производной от сложной векторной функции трех переменных. Составляя полную производную радиуса-вектора точки по времени, получим скорость точки

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Производные $\dot{q}_1 = \dfrac{\partial q_1}{\partial t}, \dot{q}_2 = \dfrac{\partial q_2}{\partial t}, \dot{q}_3 = \dfrac{\partial q_3}{\partial t}$ называются обобщенными скоростями.

Учитывая, что $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \bar{e}_i$, перепишем формулу скорости в виде

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \bar{e}_i = H_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3$$

Эта формула дает разложение скорости $\vec{V}$ по ортам осей криволинейной системы координат. Здесь множители перед ортами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ являются контравариантными компонентами скорости или косоугольными проекциями на оси криволинейной системы.

Обозначив их v_1, v_2, v_3, получим $v_1 = H_1 \dot{q}_1$, $v_2 = H_2 \dot{q}_2$, $v_3 = H_3 \dot{q}_3$

Для получения ковариантных компонентов умножим скалярно вектор скорости $\vec{V}$ соответственно на орты $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, после чего получим

$$\bar{v}_{q1} = \bar{v}\bar{e}_1 = H_1 \dot{q}_1 + H_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_1 + H_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3 \bar{e}_1$$
$$\bar{v}_{q2} = \bar{v}\bar{e}_2 = H_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_2 + H_2 \dot{q}_2 + H_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3 \bar{e}_2$$
$$\bar{v}_{q3} = \bar{v}\bar{e}_3 = H_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_3 + H_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + H_3 \dot{q}_3$$

Отметим, что ковариантные компоненты v_{q_i}, вообще говоря, не совпадают с его контравариантными компонентами v_i. В случае ортогональности векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в силу условий $\bar{e}_i \bar{e}_j = 1, \bar{e}_i \bar{e}_j = 0, \textit{при}\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ выполняются равенства $v_i = V_{q_i}$. Совпадение ковариантных и контравариантных компонентов в криволинейной ортогональной системе координат имеет место для любого вектора.

В задачах механики квадрат скорости определяет кинетическую энергию движущейся точки. Напишем выражение для V^2 в криволинейных координатах точки.

$$v^2 = \bar{v}\bar{v} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j-1}^{3} H_i H_j \dot{q}_i \dot{q}_j \bar{e}_i\, \bar{e}_j$$

Для ортогональных координат квадрат скорости

$$v^2 = H^2{}_1\dot{q}_1{}^2 + H_2\dot{q}_2{}^2 + H_3\dot{q}_3{}^2$$

Так как коэффициенты Ламе выражаются через криволинейные координаты точки, то v^2 в общем случае является функцией, зависящей как от криволинейных координат, так и от обобщенных скоростей

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i v_{q_i}, \text{ где } v_i = H_i\dot{q}_i, v_{q_i} = \sum_{j=1}^{3} H_j \dot{q}_j \bar{e}_j \bar{e}_i$$

Заметим, что эта формула дает общее правило вычисления квадрата модуля любого вектора путем сложения произведений его ковариантных и контравариантных компонент, отнесенных к некоторой криволинейной системе координат. Так как квадрат модуля вектора является инвариантом, то и указанная сумма будет инвариантна по отношению к любому преобразованию координатной системы.

8. Вопрос: Ускорение точки в криволинейной системе координат.

В задачах механики, при составлении уравнений Лагранжа второго ряда применяются прямоугольные проекции вектора ускорения точки $\overline{W}$ на криволинейные оси, причем сами оси криволинейной системы, вообще говоря, не должны удовлетворять условию ортогональности.

Ортогональные проекции w_{q_i} на направления единичных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, которые касаются в данной точке координатных линий, направленных в сторону возрастания координат q_1, q_2, q_3, вычисляются с помощью скалярного произведения $w_{q_i} = \overline{w}\bar{e}_i = \hat{v}\bar{e}_i$.

