

УДК 539.3

Сергеева Т. С.

Периодический ряд краевых дислокаций и сосредоточенных сил в двухкомпонентной упругой среде при учете межфазных напряжений

Рекомендовано к публикации профессором Грековым М. А.

1. Введение. Бурное развитие нанотехнологий и широкое применение наноматериалов в оптоэлектронике и различных биомедицинских приборах и устройствах приводит к необходимости изучения прочностных и функциональных свойств реальных материалов на наномасштабном уровне и, в частности, упругих полей в различного рода наноструктурах, у которых по крайней мере один линейный размер находится в диапазоне от одного до нескольких десятков нанометров. Особое значение в инженерной практике имеет анализ взаимодействия характерных нанонеоднородностей (включений, пор, нанокластеров, микротрещин и др.) друг с другом и с межфазными границами, возле которых наблюдается наибольшая их концентрация. Как и на макроуровне, наиболее эффективные методы решения соответствующих краевых задач основаны на построении фундаментальных решений. Поскольку многие процессы, связанные с особенностью внешних воздействий и структуры материала, носят периодический характер, то периодические фундаментальные решения представляют особый интерес для практики. Этим решениям для случаев, когда та или иная неоднородность находится на нанометровом расстоянии от границы раздела двух различных сред, и посвящена данная работа.

Рассматривается бесконечная двухкомпонентная упругая среда в условиях плоской деформации под действием периодической системы сосредоточенных сил или краевых дислокаций, расположенных параллельно плоской межфазной границе. В отличие от решения этой задачи на макроуровне [1] в работе учитываются межфазные (поверхностные) напряжения Гиббса, которые вносят существенный

Сергеева Татьяна Сергеевна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tfkp@mail.ru, тел.: +7(911)297-36-02

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00468

вклад в энергию упругой деформации наноматериала и являются причиной размерного эффекта [2, 3]. Для этой цели используется континуальная теория поверхностной упругости Гертена – Мердока [4], которая приводит к гиперсингулярному интегральному уравнению относительно производной поверхностного напряжения. Решение этого уравнения представлено в виде ряда Фурье, коэффициенты которого получены в квадратурах. В явном виде выведены формулы для компонент тензора напряжений. Приводится пример численного анализа влияния межфазного напряжения на напряженное состояние границы в зависимости от упругих свойств компонентов композита при действии краевых дислокаций.

2. Постановка задачи. Рассмотрим двукомпонентную упругую среду, состоящую из нижней $\Omega_1 = \{z : \text{Im } z < 0\}$ и верхней $\Omega_2 = \{z : \text{Im } z > 0\}$ полуплоскостей с границей раздела Γ , $z = x_1 + ix_2$. В точках $z_k = ak - ih$ ($h > 0$, $a > 0$, $k = 0, \pm 1, \dots$) либо действуют силы $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$, либо расположены краевые дислокации с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Граница испытывает действие межфазного напряжения $\sigma_{11}^s = \tau$, и на ней заданы скачки вектора перемещений $u = u_1 + iu_2$ и вектора напряжений $\sigma = \sigma_{22} - i\sigma_{12}$:

$$\Delta u = u^+(x_1) - u^-(x_1) = 0, \quad \Delta \sigma = \sigma^+(x_1) - \sigma^-(x_1) = i \frac{d\tau}{dx_1}, \quad (1)$$

где $u^\pm(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} u(z)$, $\sigma^\pm(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} \sigma(z)$, а на бесконечности напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) и поворот частицы ω таковы, что

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm \infty} \sigma_{ij}(z) = s^\pm, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \pm \infty} \omega(z) = \omega^\pm. \quad (2)$$

Для построения решения используем определяющие соотношения поверхностной теории упругости Гертена – Мердока [4] и закон Гука для напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} объемных частей композита в прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2 в случае плоской деформации, а также условие непрерывности перемещений на межфазной границе Γ .

