УДК 517.929.4

Евтина Д. С.

О робастной устойчивости линейных систем с запаздыванием

Рекомендовано к публикации доцентом Александровой И. В.

1. Введение. Целью данной работы является анализ робастной устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с одним запаздыванием и неопределённостями одновременно в запаздывании и коэффициентах на основе метода функционалов Ляпунова–Красовского. Используется подход, разработанный в статье [1] для случая возмущений в запаздывании. Данный подход основан на построении специальной интегральной оценки производной функционала вдоль решений возмущённой системы.

Введём обозначения: $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ – пространство кусочно-непрерывных функций $\phi : [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ с равномерной нормой; $\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$; $\|A\|$ – евклидова норма матрицы A, $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

2. Постановка задачи. Предположим, что система

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A_0, A_1 – постоянные матрицы, $h \geqslant 0$ – запаздывание, экспоненциально устойчива. Рассмотрим возмущённую систему

$$\dot{y}(t) = (A_0 + \Delta_0) y(t) + (A_1 + \Delta_1) y(t - h - \eta_1), \tag{2}$$

где $\eta_1 \geqslant -h$ – возмущение в запаздывании, а Δ_0, Δ_1 – матричные возмущения. Задача заключается в нахождении ограничений на возмущения $\Delta_0, \Delta_1, \eta_1$, при которых система (2) остаётся экспоненциально устойчивой.

3. Предварительные сведения. Зададим положительно-определённую матрицу W.

Евтина Диана Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: diana.evtina@mail.ru, тел.: +7(981)883-27-89

Определение [2]. Непрерывная матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова системы (1), ассоциированной с симметрической матрицей W, если она удовлетворяет свойствам:

1) $\dfrac{d}{d\tau}U(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau-h)A_1,\ \dfrac{d}{d\tau}U(0) = \lim\limits_{\tau\to+0}\dfrac{d}{d\tau}U(\tau),\ \tau \geqslant 0;$

2) $U(-\tau) = U^T(\tau);$

3) $U(0)A_0 + A_0^T U(0) + U(-h)A_1 + A_1^T U^T(-h) = -W.$

Введём функционал, заданный на пространстве $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ [2]:

$$v_0(\phi) = \phi^T(0)U(0)\phi(0) + 2\phi^T(0)\int\limits_{-h}^{0} U(-\theta-h)A_1\phi(\theta)d\theta +$$
$$+\int\limits_{-h}^{0}\phi^T(\theta_1)A_1^T\int\limits_{-h}^{0}U(\theta_1-\theta_2)A_1\phi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}v_0(x_t)\Big|_{(1)} = -x^T(t)Wx(t), \quad t \geqslant 0.$$

Запишем систему (2) в виде

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + A_1 y(t-h) + f(y_t),$$
$$f(y_t) = \Delta_0 y(t) + A_1\left(y(t-h-\eta_1) - y(t-h)\right) + \Delta_1 y(t-h-\eta_1).$$

Имеем [3]

$$\frac{d}{dt}v_0(y_t)\Big|_{(2)} = -y^T(t)Wy(t) + l(y_t), \tag{3}$$

$$l(y_t) = 2f^T(y_t)\left(U(0)y(t) + \int\limits_{t-h}^{t} U(t-\xi-h)A_1 y(\xi)d\xi\right).$$

4. Оценка функционала $l(y_t)$. Введём обозначения:

$$\begin{gathered} \upsilon = \max_{\theta\in[0,h]}\|U(\theta)\|, \quad a_1 = \|A_1\|, \quad \alpha = 1 + a_1 h, \\ \delta_j = \|\Delta_j\|,\ \rho_j = \|A_j + \Delta_j\|,\ j = \overline{0,1}, \quad H = \max\{h, h+\eta_1\}, \\ \beta = \delta_0 + \delta_1 + a_1|\eta_1|(\rho_0+\rho_1), \quad \gamma = \delta_0 + \delta_1 + \rho_1|\eta_1|(\rho_0+\rho_1). \end{gathered} \tag{4}$$

Оценим функционал $l(y_t)$ двумя способами, полагая $t \geqslant H$.

Первый способ. Применим к функционалу $f(y_t)$ формулу Ньютона – Лейбница:

$$f(y_t) = \Delta_0 y(t) + \Delta_1 y(t-h-\eta_1) + A_1 \int\limits_{-h}^{-h-\eta_1} (A_0+\Delta_0) y(t+s)ds +$$
$$+A_1 \int\limits_{-2h-\eta_1}^{-2h-2\eta_1} (A_1+\Delta_1) y(t+s)ds.$$

Подставим это выражение в функционал $l(y_t)$ и учтём неравенство $2ab \leqslant a^2+b^2$.

