УДК 517.977

Воробьёва А. А.

Управление мультиагентными системами с запаздыванием

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

1. Введение. В данной работе рассматривается задача распределения нескольких идентичных объектов на прямой. Предполагается, что сигнал от соседних агентов может быть получен с задержкой. Частным случаем такой задачи является хорошо известная задача «выравнивания в ряд», когда все агенты должны быть распределены на отрезке равномерно. Задача управления формациями в первую очередь связана с управлением мобильными объектами и моделированием биологических формаций [1].

2. Постановка задачи. Основная задача данной работы — построить управление, которое будет обеспечивать размещение агентов таким образом, чтобы они делили отрезок $[0, \widehat{x}]$ в заранее заданных отношениях: $x_i = k_i\widehat{x}$, $i = 1, \dots, n$, $0 < k_1 < \dots < k_n < 1$. Предполагается, что каждый агент может использовать для достижения цели относительную информацию о своем положении, притом информация о соседних агентах поступает с некоторой постоянной задержкой τ.

Рассматривается задача стабилизации агентов. Будем считать, что агент имеет модель первого порядка

$$\dot{x}_j(t) = u_j(t) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

В соответствии с вышеуказанными предположениями, для решения задачи расположения агентов на отрезке предлагается протокол вида

$$u_j(t) = c'_j\left(x_i(t-\tau) - x_j(t)\right) + c_j\left(x_k(t-\tau) - x_j(t)\right), \tag{2}$$

$$0 \leqslant i < j < k \leqslant n+1,$$

Воробъёва Анна Алексеевна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: s012486t@spbu.ru, тел.: +7(911)975-58-80

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-01-00146

где $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \widehat{x}$, т. е. агент с номером j получает информацию о своем расстоянии до некоторого агента i, который находится слева от агента j и до некоторого агента k, находящегося справа от него. Сигналы от всех соседних агентов доходят с запаздыванием. Введём вектор состояния системы $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$. Тогда динамика системы может быть записана в матричной форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C. \tag{3}$$

Требуется выяснить, при каких параметрах системы может быть решена задача стабилизации агентов.

3. Подключение агентов к ближайшим соседям. Для начала рассмотрим случай, когда для стабилизации каждый агент использует информацию о своем положение относительно ближайших левого и правого соседей. Тогда управление строится следующим образом:

$$u_1 = c_1' \left(-x_i(t)\right) + c_1 \left(x_2(t-\tau) - x_1(t)\right),$$

$$u_j = c_j' \left(x_{j-1}(t-\tau) - x_j(t)\right) + c_j \left(x_{j+1}(t-\tau) - x_j(t)\right), \quad j = 2, \ldots, n-1,$$

$$u_n = c_n' \left(x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t)\right) + c_n \left(\widehat{x} - x_n(t)\right).$$

Будем считать, что $c_j' = 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Таким образом, получим

$$A = \begin{pmatrix} -1-c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1-c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1-c_n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_n\widehat{x} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы $\widetilde{X} = (k_1\widehat{x}, \ldots, k_n\widehat{x})^T$ было положением равновесия, необходимо выбирать параметры

$$c_1 = \frac{k_1}{k_2 - k_1},$$

$$c_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{k_{i+1} - k_i}, \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$c_n = \frac{k_n - k_{n-1}}{1 - k_n}.$$

Следовательно, матрица B — неотрицательная, а A — метцелерова. Условия устойчивости положения равновесия систем с такими матрицами получены в работе [2]. Также некоторые результаты, позволяющие исследовать положение равновесия систем такого типа на устойчивость, опубликованы в работах [3–6]. Для того чтобы положение равновесия было асимптотически устойчивым, достаточно проверить, выполняются ли условия Севостьянова–Котелянского для матрицы $A + B$. Так как $A + B$ — матрица Якоби, миноры могут быть вычислены по рекуррентным формулам [7]:

$$\Delta_1 = -\frac{k_2}{k_2 - k_1} < 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{k_2(k_3 - k_1)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} - \frac{k_1}{k_2 - k_1} = \frac{k_3}{k_3 - k_2} > 0,$$

$$\Delta_3 = -\frac{k_3(k_4 - k_2)}{(k_3 - k_2)(k_4 - k_3)} + \frac{k_2}{k_3 - k_2} = -\frac{k_4}{k_4 - k_3} < 0,$$

$$\Delta_i = -\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{k_{i+1} - k_i}\Delta_{i-1} - \frac{k_{i-1} - k_{i-2}}{k_i - k_{i-1}}\Delta_{i-2}, \quad i = 3, \ldots, n.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(-1)^i \Delta_i = \frac{(k_{i+1} - k_{i-1})k_i}{(k_{i+1} - k_i)(k_i - k_{i-1})} - \frac{k_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} = \frac{k_{i+1}}{k_{i+1} - k_i} > 0,$$

$$i = 1, \ldots, n-1,$$

$$(-1)^n \det(A + B) = \frac{1}{1 - k_n} > 0.$$

Приходим к выводу, что в случае, когда все агенты получают информацию с постоянным запаздыванием от своих ближайших соседей, а крайние агенты получают информацию от ближайших концов отрезка, любое заранее заданное расположение агентов внутри фиксированного отрезка можно сделать асимптотически устойчивым положением равновесия.

4. Последовательная стабилизация агентов. Далее будем рассматривать случай, когда первый агент для стабилизации получает информацию от левого конца отрезка, а каждый последующий агент получает информацию от своего ближайшего левого соседа. В соответствии со сделанными предположениями, управление строится следующим образом:

$$u_1 = c_1(k_1\widehat{x} - x_1(t)),$$

$$u_j = c_j\left(k_j\widehat{x} + (x_{j-1}(t-\tau) - x_j(t)) - k_{j-1}\widehat{x}\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

В данном случае

$$A = \mathrm{diag}\{-c_1, \ldots, -c_n\},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1k_1\widehat{x} \\ c_2(k_2-k_1)\widehat{x} \\ \vdots \\ c_n(k_n - k_{n-1})\widehat{x} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что положение $\widetilde{X} = (k_1\widehat{x}, \ldots, k_n\widehat{x})^T$ является положением равновесия для любых c_j, $j = 1, \ldots, n$. Будем считать, что $c_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда матрица A — метцелерова, B — неотрицательная, а $A + B$ — гурвицева. Соответственно, любое заранее заданное расположение агентов внутри фиксированного отрезка можно сделать асимптотически устойчивым положением равновесия.

5. Заключение. Исследована задача распределения нескольких идентичных агентов на отрезке в случае, когда взаимодействие между агентами происходит с запаздыванием. Построены несколько различных протоколов, обеспечивающих стабилизацию мультиагентной системы в заранее заданном положении.

Литература

1. Проскурников А. В., Парсегов С. Э. Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка // Автоматика и телемеханика. 2016. № 10. С. 152–165.

2. Aleksandrov A. Yu., Mason O. Diagonal Riccati stability and applications // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 492. P. 38–51.

3. Александров А. Ю., Воробьёва А. А. Критерии диагональной устойчивости некоторых классов нелинейных дифференциально-разностных систем // В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). Сборник трудов IX международной конференции. 2016. С. 22–23.

4. Воробьёва А. А. Условия диагональной устойчивости матриц специальной структуры // Процессы управления и устойчивость. 2018. Т. 5. № 1. С. 59–63.

5. Александров А. Ю., Воробьева А. А., Колпак Е. П. О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 72–88.

6. Провоторов В. В., Провоторова Е. Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 2. С. 209–224.

7. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965. 300 с.