УДК 519.62

Зубахина Т. С.

Анализ устойчивости методов Рунге – Кутты – Чебышёва второго порядка для уравнений с запаздыванием

Рекомендовано к публикации доцентом Ереминым А. С.

1. Введение. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), собственные числа которых расположены в длинной узкой полосе вдоль действительной отрицательной полуоси (например, получающихся при дискретизации по пространству некоторых уравнений в частных производных параболического типа), существуют явные стабилизированные методы Рунге – Кутты, которые по аналитической форме их функции устойчивости называются методами Рунге – Кутты – Чебышёва.

К сожалению, в литературе не удалось найти анализ применения таких методов к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом (ДУЗА).

Анализ устойчивости для чебышёвских методов первого порядка применительно к ДУЗА был проведён в [1]. В настоящей работе рассматривается расширение методов Рунге – Кутты – Чебышёва второго порядка [2] для решения ДУЗА и проводится анализ их P-устойчивости [3].

2. Формулировка чебышёвских методов второго порядка для ДУЗА. Для описания метода достаточно рассмотреть автономное уравнение с одним запаздыванием

$$y'(t) = f(y(t), y(t-\tau))$$

с заданной предысторией $y(t) = \varphi(t)$ при $t \leqslant t_0$. Пусть совершено n шагов и найдены приближения y_i к значениям $y(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Решение в точке $t_{n+1} = t_n + h$ s-этапным методом, расширяющим

Зубахина Татьяна Сергеевна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tanya_postcrossing@mail.ru, тел.: +7(904)330-41-91

метод решения ОДУ, предложенный ван дер Хауэном и Соммейером [2], находится по формулам

$$
\begin{aligned}
&\quad Y_0 = y_n, \quad F_0 = f(y_n, \tilde{y}(t_n - \tau)), \\
&\quad Y_1 = y_n + b_1 w_1 h F_0, \\
&\quad Y_i = y_n + \mu_i h \Big(f(Y_{i-1}, \tilde{y}(X_{i-1} - \tau)) - a_{i-1} F_0 \Big) + \\
&\qquad\qquad + \nu_i (Y_{i-1} - y_n) + \kappa_i (Y_{i-2} - y_n), \quad i = 2, \dots, s, \\
&y_{n+1} = Y_s,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$
\mu_i = \frac{2 b_i w_1}{b_{i-1}}, \quad \nu_i = \frac{2 b_i w_0}{b_{i-1}}, \quad \kappa_i = -\frac{b_i}{b_{i-2}}, \quad i = 2, \dots, s.
$$

Параметры b_0 и b_1 являются свободными (мы рассматриваем случай $b_0 = b_1 = b_2$), а остальные параметры a_i, b_i, w_1 и w_0 вычисляются как $a_i = 1 - b_i T_i(w_0)$, $i = 0, \dots, s$,

$$
b_s = \frac{T_s''(w_0)}{(T_s'(w_0))^2}, \quad w_1 = \frac{T_s'(w_0)}{T_s''(w_0)}, \quad w_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2},
$$

где $T_k(x)$ – полином Чебышёва первого рода степени k. Абсциссы этапов X_i, $i = 0, \dots, s-1$ находятся по тем же формулам (1), что и Y_i, если положить $f \equiv 1$ и y_n заменить на t_n. Неотрицательный параметр η называется коэффициентом демпфирования. При его росте область комплексной плоскости λh, в которой метод Рунге–Кутты–Чебышёва устойчив для ОДУ $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ несколько укорачивается вдоль действительной оси, но утолщается вдоль мнимой, что позволяет избежать её сужения до нуля в некоторых точках.

Значения запаздывающего решения находятся через *непрерывное расширение* метода $\tilde{y}(t)$, которое полагается равным $\varphi(t)$ при $t \leqslant t_0$, а на $(k+1)$-м шаге при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ строится интерполяционный полином, который в каждой точке $t_k + \theta h$, $\theta \in [0,1]$ обеспечивает некоторый требующийся порядок точности. Для сохранения второго порядка сходимости метода (1) при решении ДУЗА достаточно использовать линейную интерполяцию между точками сетки:

$$
\tilde{y}(t_k + \theta h) = y_k (1 - \theta) + y_{k+1} \theta, \quad \theta \in [0, 1]. \tag{2}
$$

Более точным будет использование квадратичного интерполянта, который легко построить, если в записи (1) выразить y_{n+1} через $f(Y_i, \tilde{y}(X_i - \tau))$, $i = 0, \ldots, s-1$ (как это делается в традиционной записи методов Рунге–Кутты [4]), и положить коэффициенты квадратичными полиномами от θ:

$$\tilde{y}(t_k + \theta h) = y_k + h \sum_{i=0}^{s-1} p_i(\theta) f(Y_i, \tilde{y}(X_i - \tau)), \quad p_i(\theta) = p_{i1}\theta + p_{i2}\theta^2. \quad (3)$$

Детали построения *непрерывных расширений* см., например, в [3, 4]. Отметим, что квадратичный интерполянт (3) определяется неоднозначно при $s \geqslant 3$.

3. Линейный анализ устойчивости. Основой для анализа устойчивости численных методов решения ДУЗА является обобщение тестового уравнения Далквиста [3]:

$$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau). \quad (4)$$

Запаздывание τ считается постоянным.

