43. Производная сложной функции. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически.

1. Теорема о производной сложной функции.

[Александров А.Ю., Жук В.В., Камачкин А.М. Математический анализ. Часть 1, стр. 71–72]

2. Логарифмическая производная

$y = a^x$, $y' = a^x \, ln \, a$.

$y = x^\mu$, $y' = \mu x^{\mu-1}$.

$y = x^x$, $y' = ?$.

Пусть на интервале (a, b) заданы функции $u(x)$ и $v(x)$, причем $u(x) > 0$.

Рассмотрим точку $x_0 \in (a, b)$. Будем считать, что $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в этой точке.

Задача: Вычислить производную функции $y(x) = u^{v(x)}(x)$ в точке x_0.

Решение: Пусть $z(x) = ln \, y(x) = v(x) \, ln \, u(x)$. Используя формулу производной от произведения и формулу производной сложной функции, получаем

$$z' = \frac{y'}{y} = v' \, lnu + v \, \frac{u'}{u}.$$

Значит,

$$y' = y \left(v' \, lnu + v \, \frac{u'}{u} \right).$$

Выражение

$$\frac{y'}{y} \tag{1}$$

называется **логарифмической производной**.

Пример. Пусть $y = x^{\sin x}$. Тогда

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \, lnx + \frac{\sin x}{x} \right).$$

3. Производная функции, заданной параметрически

Пусть зависимость переменной y от переменной x задана не непосредственно ($y = f(x)$), а через зависимость x и y от третьей (вспомогательной) переменной t:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t). \tag{2}$$

Такое задание называется **параметрическим заданием функции**, а переменная t называется **параметром**.

Теорема. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены на интервале (a, b) (конечном или бесконечном). Функция $\varphi(t)$ непрерывна и строго монотонна при $t \in (a, b)$. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (a, b)$, а $x_0 = \varphi(t_0)$. Через X обозначим множество значений функции $\varphi(t)$.

Тогда уравнения (2) на множестве X определяют функцию $y = f(x)$, причем если $\varphi'(t_0) \neq 0$, то $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а ее производную можно вычислить по формуле

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{3}$$

Доказательство. Из непрерывности и строгой монотонности функции $\varphi(t)$ следует, что X является открытым промежутком.

По теореме о непрерывности обратной функции получаем, что для функции $x = \varphi(t)$ существует непрерывная на промежутке X обратная функция $t = q(x)$. Подставляя ее во второе уравнение системы (2), получаем

$$y = \psi(q(x)) = f(x).$$

Производную функци $f(x)$ можно вычислить с помощью теорем о производных сложной и обратной функций. Имеем

$$f'(x_0) = \psi'(q(x_0))q'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть

$$x = e^{t-1} + t^2 + 2t, \qquad y = \sin(\pi t) + t^2, \qquad t \in (0, +\infty).$$

Выберем $t_0 = 1$. Тогда $x_0 = 4$. Получим

$$y'(x) = \frac{\pi\cos(\pi t) + 2t}{e^{t-1} + 2t + 2}.$$

Значит, $y'(4) = (2 - \pi)/5$.

Дополнительная литература

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, пункт 98, пункт 99 (пример 23), пункт 121.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1, пункт 9.7.