УДК 517.929.4

Кучкаров И. И.

Достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения одной системы однородных дифференциально-разностных уравнений

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Математические модели технических систем описываются дифференциальными уравнениями. Для учета естественного или технологического запаздывания анализируются дифференциально-разностные уравнения. При исследовании сложных систем часто рассматривают некоторое приближение. Проанализируем случай, когда первое в широком смысле приближение не содержит линейных членов. Именно тогда и появляются однородные уравнения выше первого порядка.

Кроме того, будем рассматривать линейно возрастающее запаздывание. Такое запаздывание возникает при моделировании смесительного бака [1], движения по кольцевой дороге [2] и т. д. В [3] проанализирована устойчивость линейной системы дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием.

В данной работе исследуется устойчивость нулевого решения одного класса систем однородных дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием, который появляется, например, при математическом моделировании работы информационного сервера [4].

2. Основные обозначения и постановка задачи. Будем использовать следующее обозначение:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Кучкаров Ильдус Ильдарович – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kuchkarov_ildus@mail.ru, тел.: +7(911)084-37-42

Рассмотрим при $\mu = 3$ систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = -Ax^3(t) + Bx^3(\alpha t), \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\alpha t_0, t_0], \quad t_0 > 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$, $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция.

Пусть $v(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая положительно-определенная функция.

Говорят, что функция $x(\tau), \tau \in [\alpha t, t]$, удовлетворяет условию Разумихина в точке t, если

$$v(x(\tau)) \leqslant bv(x(t)), \quad \tau \in [\alpha t, t], \quad b > 1. \tag{2}$$

Теорема 1 [5]. *Пусть $v(x)$ — положительно-определенная функция в области $||x|| < H$, $t \geqslant t_0$, допускающая бесконечно малый высший предел. Если полная производная этой функции в силу системы (1) является отрицательно-определенным функционалом на решениях, удовлетворяющих условию Разумихина, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.*

Задачей данной работы является получение условий на матрицы A и B, гарантирующих асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1).

3. Построение функции. Рассмотрим вспомогательную систему без запаздывания

$$\dot{y}(t) = -Ay^3(t) \tag{3}$$

и функцию

$$v(x) = \left(x^2\right)^T Vx^2, \quad V = A^{-1}. \tag{4}$$

Тогда

$$\left.\frac{dv(y)}{dt}\right|_{(3)} = -4\left(y^3(t)\right)^T VAy^3(t) = -4\left\|y^3(t)\right\|^2.$$

В свою очередь

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(1)} = -4\left(x^3(t)\right)^T VAx^3(t) + 4\left(x^3(t)\right)^T VBx^3(\alpha t) =$$
$$= -2\left\|x^3(t)\right\|^2 - 2\left\|x^3(t) - A^{-1}Bx^3(\alpha t)\right\|^2 +$$
$$+ 2\left\|A^{-1}Bx^3(\alpha t)\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant -2\left\|x^3(t)\right\|^2 + 2\left\|A^{-1}B\right\|^2\left\|x^3(\alpha t)\right\|^2.$$

4. Условие Разумихина. Рассмотрим условие (2) для функции (4)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}x_i^4(\alpha t) \leqslant b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}x_i^4(t).$$

Введем обозначение $\lambda_{max} = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\lambda_i$, $\lambda_{min} = \min\limits_{i=\overline{1,n}}\lambda_i$. Получим

$$\frac{1}{\lambda_{max}}\sum_{i=1}^{n}x_i^4(\alpha t) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}x_i^4(\alpha t) \leqslant b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}x_i^4(t) \leqslant b\frac{1}{\lambda_{min}}\sum_{i=1}^{n}x_i^4(t).$$

Тогда

$$\left\|x^2(\alpha t)\right\|^2 \leqslant \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\left\|x^2(t)\right\|^2. \tag{5}$$

Заметим, что для оценки производной функции (4) вдоль решений (1) нужно условие для $\left\|x^3\right\|^2$.

5. Изменение нормы при поэлементном возведении вектора в степень.

Лемма 1. *Если $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$, то*

$$\min_{\|x\|^2=\gamma}\|x^\mu\|^2 = \frac{\gamma^\mu}{n^{\mu-1}}, \quad \max_{\|x\|^2=\gamma}\|x^\mu\|^2 = \gamma^\mu.$$

Лемма 2. *Если $\|x\|^2 \leqslant c\|y\|^2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $c > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$, то*

$$\|x^\mu\|^2 \leqslant c^\mu n^{\mu-1}\|y^\mu\|^2.$$

6. Достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (1). Из (5) и леммы 2 при $\mu = \frac{3}{2}$ следует, что на решениях системы, удовлетворяющих условию Разумихина, выполняется

$$\left\|x^3(\alpha t)\right\|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} b\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n} \left\|x^3(t)\right\|^2.$$

Тогда

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -2\left\|x^3(t)\right\|^2 + 2\left\|A^{-1}B\right\|^2 \left\|x^3(\alpha t)\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant -2\left\|x^3(t)\right\|^2 \left(1 - \left\|A^{-1}B\right\|^2 \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} b\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}\right).$$

Отсюда для отрицательной определенности функционала $\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(1)}$ достаточно выполнения неравенства

$$\left\|A^{-1}B\right\|^2 \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} b\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n} < 1.$$

Из условий

$$1 < b < \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \frac{1}{\left(\left\|A^{-1}B\right\|^2 \sqrt{n}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

получаем ограничение на коэффициенты системы.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть матрицы A и B подчиняются условию:*

$$\left\|A^{-1}B\right\|^2 < \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

7. Заключение. В работе рассмотрена асимптотическая устойчивость однородной дифференциально-разностной системы с линейно возрастающим запаздыванием и получены достаточные условия асимптотической устойчивости одного класса таких уравнений с одним запаздыванием.

Литература

1. Жабко А. П., Чижова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник ТГУ. 2015. Т. 20. Вып. 4. С. 843–850.

2. Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. No 2. P. 67–72.

3. Меденников И. П. Прямой метод анализа устойчивости систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Т. 10. № 3. С. 125–140.

4. Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 11. № 3. С. 105–115.

5. Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. Вып. 6. С. 740–748.