УДК 517.925.51

Ковалева Н. О.

О диагональной устойчивости матриц со специальной структурой

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

Введение. В настоящей статье рассматривается проблема диагональной устойчивости пары вещественных матриц A и B специального вида. Существует общий критерий проверки матриц на диагональную устойчивость [1], однако непосредственное использование этого критерия напрямую может вызвать затруднение. В связи с этим актуальной является задача выделения классов матриц, для которых можно получить конструктивно проверяемые условия диагональной устойчивости. Данная задача имеет широкое применение при построении диагональных функционалов Ляпунова–Красовского для сложных систем с запаздыванием [1–6].

Постановка задачи. Рассмотрим постоянные вещественные матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ и $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Определение [1]. Пара матриц A, B диагонально устойчива, если существуют диагональные положительно-определенные матрицы $P = \mathrm{diag}\{p_1, \dots, p_n\}$ и $Q = \mathrm{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$, при которых матрица

$$R = A^T P + PA + Q + PBQ^{-1}B^T P \qquad (1)$$

отрицательно определена.

В данной работе будем полагать, что $n = 2k$, где k — натуральное число, а матрицы

Ковалева Надежда Олеговна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st056052@student.spbu.ru, тел.: +7(909)579-40-53

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-01-00146-А

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_k & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Матрицы указанной структуры используются для моделирования сложных систем, описывающих взаимодействие подсистем второго порядка с запаздыванием в связях между ними (см. рис. 1).

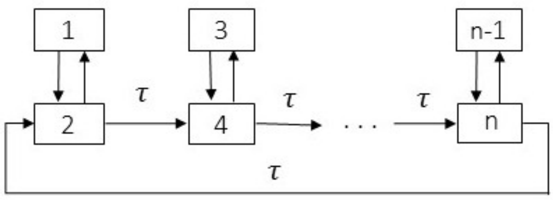

Рис. 1. Структура связей в системе с матрицами (2), (3)

В частности, они применяются в моделях биологических сообществ [5].

Критерий диагональной устойчивости. В данном случае матрицу (1) можно записать в виде

$$R = \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R^{(k)} \end{pmatrix} + Q,$$

где $Q = \mathrm{diag}\{q_1, 0, q_3, 0, \ldots, q_{n-1}, 0\}$,

$$\begin{aligned} &R^{(s)} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(s)} & r_{12}^{(s)} \\ r_{12}^{(s)} & r_{22}^{(s)} \end{pmatrix}, \\ &r_{11}^{(s)} = 2a_{2s-1\,2s-1}p_{2s-1}, \\ &r_{12}^{(s)} = a_{2s-1\,2s}p_{2s-1} + a_{2s\,2s-1}p_{2s}, \\ &r_{22}^{(s)} = 2a_{2s\,2s}p_{2s} + q_{2s} + \tfrac{p_{2s}^2 b_s^2}{q_{2s-2}}, \quad s = 1, \ldots, k, \quad q_0 = q_n. \end{aligned}$$

Следовательно, пара матриц A, B диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $p_1, \ldots, p_n$ и $q_2, q_4, \ldots, q_n$ такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &2a_{2s-1\,2s-1}p_{2s-1}\left(2a_{2s\,2s}p_{2s} + q_{2s} + \tfrac{p_{2s}^2 b_s^2}{q_{2s-2}}\right) > \\ &> \left(a_{2s-1\,2s}p_{2s-1} + a_{2s\,2s-1}p_{2s}\right)^2, \quad s = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) получаем необходимые условия диагональной устойчивости

$$\begin{aligned} &a_{ii} < 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &a_{2s-1\,2s-1}a_{2s\,2s} > a_{2s-1\,2s}a_{2s\,2s-1}, \quad s = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее будем считать условия (5) выполненными.