3. Метод суперпозиции. Следуя принципу суперпозиции [1, 5], напряженно-деформированное состояние двухкомпонентной среды с межфазными напряжениями ищем в виде суммы решений двух задач: задачи для однородной плоскости с упругими свойствами сре-

ды Ω_1 при действии периодических сил или дислокаций и условиях на бесконечности (2) и задачи для двухкомпонентной среды $\Omega_1 \cup \Omega_2$ со скачками напряжений и перемещений на границе раздела при нулевых условиях на бесконечности, т. е.

$$G(z, \eta_k) = G_b(z, \eta_k) + G_0(z, \eta_1)\delta_k, \quad z \in \Omega_k, \quad (3)$$

где $\{G, G_b, G_0\} = \{\sigma_n, \sigma_n^b, \sigma_n^0\}$ при $\eta = 1$, $\{G, G_b, G_0\} = -2\mu\{\partial u/\partial z, \partial u^b/\partial z, \partial u^0/\partial z\}$ при $\eta_k = -\alpha_k = -(\lambda_k + 3\mu_k)/(\lambda_k + \mu_k)$; $\sigma^0(z), u^0(z)$ — напряжение и перемещение в первой задаче, $\sigma^b(z), u^b(z)$ — напряжение и перемещение во второй задаче, λ_k, μ_k — параметры Ламе объемного материала; $\delta_k = 1$ при $k = 1$ и $\delta_k = 0$ при $k = 2$. Индекс n указывает на нормаль к площадке, на которой действует соответствующий вектор напряжений.

Подставив равенство (3) в (1) при направлении вектора нормали \mathbf{n} перпендикулярно оси x_1 , приходим к граничному условию для второй задачи:

$$\Delta\sigma^b(x_1) = \sigma^0(x_1) + i\tau'(x_1), \quad \Delta u^b(x_1) = u^0(x_1). \quad (4)$$

4. Комплексные потенциалы. Для решения второй задачи и исходной задачи в целом воспользуемся соотношениями, связывающими напряжения и перемещения с комплексными потенциалами Гурса – Колосова [1]:

$$G_0(z, \eta_1) = \eta_1 \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - \left(z \overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega_1, \quad (5)$$

$$G_b(z, \eta_k) = \eta_k \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - \left(\Upsilon_k(\bar{z}) + \overline{\Phi_k(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad (6)$$

где $z \in \Omega_k$, α — угол между направлением площадки и осью x_1 . Функция $\Phi_k(z)$ голоморфна в Ω_k , а $\Upsilon_k(z)$ в Ω_{3-k} ($k = 1, 2$). Функции Φ_0, Ψ_0 соответствуют действию рассмотренных точечных возмущений в однородной плоскости и определяются равенствами

$$\Phi_0(z) = -H \operatorname{ctg} \frac{\pi(z + ih)}{a},$$

$$\Psi_0(z) = (\lambda \bar{H} + H) \operatorname{ctg} \frac{\pi(z + ih)}{a} - \frac{\pi H}{a} (z + 2ih) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(z + ih)}{a},$$

где

$$\lambda = \varkappa_1, \quad H = \frac{P_1 + iP_2}{2a(\varkappa_1 + 1)} \quad \text{или} \quad \lambda = -1, \quad H = \frac{i\mu(b_1 + ib_2)}{a(\varkappa_1 + 1)}.$$

5. Решение задачи. Построение решения второй задачи достаточно подробно изложено в работе [1]. В отличие от [1] граничные условия (4) содержат неизвестную функцию τ' , поэтому потенциалы Φ_k, Υ_k зависят не только от Φ_0, Ψ_0 , но и от этой неизвестной функции. В результате приходим к следующим выражениям для напряжений в области Ω_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} - i\sigma_{12} = & \eta_1 \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} - \\ & - \eta_1 K_2 \left[\overline{\Phi_0(\bar{z})} + z\overline{\Phi_0'(\bar{z})} + \overline{\Psi_0(\bar{z})} + S_1 \right] - K_1 [\Phi_0(\bar{z}) - S_2] - \\ & - K_2(z - \bar{z}) [2\overline{\Phi_0'(\bar{z})} + \bar{z}\overline{\Phi_0''(\bar{z})} - \overline{\Psi_0(\bar{z})}] + \eta_1 K_4 T_1(z) + a_{11}\eta_1 + \\ & + K_4(z - \bar{z})T_1'(z) - K_3 T_1(\bar{z}) + a_{12}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + i\sigma_{12} = & \eta_1 \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - z\overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0(z)} - \\ & - \eta_1 K_2 \left[\overline{\Phi_0(\bar{z})} + z\overline{\Phi_0'(\bar{z})} + \overline{\Psi_0(\bar{z})} + S_1 \right] - \\ & - 2K_2 [\Phi_0(\bar{z}) + \bar{z}\overline{\Phi_0'(\bar{z})} + \overline{\Psi_0(\bar{z})} + S_1] + K_1 [\Phi_0(\bar{z}) - S_2] + \\ & + K_2(z - \bar{z}) [2\overline{\Phi_0'(\bar{z})} + \bar{z}\overline{\Phi_0''(\bar{z})} - \overline{\Psi_0(\bar{z})}] + \eta_1 K_4 T_1(z) + \\ & + a_{11}\eta_1 + 2 \left[K_4 \overline{T(\bar{z})} + \overline{a_{11}} \right] - K_4(z - \bar{z})T_1'(z) + K_3 T_1(\bar{z}) + a_{12}. \quad (8) \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить и для области Ω_2 . В (7), (8) коэффициенты K_j зависят от упругих постоянных Ламе λ_j, μ_j , а a_{11}, a_{12} — от напряжений на бесконечности. Неизвестная функция $T(z)$ определяется интегралом типа Коши:

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\tau'(t)}{t - z} dt, \quad z \in \Omega_1 \cup \Omega_2. \quad (9)$$

Соотношения (7), (8), упругие законы и условие совместности деформаций объемных частей композита и межфазной поверхности в совокупности позволяют свести нахождение функции τ' и, как следствие, функции $T(z)$ к решению гиперсингулярного интегрального уравнения

$$\tau'(x_1) - \frac{\Lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau'(t)}{(t-x_1)^2} dt = F(x_1), \quad (10)$$

где параметр Λ зависит от упругих постоянных объемных частей и межфазной поверхности.

Уравнение (10) отличается от уравнения, полученного в [6] лишь правой частью, которая является непрерывной функцией. Так же, как и в [6], решение уравнения (10) ищем в виде

$$\tau'(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos l_k x_1 + b_k \sin l_k x_1), \quad l_k = 2\pi k/a. \quad (11)$$

Коэффициенты a_k и b_k выражаются через коэффициенты ряда Фурье функции F . После подстановки (11) в интеграл (9), находим

$$T(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - ia_k) \exp(-il_k z), \quad T(\bar{z}) = \overline{T(z)}, \quad \text{Im } z < 0. \quad (12)$$

Решение (12) позволяет по формулам (7), (8) вычислить напряжения в любой точке нижней полуплоскости с необходимой точностью.

6. Визуализация. В качестве примера на рис. 1 приведены графики распределения напряжений σ_{11} в случае дислокаций с периодом $a = 10$ нм, расстоянием до границы $h = 1$ нм и вектором Бюргерса, параллельным границе, при различных отношениях упругих постоянных. Сплошным линиям отвечает решение с учетом поверхностного напряжения, пунктирным — без него. Упругие постоянные нижней полуплоскости и межфазной границы взяты те же, что и в работе [6]. Как видно из графиков, учет поверхностного напряжения существенно влияет на значения напряжений вблизи их экстремальных значений. При увеличении отношения μ_2/μ_1 напряжение σ_{11}^- непосредственно над дислокацией увеличивается по абсолютной величине, а σ_{11}^+ — уменьшается.

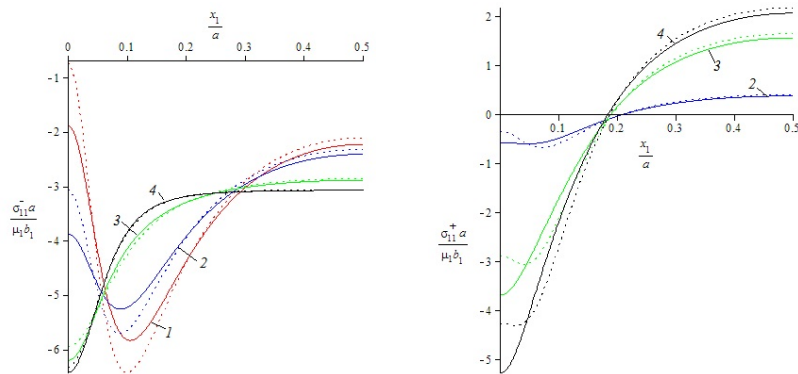


Рис. 1. Приведенные напряжения σ_{11}^{\pm} в пределах полупериода на межфазной границе при $\mu_2/\mu_1 = 0, 0.3, 3, 10$ (кривые 1, 2, 3, 4)

Литература

1. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 192 с.
2. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu. S., et al. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // Acta Mechanica Sinica. 2011. Vol. 24. P. 52–82.
3. Греков М. А. Математика и механика внутренних и поверхностных дефектов // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 19–44.
4. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1975. Vol. 57. No 4. P. 291–323.
5. Греков М. А., Костырко С. А. Напряженное состояние тонкого покрытия при действии периодической системы поверхностных сосредоточенных сил // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. № 4. С. 99–107.
6. Греков М. А., Сергеева Т. С. Периодическая система дислокаций и внутренних сил в полубесконечном упругом теле при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 137–142.