Подставляя сюда выражения для $e_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}$, найдем

$$w_{q_i} = \frac{\hat{v}}{H_i}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}(\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}) - \bar{v}\frac{d}{dt}(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i})\right]$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}$$

При дальнейшем преобразовании используем два тождества Лагранжа:

Первое получается сразу непосредственным дифференцированием вектора скорости $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q3}\dot{q}_3$ по обобщенной скорости $\dot{q}_i$. Для вывода второго тождества составим отдельно левую и правую части равенства $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right)$.

Так как получаются одинаковые выражения для обеих частей равенства, то это и является доказательством справедливости второго тождества.

Произведя несложные преобразования, получим

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right], \ i=1, 2, 3.$$

Из этой формулы и определяются ортогональные проекции вектора ускорения точки в произвольных криволинейных координатах.

Итак, для составления ковариантных компонентов ускорения $\overline{W}$ на оси криволинейной системы координат необходимо:

1. вычислить коэффициенты Ламе для выбранной системы координат;
2. составить выражения квадрата скорости точки в виде;

   $v^2 = \bar{v}\bar{v} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} H_i H_j \dot{q}_i \dot{q}_j \bar{e}_i \bar{e}_j$, для произвольной системы или

   $v^2 = H_1^2\dot{q}_1^2 + H_2^2\dot{q}_2^2 + H_3^2\dot{q}_3^2$ для ортогональной системы.
3. Выполняя необходимые операции, находим искомые проекции W_{q_i}.

9. Вопрос: Определите выражения для скорости и ускорения точки в цилиндрической системе координат r=r(t), φ = φ(t), z=z(t)

Учитывая связь декартовых координат с цилиндрическими имеем

$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi.$

Введем криволинейные координаты $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$.

Найдем коэффициенты Ламе. Так как $dS_1=H_1dq_1$, $dS_2=H_2dq_2$, $dS_3=H_3dq_3$, и, кроме того, $dS_1=dr$, $dS_2=rd\varphi$, $dS_3=dz$, то имеем $H_1=1$, $H_2=r$, $H_3=1$.

Найдем проекции скорости. $Vq_1=V_r=\dot{q}_1H_1=\dot{r}$,

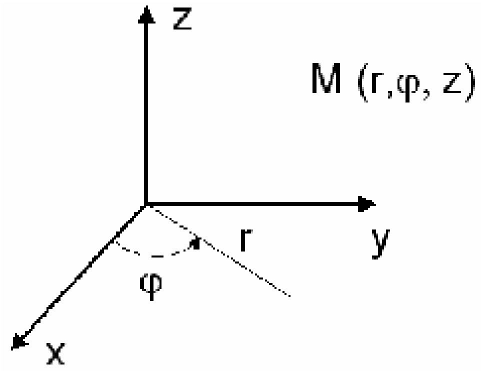
$$Vq_2 = V_\varphi = \dot{q}_2 H_2 = r\dot{\varphi} ,$$

$$Vq_3 = V_z = \dot{q}_3 H_3 = \dot{z}$$

Так как цилиндрическая система координат является ортогональной, то модуль скорости находим по формуле

$$V = \sqrt{(\dot{q}_1 H_1)^2 + (\dot{q}_2 H_2)^2 + (\dot{q}_3 H_3)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$

Определим ускорение.



$$T = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r} , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} , \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \dot{z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = r\,\dot{\varphi}^2 , \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 , \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

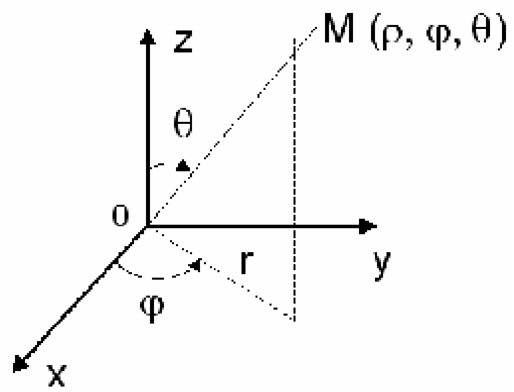
По формуле $W_{q\,i} = \frac{1}{H_j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)$, j=1,2,3

Находим проекции ускорения на оси заданной криволинейной системы координат

$W_z = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$, $W_z = \ddot{z}$.