Один из возможных вариантов обобщения A-устойчивости на ДУЗА (4) приводит к понятию P-устойчивости.

Определение 1. Область P-устойчивости численного метода для решения ДУЗА (4) – это набор S_P таких пар комплексных чисел (α, β), где $\alpha = h\lambda$, $\beta = h\mu$, что численное решение $\{y_n\}_{n \geqslant 0}$ системы (4), полученное на постоянном шаге $h = \tau/m$, $m \in \mathbb{N}$, по абсолютному значению стремится к нулю при $n \to \infty$ для всех функций предыстории $\varphi(t)$ и всех постоянных τ. В настоящей работе рассматриваются только действительные значения λ и μ (и, соответственно, α и β).

При применении численного метода к (4) получается разностное уравнение, устойчивость которого определяется корнями характеристического полинома. Их можно выразить в форме

$$\xi = R^* \left(\alpha, \frac{\beta}{\xi^m} \right).$$

Здесь рациональная функция P-устойчивости имеет вид

$$R^*(\alpha, z) = 1 + (\alpha + z) p^T (I - \alpha A - zP)^{-1} e, \quad (5)$$

где вектор p и матрица A составлены из коэффициентов метода

Рунге – Кутты в его традиционной записи, а P – матрица, соответствующая интерполяционному полиному в этапных абсциссах.

С использованием функции (5) область P-устойчивости можно записать в виде:

$$P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \alpha \in S_A \ \text{ и } \ |\beta| < \sigma_\alpha\}, \tag{6}$$

где

$$S_A = \{\alpha \in \mathbb{C} : |R^*(\alpha, 0)| < 1\},$$
$$\sigma_\alpha = \inf_{z \in \Gamma_\alpha} |z|, \quad \Gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |R^*(\alpha, z)| = 1\}.$$

4. Трёхэтапный метод. В силу того, что при $s = 2$ с точки зрения устойчивости явные методы Рунге – Кутты второго порядка не имеют никакой свободы, рассмотрение чебышёвских методов второго порядка имеет смысл проводить при $s \geqslant 3$. Рассмотрим недемпфированный метод (1) с тремя этапами ($\eta = 0$, $s = 3$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3b_1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{6b_1-3}{16b_1} & \frac{3}{16b_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{b_1-4}{9b_1} & \frac{4}{9b_1} & \frac{8}{9} \end{bmatrix},$$

где b_1 – свободный параметр.

При линейной интерполяции функция устойчивости вне зависимости от b_1 имеет вид

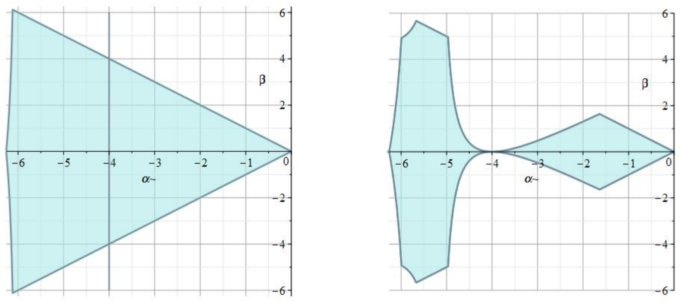
$$R_l^*(\alpha, z) = \frac{-\alpha^3 - (z+8)\alpha^2 - (7z+16)\alpha - 8z - 16}{\alpha z + 8z - 16}.$$

На рис. 1 (слева) представлен график области, где $|R_l^*(\alpha, z)| \leqslant 1$.

При квадратичной интерполяции есть два свободных параметра. Одна из возможных функций устойчивости имеет вид

$$R_q^*(\alpha, z) = \frac{(31\alpha + 168)\, z^2 + \left(63\alpha^2 + 423\alpha + 416\right) z\alpha + 512}{512 + 8z^2 + (7\alpha - 96)\, z} + \\ + \frac{32\alpha^3 + 256\alpha^2 + 512\alpha + 512}{512 + 8z^2 + (7\alpha - 96)\, z}. \tag{7}$$

График области устойчивости приведён на рис. 1 (справа). Отметим, что мы провели анализ для многих вариантов выбора свободных параметров при квадратичной интерполяции, однако для всех них получились «провалы» к нулю в точке $\alpha = -4$. При линейной интерполяции этот «провал» становится вертикальной прямой, то есть, метод куда более устойчив, чем при интерполяции второго порядка.



Линейная интерполяция Квадратичная интерполяция

Рис. 1. Области устойчивости трёхэтапного метода с использованием интерполяции разных порядков

5. Заключение. Вероятно, при применении методов RKC второго порядка для ДУЗА, аналогичное преимущество линейной интерполяции сохранится и для большего числа этапов. Наблюдаемые «провалы» исчезают при повышении коэффициента демпфирования, что приводит к сильному сокращению области вдоль оси α.

Литература

1. Зубахина Т. С. ВКР бакалавра: Анализ устойчивости методов Рунге–Кутты–Чебышёва для уравнений с запаздыванием. СПбГУ, 2020.
2. Van der Houwen P., Sommeijer B. On the internal stage Runge-Kutta methods for large m-values // Z. Angew. Math. Mech. 1980. Vol. 60. P. 479–485.
3. Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford University Press, 2013. 413 p.
4. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.