Выберем произвольный номер $s \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда для любых положительных чисел q_{2s-2}, q_{2s} соответствующее неравенство из (4) будет выполнено в следующих случаях:

а) если $a_{2s\,2s-1} = 0$, то при достаточно малых значениях p_{2s-1} и достаточно больших значениях p_{2s};

б) если $a_{2s\,2s-1} \neq 0$ и $a_{2s-1\,2s} = 0$, то при $p_{2s} = -q_{2s}/2a_{2s\,2s}$ и достаточно больших значениях p_{2s-1};

в) если $a_{2s\,2s-1} \neq 0$, $b_s = 0$ и $a_{2s-1\,2s} \neq 0$, то при $p_{2s-1} = p_{2s}|a_{2s\,2s-1}/a_{2s-1\,2s}|$ и достаточно больших значениях p_{2s}.

Таким образом, в случаях а), б), в) для диагональной устойчивости матриц (2), (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (5).

Пусть теперь $a_{2s-1\,2s} \neq 0$, $a_{2s\,2s-1} \neq 0$ и $b_s \neq 0$. Рассмотрим s-е неравенство из (4). Найдем p_{2s-1} и p_{2s}, которые определяют наиболее широкую область значений остальных параметров, гарантируя при этом диагональную устойчивость матриц. Нетрудно проверить, что в этом случае необходимо положить

$$p_{2s-1} = p_{2s}\left|\frac{a_{2s\,2s-1}}{a_{2s-1\,2s}}\right|,$$

$$p_{2s} = \begin{cases} -\frac{q_{2s-2}\Delta_{2s-1\,2s}}{a_{2s-1\,2s-1}b_s^2} & \text{при} \quad a_{2s-1\,2s}a_{2s\,2s-1} > 0, \\ -\frac{a_{2s\,2s}q_{2s-2}}{b_s^2} & \text{при} \quad a_{2s-1\,2s}a_{2s\,2s-1} < 0, \end{cases}$$

где $\Delta_{2s-1\,2s} = a_{2s-1\,2s-1}a_{2s\,2s} - a_{2s-1\,2s}a_{2s\,2s-1}$.

При таком выборе p_{2s-1} и p_{2s} s-е неравенство из (4) эквивалентно условию

$$b_s^2 q_{2s} < \zeta_s q_{2s-2},$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \Delta^2_{2s-1\,2s}/a^2_{2s-1\,2s-1} & \text{при} \quad a_{2s-1\,2s}a_{2s\,2s-1} > 0, \\ a^2_{2s\,2s} \quad \text{при} \quad a_{2s-1\,2s}a_{2s\,2s-1} < 0. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Пусть матрицы A и B имеют вид (2) и (3) соответственно. Тогда если $a_{2s-1\,2s} \neq 0$, $a_{2s\,2s-1} \neq 0$ и $b_s \neq 0$, $s = 1, \dots, k$, то для их диагональной устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (5) и*

$$\prod_{s=1}^{k} \zeta_s > \prod_{s=1}^{k} b_s^2.$$

А если существует такой номер $r \in \{1, \dots, k\}$, что выполнены условия одного из случаев а), б), в), то для диагональной устойчивости матриц A, B необходимо и достаточно, чтобы выполнялись только неравенства (5).

Заключение. Для исследуемого класса матриц со специальной структурой удалось получить конструктивно проверяемые условия, выполнение которых гарантирует диагональную устойчивость рассматриваемых матриц.

Литература

1. Aleksandrov A., Mason O. Diagonal Riccati stability and applications // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 492. P. 38–51.

2. Александров А. Ю., Воробьева А. А., Колпак Е. П. О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 72–88.

3. Aleksandrov A., Kovaleva N. Diagonal Riccati stability of a class of time-delay systems // Cybernetics and physics. 2018. Vol. 7. No 4. P. 167–173.

4. Berman A., Plemmons R. J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Philadelphia: SIAM, 1987. 361 p.

5. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

6. Подвальный С. Л., Провоторов В. В. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 11. № 3. С. 126–142.