10. Вопрос: Определите скорость точки в сферической системе координат ρ = ρ(t), φ = φ(t), θ = θ(t)

Координаты точки *x, y, z* в декартовой системе координат выражаются через сферические координаты равенствами



$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = \rho \cos\theta,$$

где $0 \le \rho < \infty$,

$0 \le \varphi < 2\pi$,

$0 \le \theta \le \pi$

Введем криволинейные координаты

$q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = \theta$.

Найдем коэффициенты Ламе.

Так как $dS_1 = H_1 dq_1 = H_\rho d\rho,\ dS_2 = H_2 dq_2 = H_\varphi d\varphi,\ dS_3 = H_3 d\theta$

и, кроме того, $dS_1 = d\rho,\ dS_2 = \rho\sin\theta d\varphi,\ dS_3 = \rho d\theta$, то получаем $H_1 = H_\rho = 1,\ H_2 = H_\varphi = \rho \sin\theta,\ H_3 = H_\theta = \rho$

Найдем проекции скорости. $v_{1} q_1 = v_\rho = \dot{q}_1 H_1 = rH_\rho = \dot{\rho}$,

$$v_{2} q_2 = v_\varphi = \dot{q}_2 H_2 = \dot{\varphi} H_\varphi = \rho\dot{\varphi}\sin\theta,$$

$$v_{3} q_3 = v_\theta = \dot{\theta} H_3 = \dot{\theta} H_\theta = \rho\dot{\theta}$$

Так как сферическая система координат является ортогональной, то квадрат скорости равен $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2$.

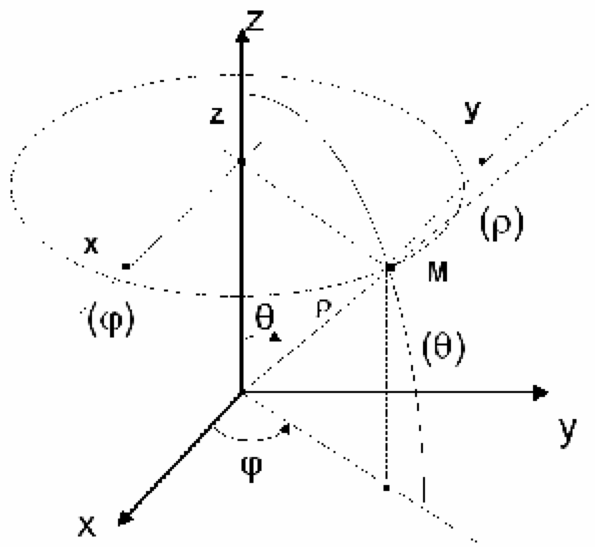
11. Вопрос: Определите ускорение точки в сферической системе координат φ = φ(t), θ = θ(t), ρ = ρ(t)

Декартовые координаты точки ***M*** выражаются через сферические координаты равенствами

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = \rho\cos\theta,$



Найдем значения коэффициентов Ламе для координатных линий $(\theta),\ (\varphi),\ (\rho)$.

Для ортогональной криволинейной системы координат квадрат дифференциала дуги dS примет вид

$$dS^2 = H_1^{\,2} dq_1^{\,2} + H_2^{\,2} dq_2^{\,2} + H_3^{\,2} dq_3^{\,2}$$

Для сферической системы координат имеем

$$dS^2 = H_\theta^{\,2} d\theta^2 + H_\varphi^{\,2} d\varphi^2 + H_\rho^{\,2} d\rho^2$$

Дифференциалы дуг, соответствующих координатным линиям:

$d_1S = H_1 dq_1,\ d_2S = H_2 dq_2,\ d_3S = H_3 dq_3,$

для сферической системы координат

$H_\theta d\theta = d_\theta S = \rho d\theta,\quad H_\varphi d\varphi = d_\varphi S = \rho\sin\theta d\varphi,\quad H_\rho d\rho = d_\rho S = d\rho$

Откуда коэффициенты Ламе для сферической координатной системы имеют следующие значения:

$H_\theta = \rho,\ H_\varphi = \rho\sin\theta,\ H_\rho = 1.$

Проекции скорости на оси сферической системы координат и квадрат скорости равны:

$$v^2 = \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\varphi^2 \sin^2\theta + \dot{\rho}^2$$

Для получения проекций ускорения точки на оси сферических координат предварительно найдем производные

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{v^2}{2}),\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\frac{v^2}{2})$$

Вычисляя эти произведения для каждого ***i,*** получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{v^2}{2}) = \rho^2\varphi^2 \sin^2\theta\cos\theta, \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(\frac{v^2}{2}) = \rho^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{v^2}{2}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{v^2}{2}) = \rho^2\varphi \sin^2\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{v^2}{2}) = \rho(\theta^2 + \varphi^2 \sin^2\theta), \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}}(\frac{v^2}{2}) = \dot{\rho}$$

Подставляя эти выражения в формулы для ортогональных проекций $W_{q\,i}$ на криволинейные оси $[q_i]$

$$W_{q\,i} = \frac{1}{H_{q_i}}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\frac{v^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{v^2}{2})\right],$$

Найдем проекции ускорения:

$$W_\theta = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2\theta) - \rho^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta\right]$$

$$W_\varphi = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)$$

$$W_\rho = \ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

В силу ортогональности сферической системы координат модуль ускорения определяется из равенства

$$W^2 = W_\theta^{\ 2} + W_\varphi^{\ 2} + W_\rho^{\ 2}$$

12. Вопрос: Пространство и время

В классической механике, основанной на законах Галилея-Ньютона, считается, что время и пространство не зависят от движения тел. Механическое движение заключается в изменении пространственного положения тела с течением времени. Для изучения законов природы необходимо знать свойства пространства и времени. В теоретической механике, пространство, в котором происходит движение тел, рассматривается как трехмерное евклидово пространство. Таким образом, свойства пространства в классической механике полностью определяется системой аксиом и теорем геометрии Евклида[4].

Трехмерность пространства означает, что для указанного места достаточно трех чисел, например, трех пространственных координат. Однородность пространства проявляется в независимости физических законов от положения в пространстве. Опыт, поставленный в одинаковых физических условиях в различных местах, дает одинаковый результат.

Изотропность пространства проявляется в независимости физических законов от ориентации системы в пространстве, что означает одинаковость свойств объектов по всем направлениям.

Что касается времени, то в классической механике оно предполагается одномерным и однородным. Одномерность времени означает, что для указания момента наступления события или длительности какого-либо процесса достаточно одного числа. Однородность времени проявляется в неизменяемости законов с течением времени. Опыты, поставленные в одинаковых физических условиях в разные моменты времени, дают одинаковые результаты.

При изменении времени в кинематике различают такие понятия, как промежуток времени, момент времени, начальный момент времени.

Промежутком времени называется время, протекающее между двумя событиями.

Моментом времени называется граница между двумя смежными промежутками времени.

Начальным моментом времени называется момент времени, с которого начинается отсчет.

Заметим, что однородность и изотропность пространства м времени имеют место не во всех системах отсчета, а лишь в инерциальных системах. Так называются системы отсчета, по отношению к которым механическое движение описывается законами

---

[4] Евклид (ок.340-287 гг. до н.э.) – математик эпохи эллинизма. Занимался геометрией, оптикой и музыкой. Одним из первых начал изучать логические основания математики. Написал трактат по прикладным вопросам, в которых теория выводилась строго дедуктивно из сформулированных физических гипотез и математических постулатов. Его знаменитый труд «Начала» состоит из 13 книг, первой из которых предшествует пять постулатов и пять аксиом. В «Началах», кроме собственно геометрии, изложены геометрическая алгебра, решение квадратных уравнений, теория чисел и т.д. Пространство, свойства которого описываются аксиомами геометрии Евклида, называют евклидовым пространством. Он доказал бесконечность множества простых чисел, ввел понятие иррационального числа. Именем Евклида назван кратер на видимой стороне Луны.

