Аксиоматика Вейля

Герман Вейль (9.11.1885 - 8.13.1955) - немецкий математик, член национальной Академии Наук США. Окончил Гёттингенский университет (1908). В 1913-30 гг. профессор Цюрихского политехнического института, с 1930-33 гг. Геттинского университета. В 1933 г. Эмигрировал в США, работал в Геттингенском университете перспективных исследований. Наиболее значительные работы Г.Вейля по теории непрерывных групп и их представлений с применениями к проблемам геометрии и физики. В знаменитом учебнике по теории относительности, вышедшем в свет в 1917 г. Г.Вейль впервые предложил аксиоматику n-мерной Евклидовой геометрии как структуры

$E = \langle \mathcal{T}, v; +, \cdot, \rightarrow, (,) \rangle$

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения)
2. $\overrightarrow{(a+b)}+\vec{c}=\vec{a}+\overrightarrow{(b+c)}$ (ассоциативность сложения)
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (существование нулевого элемента)
4. $\vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{0}$ (существование противоположного элемента)

1. — 4. аксиомы коммутативной группы

5. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (ассоциативность относительно числового сомножителя)
6. $1*\vec{a}=\vec{a}$
7. $\alpha\,\overrightarrow{(a+b)}=\alpha\,\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (дистрибутивность относительно суммы элементов)
8. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивность относительно суммы числовых сомножителей)
9. Существует n линейно независимых векторов.
10. Каждые $n + 1$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ линейно зависимы.
11. Каждой точке $A \in \mathcal{T}$ и каждому вектору $\vec{a} \in V$ отвечает единственная точка $B \in \mathcal{T}$, такая, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

$\forall\ A \in \mathcal{T},\ \forall\ \vec{a} \in V\ \ \exists!\ B \in \mathcal{T}\ /\ \overrightarrow{AB}=\vec{a}$

12. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$, $\forall$ A,B,C $\in \mathcal{T}$
13. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})\ \forall\ \vec{a},\vec{b} \in V$ (коммутативность)
14. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})\ \forall\ \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$ (дистрибутивность относительно сложения векторов)
15. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$, $\forall \vec{a},\vec{b} \in V$, $\forall \lambda \in R$ (ассоциативность относительно умножения вектора на число)
16. $\overrightarrow{a^2}=(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$, $\forall \vec{a} \in V$ (положительная определенность скалярного произведения) $\overrightarrow{a^2}=0$, лишь $\forall \vec{a}=\vec{0}$

Аксиома 16 позволяет определять длину $|a|$ вектора $\vec{a}$ как числа $\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{\overrightarrow{a^2}}$.

Аналогично, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой

$\mathrm{Cos}\ \widehat{\vec{a},\vec{b}} = ((\vec{a},\vec{b}))/(|\vec{a}||\vec{b}|)$

Определение.
n-мерным (вещественным) Евклидовым пространством (при 2 - евклидовой плоскостью) называется структура

$$E =< \mathcal{T}, v ; + , \cdot , \rightarrow , (,) > \qquad (*)$$

где элементы основных множеств $\mathcal{T}$ и v – это точки и векторы пространства.
Здесь свойства основных операций +; ·; (,). (т.е. соответственно отображений $V \times V \to V$, $R \times V \to V$, $\mathcal{T} \times \mathcal{T} \to V$, $V \times V \to R$, где R - множество вещественных чисел) задаются аксиомой 1-16. Аксиоматика n -мерного евклидова пространства является **ПОЛНОЙ**.
Описание (n-мерной) евклидовой геометрии как структуры (*), задаваемой аксиомами 1-4, 5-8, 11-12, 13-16, было впервые предложено Г.Вейлем, хотя по существу она, видимо, была ранее известна Д.Гильберту (1862-1943). Тем не менее это описание называют АКСИОМАТИКОЙ ВЕЙЛЯ евклидовой плоскости или евклидова пространства.
Выбранная Вейлем система аксиом удачно связывает точки с векторами, образующими одну из самых важных структур современной математики - структуру векторного пространства.
Связь между векторами и точками позволяет определить в евклидовом пространстве расстояние d(A, B) между точками, положив d(A, B)= $\left|\overrightarrow{AB}\right|$
Зафиксировав какую-то точку O евклидова пространства, можно установить взаимно-однозначное соответствие между точками и векторами, сопоставив каждой точке $A \in \mathcal{T}$ вектор $\overrightarrow{OA} \in V$. После этого мы можем ввести КООРДИНАТЫ ТОЧЕК, приняв за координаты $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ точки A координаты отвечающего вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Пусть теперь базис, с помощью которого вводятся координаты векторов (а значит и точек), является ортонормированным.
Поскольку из $\overrightarrow{OA} = \vec{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ следует (см. аксиому 12)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{d}(\eta_1 - \xi_1, ..., \eta_n - \xi_n)$
То расстояние d(A, B между точками A$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ и B$(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ равно

$$d(A, B)= \sqrt{(\eta_1 - \xi_1)^2 + ... + (\eta_n - \xi_n)^2}$$

Аналогично величину $\angle$ BAC, то есть угол между лучами AB и AC можно определить как угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Поэтому, если A=A$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, B=B$(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ и $C = C(j_1, j_2, ..., j_n)$, то

$$\cos \angle BAC = \frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi_1 - j_1) + ... + (\xi_n - \eta_n)(\xi_n - j_n)}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + ... + (\xi_n - \eta_n)^2}\ \sqrt{(\xi_1 - j_1)^2 + ... + (\xi_n - j_n)^2}}$$