Лемма 1. *Функционал $l(y_t)$ удовлетворяет неравенству:*

$$l(y_t) \leqslant \upsilon(\beta+\alpha\delta_0)\|y(t)\|^2 + \upsilon\alpha\delta_1\|y(t-h-\eta_1)\|^2 + \upsilon\beta a_1 \int\limits_{t-h}^{t} \|y(\xi)\|^2 d\xi +$$
$$+\upsilon\alpha\rho_0 a_1 \left| \int\limits_{-h}^{-h-\eta_1} \|y(t+s)\|^2 ds \right| + \upsilon\alpha\rho_1 a_1 \left| \int\limits_{-2h-\eta_1}^{-2h-2\eta_1} \|y(t+s)\|^2 ds \right|. \tag{5}$$

Второй способ. Снова применим формулу Ньютона – Лейбница и представим функционал $f(y_t)$ в виде

$$f(y_t) = \Delta_0 y(t) + \Delta_1 y(t-h) + (A_1+\Delta_1) \int\limits_{-h}^{-h-\eta_1} (A_0+\Delta_0) y(t+s)ds +$$
$$+(A_1+\Delta_1) \int\limits_{-2h-\eta_1}^{-2h-2\eta_1} (A_1+\Delta_1) y(t+s)ds.$$

Лемма 2. *Функционал $l(y_t)$ удовлетворяет неравенству:*

$$l(y_t) \leqslant \upsilon(\gamma+\alpha\delta_0)\|y(t)\|^2 + \upsilon\alpha\delta_1\|y(t-h)\|^2 + \upsilon\gamma a_1 \int\limits_{t-h}^{t} \|y(\xi)\|^2 d\xi +$$
$$+\upsilon\alpha\rho_0\rho_1 \left| \int\limits_{-h}^{-h-\eta_1} \|y(t+s)\|^2 ds \right| + \upsilon\alpha\rho_1^2 \left| \int\limits_{-2h-\eta_1}^{-2h-2\eta_1} \|y(t+s)\|^2 ds \right|. \quad (6)$$

5. Основной результат. Ключевым этапом работы является интегральная оценка функционала $l(y_t)$, полученная путём непосредственного интегрирования слагаемых, входящих в состав правых частей неравенств (5), (6).

Лемма 3. *При $t \geqslant H$ справедлива оценка:*

$$\int\limits_H^t l(y_s)ds \leqslant L\int\limits_H^t \|y(s)\|^2 ds + L_1 \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds,$$

где $L = 2\upsilon\alpha M$, $L_1 = \upsilon M(2\alpha-1)$, $M = \min\{\beta,\gamma\}$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Если*

$$M < \frac{\lambda_{min}(W)}{2\upsilon\alpha},$$

где $\lambda_{min}(W)$ – минимальное собственное число матрицы W, а $M = \min\{\beta,\gamma\}$ определяется равенствами (4). Тогда система (2) остаётся экспоненциально устойчивой.

Доказательство. Проинтегрируем равенство (3) на промежутке $[H,t]$ и применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$v_0(y_t) - v_0(y_H) = -\int\limits_H^t y^T(s)Wy(s)ds + \int\limits_H^t l(y_s)ds.$$

Оценим правую часть получившегося равенства, воспользовавшись леммой 3. Получим

$$v_0(y_t) - v_0(y_H) \leqslant -(\lambda_{min}(W) - L)\int\limits_H^t \|y(s)\|^2 ds + \Psi,$$

$$\Psi = L_1 \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds.$$

Условие теоремы эквивалентно тому, что $\lambda_{min}(W) - L > 0$. Оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство леммы 3 из работы [4].

Теорема доказана.

6. Заключение. В работе получены новые условия робастной устойчивости для линейных стационарных систем, содержащих возмущения одновременно в запаздывании и в матрицах. Полученные условия можно применить итерационно со сходимостью к точным границам области устойчивости в пространстве параметров [1]. Результат может быть обобщён на класс систем с распределённым запаздыванием и несколькими сосредоточенными запаздываниями, а также на случай нестационарных возмущений.

Литература

1. Alexandrova I. V., Zhabko A. P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays // Automatica. 2018. No 91. P. 173–178.

2. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

3. Egorov A. V., Mondíe S. The delay Lyapunov matrix in robust stability analysis of time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No 12. P. 245–250.

4. Alexandrova I. V. New robustness bounds for neutral type delay systems via functionals with prescribed derivative // Applied Mathematics Letters. 2018. No 76. P. 34–39.