Ньютона[5]. Первый из этих законов, закон инерции, утверждает существование инерционных систем отсчета.

Все указанные свойства пространства и времени – результаты обобщения многовековой практической деятельности людей. Только практика на рубеже XIX и XX столетий потребовала внесения изменений в эти представления (специальная теория относительности).

В отличие от классической механики современная физика, построенная на основе теории относительности А.Эйнштейна[6] (1879-1955), приводит к иным представлениям о пространстве и времени. Этому содействовало появление новой геометрии гениального русского математика Н.И.Лобачевского[7] (1792-1856), которая была изложена в труде «Новые начала геометрии».

---

[5] Ньютон дал определение основных понятий механики – массы, плотности, количества движения, силы, пространства, времени. Ему принадлежат концепции абсолютного пространства и времени и развитие идеи относительности Г.Галилея. Сформулировал три закона. Первый закон – закон инерции Галилея-ньютона, сформулированный впервые Г.Галилеем в 1638г. для изолированной материальной точки, движущейся в инерциальной системе отсчета: изолированная материальная точка в инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя. Второй закон Ньютона: изменение количества движения материальной точки в каждый момент времени пропорционально силе, действующей на движущуюся точку. Третий закон Ньютона: тело *А* действует на тело *В* с силой $\overline{F}_A$, равной по величине и противоположной по направлению силе $\overline{F}_B$, с которой тело *В* действует на тело *А*. Величина этих сил определяется законом всемирного тяготения, открытого И.Ньютоном $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где r – расстояние между материальными объектами, γ - постоянная гравитационного воздействия (γ =6,672*$10^{-11}\frac{нм^2}{кг^2}$).

[6]??????????

[7] Николай Иванович Лобачевский (1792-1856) – русский математик, создатель неевклидовой геометрии. В 1823 г. Лобачевский завершил работу «Геометрия». В ней впервые в истории геометрии полностью выделена абсолютная геометрия: собраны все положения, не зависящие от пятого постулата Евклида. 23 февраля 1826 г. Лобачевский прочитал на заседании физико-математического факультета казанского университета доклад «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях». Этот день стад днем рождения неевклидовой геометрии. В 1835г. в «Научных записках» Казанского университета была опубликована **статья**???? Лобачевского «Воображаемая геометрия», а в 1835-1838гг. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных линий», в которой дается полное, систематическое изложение новой геометрии. Именем Лобачевского назван кратер на обратной стороне Луны.

Н.И.Лобачевский, в противоположность И.Ньютону[8], не отрывал пространство и время от движения, и само движение рассматривал как изменение положения одних тел по отношению к другим. Н.И.Лобачевский рассматривал свойства пространства как проявление взаимосвязей между движущимися материальными телами.

Необходимо отметить, что Н.И.Лобачевский примерно за 80 лет до появления теории относительности показал, что евклидова геометрия относится к абстрактным геометрическим системам, в то время как в физическом мире пространственные соотношения определяются физической геометрией, отличной от евклидовой геометрии.

Так, абстрактному пространству в классической механике теория относительности противопоставляет физическое пространство, в котором геометрические свойства пространства и свойства времени органически объединены со свойствами материальных объектов, движущихся в пространстве и времени.

В теории относительности показывается, что свойства пространства и времени зависимы от скорости движения материальных объектов. Например, время течет не само по себе, а зависит от скорости движения. Однако эта зависимость справедлива только при скоростях движения материальных объектов близких к скорости света ($3*10^5$ км/с). Даже для третьей космической скорости (16,2 км/с) этой зависимостью можно пренебречь. Классическая механика – это механика малых скоростей по сравнению со скоростью света, причем время t считается универсальной скалярной переменной.

Таким образом, теория относительности привела к новым представлениям о пространстве и времени, которые в значительной мере отличаются от представлений классической механики. Однако, для случаев движения тел со скоростями, значительно меньшими скорости света, трехмерное евклидово пространство и универсальное время являются полноценными и весьма точными абстракциями физического пространства и физического времени. Поэтому можно утверждать, что теоретическое и прикладное значение классической механики остается огромным в наше время, так как похзволяет найти весьма высокое приближение к объективно существующим реальным формам

---

[8] Исаак Ньютон (1643-1727) – английский математик, механик, астроном, основоположник современной механики, создатель математики непрерывных процессов (исчисления флюксий и флюент). Ньютону принадлежат: открытие закона всемирного тяготения, создание теоретических оснований механики и астрономии, разработка дифференциального и интегрального исчислений. В своем главном труде «Математические начала натуральной философии» (1687г.) обобщил результаты, полученные учеными научной революции, в том числе и собственные, и создал единую систему земной и небесной механики. Именем Ньютона назван кратер на видимой стороне Луны и кратер на Марсе.

бытия, что подтверждается современным развитием техники, в частности, космонавтики и мехатроники.

13. Вопрос: Система отсчета. Тело отсчета

Для изучения механического движения вводится система отсчета.

Система отсчета состоит из тела отсчета, принимаемое за неподвижное, связанной с ним системы координат и совокупности приборов для измерения времени и расстояний.

Тело отсчета – абсолютно твердое тело, по отношению к которому определяется положение других тел.

Система координат[9] состоит из точки 0 – начала координат и базисных векторов, начинающихся в этой точке и указывающих направления осей координат.

Механическое движение рассматривается в какой-либо системе отсчета. Одно и тоже движение происходит по-разному в разных системах отсчета. В этом проявляется относительность движения. Например, движение Луны относительно Земли в геоцентрической системе отсчета происходит по замкнутой околокруговой орбите. Относительно Солнца в гелиоцентрической системе отсчета Луна движется по сложной незамкнутой орбите. Каждый исследователь может выбирать систему отсчета по-своему, исходя из соображений целесообразности и удобства. Систему отсчета следует выбирать так, чтобы изучаемое движение и описывающие его законы выглядели как можно проще. При рассмотрении механического движения в разных системах отсчета необходимо знать, какие характеристики движения остаются неизменными, а какие меняются при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим временные и пространственные характеристики. Опыт показывает, что время течет одинаково во всех системах отсчета, пока речь идет о движениях медленных по сравнению с распространением света в вакууме. Это означает, что промежуток времени между двумя событиями одинаков при его измерении в любой системе отсчета. В этом смысле время является абсолютным. Теперь рассмотрим пространственные характеристики. Положение изучаемого объекта изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. Однако относительное пространственное расположение двух

---

[9] Впервые ввел систему координат французский математик и философ Рене Декарт (1596-1650) в своем главном математическом труде «Геометрия» (1637). Однако его система координат была несовершенной: в ней не рассматривались отрицательные абциссы, а координаты точек задавались системой параллельных отрезков, не обязательно перпендикулярных оси абцисс. Декарт ввел искомые величины через *x, y, z, …*, а буквенные коэффициенты через *a, b, c…*, ввел обозначения степеней, сформулировал правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней.

событий при этом не меняется и в этом смысле является абсолютным. Например, от выбора системы отсчета не зависит относительное положение концов твердого стержня, то есть его пространственный размер. Таким образом, классическая механика базируется на предположении об абсолютном характере пространства и времени. Это означает, что промежутки времени и пространственные расстояния между любыми двумя событиями инвариантны, т.е. одинаковы в любой системе отсчета. Напомним, что модель абсолютного пространства и времени адекватна при рассмотрении медленных механических движений. Такие движения можно рассматривать в разных системах отсчета. Конкретный выбор системы отсчета определяется так, чтобы движение и его закономерности выглядели как можно проще.

14. Вопрос: Модели материальных объектов в механике

Моделирование, как познавательный прием, неотделим от развития знания. По существу, моделирование, как форма отражения действительности, зарождается в античную эпоху одновременно с возникновением научного познания. В теоретических работах Г.Галилея (1564-1642)[10] и Леонардо да Винчи[11] (1452-1519) не только используются модели, но и выясняются пределы применимости метода моделирования. Исаак Ньютон (1643-1727) пользуется этим методом уже вполне осознанно. В 19-20 веках трудно назвать область науки или ее приложений, где моделирование не имело бы существенного значения. В классической механике изучаются общие свойства механического движения под действием сил. При построении теории реальные объекты заменяются идеализированными образами – *моделями*. В моделях учитываются не все свойства реальных объектов, а только существенные для рассматриваемого круга

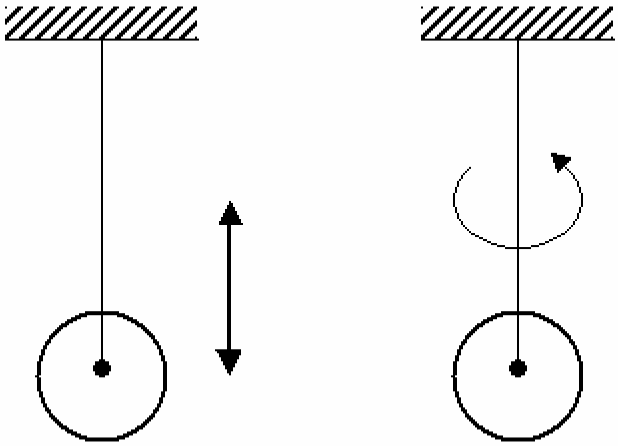
---

[10] ???????

[11] Леонардо да Винчи (1452-1519) – итальянский живописец и ученый-энциклопедист. Считая опыт источником достоверного знания, видел в математике образец научной доказательности. В творчестве Леонардо механика занимала важное место. В его заметках есть много рассуждений по теоретической и практической механике. Много внимания уделял вопросам строительной механики – теории арок, сводов и купольных перекрытий. Одним из первых определил коэффициент трения. Известны его исследования механики движений человека и полета птиц. Он рассматривал строение тела человека и животных с точки зрения механики. Пользовался понятием момента, исследовал понятие силы, сложение сил, действующих на тело, движение тел по наклонной плоскости. Занимался проектированием механизмов и машин, пытался создать летательный аппарат, причем, не ограничиваясь мускульной силой человека, предлагал использовать в качестве двигателя пружину. Механику, в которой математические науки применяются практически, Леонардо назвал раем математических наук. Именем Леонардо да Винчи назван кратер на видимой стороне Луны.

вопросов. Простейшей моделью в механике является *материальная точка*, заменяющая реальное тело. Модель *материальная точка* для реального тела применима тогда, когда размеры этого тела малы по сравнению с другими характерными размерами, которые фигурируют в изучаемом движении. Одно и тоже тело в одних условиях можно считать материальной точкой, а в других нельзя. Например, при расчете движения комического корабля (КК) на орбите его можно считать материальной точкой, но при расчете стыковки этого корабля с орбитальной станцией модель *материальной точки* уж не применима.

Более глубокое основание введения понятия *материальная точка* связано с возможностью отделения вращательного движения тела вокруг центра масс от поступательного его движения вместе с центром масс и возможностью независимого их изучения. Тяжелый шар, подвешенный на упругой нити, можно считать материальной точкой при изучении вертикальных колебаний, но нельзя при изучении крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. Таким образом, используя модель *материальной точки*, идеализируются не столько свойства самого тела, сколько условия его движения.



Однако существует особый случай, когда тело можно рассматривать как *материальную точку,* и при этом его размеры вовсе не малы по сравнению с другими характерными размерами. Это случай поступательного движения, при котором все точки тела движутся одинаково и его пространственная ориентация остается неизменной. Например, при операции стыковки КК с орбитальной станцией, когда КК уже сориентирован относительно станции и его пространственная ориентация остается неизменной. Все точки КК движутся одинаково и причаливающий корабль можно рассматривать как материальную точку, хотя его размеры сравнимы и могут быть даже больше других характерных размеров, а именно, расстояния до станции, ее габаритов и т.д.

В теоретической механике широко используются и другие модели, как *абсолютно твердое тело*, *механическая система* и т.д. Под *абсолютно твердым телом* понимается воображаемое тело, в котором расстояние между любыми двумя точками остается неизменным. *Механической системой материальных точек* называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных.