УДК 517.929.2

Цимфер С. А.

Метод дискретизации для расчета динамики системы дифференциально-разностных уравнений

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Системы дифференциальных уравнений с запаздываниями используются при моделировании широкого класса реальных явлений и процессов. Свойства их решений определяются, в том числе, такими математическими величинами как запас устойчивости и перерегулирование. Подобные количественные характеристики представляют собой простейшие функционалы качества и позволяют сравнивать решения между собой. В статьях [1, 2] предложены алгоритмы оценки указанных параметров, однако их практическое применение затруднено необходимостью решения оптимизационных задач высокой размерности. Цель данной работы — разработка алгоритмов, лишенных этого недостатка.

2. Основные обозначения и постановка задачи. Рассмотрим систему линейных стационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \tag{1}$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ — вектор, $A, B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ — квадратные матрицы, $h > 0$ — некоторое положительное запаздывание. Зададимся, кроме того, кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Функция $x(t, \varphi)$, удовлетворяющая условию $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$ для всех $\theta \in [-h, 0]$ и системе (1), называется решением этой системы с заданными начальными условиями.

Определение 1. Функция $x_t(\theta, \varphi) = x(t + \theta, \varphi)$, определенная при $\theta \in [-h, 0]$, называется состоянием системы в момент времени t.

Определение 2. Система уравнений (1) называется *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие постоянные $\sigma > 0$ и $\gamma \geqslant 1$, что для любой начальной функции $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \ \|\varphi\|_h. \tag{2}$$

Цимфер Сергей Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zimfer@mail.ru, тел.: +7(911)910-44-67

Здесь и далее используется равномерная норма для функций. Евклидова и индуцированная ею нормы — для векторов и матриц.

Определение 3. Минимальные допустимые значения постоянных $-\sigma$ и γ из неравенства (2) называют соответственно *запасом устойчивости* и *величиной перерегулирования* системы (1).

3. Вспомогательные утверждения. Для трех симметричных матриц $W_j, j = 0, 1, 2$, определим функционал вида

$$w(\varphi) = \varphi^{\mathrm{T}}(0)W_0\varphi(0) + \varphi^{\mathrm{T}}(-h)W_1\varphi(-h) + \int_{-h}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\theta)W_2\varphi(\theta)d\theta.$$

Рассмотрим функционал $v(\varphi)$, удовлетворяющий вдоль решений системы (1) условию

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -w(x_t), \quad t \geqslant 0.$$

Как показано в [3],

$$\begin{aligned} v(\varphi) = \varphi^{\mathrm{T}}(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^{\mathrm{T}}(0)\int_{-h}^{0} U(-h-\theta)B\varphi(\theta)d\theta + \\ + \int_{-h}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\theta_1)B^{\mathrm{T}}\left[\int_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2)B\varphi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1 + \\ + \int_{-h}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\theta)\left[W_1 + (h+\theta)W_2\right]\varphi(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$U(\tau) = \int_{0}^{\infty} K^{\mathrm{T}}(t)\big(W_0 + W_1 + hW_2\big)K(t+\tau)dt \; -$$

матрица Ляпунова, $K(t)$ — фундаментальная матрица (1).

Назовем функционал (3) функционалом полного типа, если матрицы $W_j, j = 0, 1, 2$, являются положительно-определенными. Справедлив более сильный аналог теоремы Красовского.

Теорема 1 [3]. *Система* (1) *является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда существует функционал полного типа и положительные постоянные* α_1, α_2 *такие, что*

$$\alpha_1\|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2\|\varphi\|_h^2.$$

Кроме того, в [3] указан полуаналитический метод нахождения $U(\tau)$ для системы (1). Данный метод предполагает решение системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений со специальным начальным условием.

4. Нахождение запаса устойчивости. Для нахождения величины σ экспоненциально устойчивой системы (1) рассмотрим замену переменных $y(t) = e^{\delta t}x(t)$. Имеем

$$\dot{y}(t) = (A + \delta E)\ y(t) + e^{\delta h}By(t-h). \tag{4}$$

Система (4) является экспоненциально устойчивой в том и только том случае, когда $\delta < \sigma$. Следующая теорема дает эквивалентное этому условие, накладываемое только на δ.

Теорема 2 [3]. *Пусть система* (1) *является экспоненциально устойчивой. Для трех положительно-определенных матриц* W_j, $j = 0, 1, 2$*, система* (4) *остается экспоненциально устойчивой, если выполняются следующие условия:*

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(W_0) &\geqslant \mathrm{v}[\delta(2+bh) + b(e^{\delta h}-1)], \\ \lambda_{\min}(W_1) &\geqslant b\mathrm{v}(e^{\delta h}-1)(1+bh), \\ \lambda_{\min}(W_2) &\geqslant b\mathrm{v}[\delta + b(e^{\delta h}-1)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{v} = \|U(\tau)\|_h,\ b = \|B\|$.

Предположим, что для исходной системы (1) найдена максимальная величина δ, удовлетворяющая системе неравенств (5). Обозначим ее δ_1. Рассматривая систему (4) при $\delta = \delta_1$ в качестве исходной системы (1) и повторяя рассуждения, можно найти значение δ_2. В этом случае теорема 2 гарантирует, что система вида (4) будет оставаться экспоненциально устойчивой и при $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Введя обозначения $\delta_0 = 0$ и $\sigma_k = \sum_{i=0}^{k}\delta_i$, можно заключить, что система (4) остается экспоненциально устойчивой для любого $\delta = \sigma_k$, полученного подобным образом.

Теорема 3. *Последовательность* $\{\sigma_k\}$ *— сходящаяся, причем*

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \sigma.$$

Доказательство. По построению, $\{\sigma_k\}$ является монотонно возрастающей. Кроме того, она ограничена сверху: $\sigma_k < \sigma$ для любого k. Значит, предел указанной последовательности существует.

Предположим, что рассматриваемый предел не совпадает со значением запаса устойчивости, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \widehat{\sigma} \neq \sigma.$$

По построению $\widehat{\sigma} < \sigma$, поэтому при $\delta = \widehat{\sigma}$ система (4) экспоненциально устойчива. В этом случае неравенства (5) выполняются как минимум при $\delta = 0$. Из непрерывности правых частей неравенств следует существование $\nu > 0$ такого, что неравенства остаются верны и для любого $\delta \in [0, \nu)$. Следовательно, для значения $\delta = \widehat{\sigma} + \nu/2$

система (4) также является экспоненциально устойчивой. С другой стороны, по определению $\widehat{\sigma}$, для любого $\varepsilon > 0$ условия (5) нарушаются при $\delta = \widehat{\sigma} + \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 2 и 3 позволяют свести задачу нахождения запаса устойчивости системы (1) к последовательному нахождению максимальных величин δ_k, удовлетворяющих системе неравенств (5).

Замечание 1. Значения δ_k зависят от матриц W_j, $j = 0, 1, 2$, определяющих функционал полного типа. Несмотря на то, что их оптимальный выбор может существенно увеличить скорость сходимости последовательности, далее он не рассматривается.

Замечание 2. Аналогичные построения справедливы и для систем линейных разностных уравнений.

5. Вычисление величины перерегулирования. Для нахождения γ рассмотрим замену $t = \alpha\tau$, $\alpha \neq 0$. Получаем

$$\dot{\xi}(\tau) = \alpha A\xi(\tau) + \alpha B\xi(\tau - h/\alpha).$$

Выбором параметра α можно перейти к системе, аналогичной (1), с произвольно малой величиной запаздывания. Заметим, что данное преобразование не влияет на значение γ.

Введем равномерное разбиение $\tau_k = kh/\alpha$ с шагом h/α, совпадающим с величиной запаздывания, и заменим производную на левую дискретную разность. Полученную систему можно записать в виде

$$\xi(\tau_{k+1}) = (E - hA)^{-1}(E + hB)\xi(\tau_k). \tag{6}$$

При шаге дискретизации, стремящемся к нулю, решение данной разностной системы стремится к фундаментальному решению исходной. В то же время, (6) не зависит от α, и определяется для (1) единственным образом. Предполагая экспоненциальную устойчивость, имеем

$$\|\xi(\tau_k)\| \leqslant \gamma_d e^{-\sigma_d \tau_k}\ \|\varphi(-h)\|.$$

Перейдем к уравнению относительно фундаментальной матрицы системы (6). Вводя обозначение $P = (E - hA)^{-1}(E + hB)$, получаем систему уравнений и оценку для величины перерегулирования

$$\begin{cases} Z(\tau_{k+1}) = PZ(\tau_k), \\ Z(0) = E, \end{cases} \tag{7}$$

$$\gamma_d \geqslant \max_{k \geqslant 0} \Big\{ \|Z(\tau_k)\| e^{\sigma_d \tau_k} \Big\}. \tag{8}$$

Таким образом, задача нахождения γ_d сведена к задаче нахождения σ_d и интегрирования системы (7).

6. Программная реализация. Полученные результаты позволяют свести задачу нахождения параметров σ и γ к последовательному решению системы неравенств и интегрированию разностной системы специального вида. Программа, выполняющая данные задачи, реализована на языке программирования Python. Рассмотрим пример системы (1), используемый в работах других авторов [4]:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

В результате работы программы при $h = 0{,}5$ получено значение $\sigma = 1{,}1534775$, совпадающее с полученным в цитируемой работе значением. Также получено значение $\gamma = 1{,}7882373$. На рис. 1 представлено сравнение получаемых значений с результатами [4] для $h \in [0, 1]$. Заметим, что при $h \longrightarrow 0^+$ значение γ_d стремится к величине перерегулирования для системы $\dot{x}(t) = (A+B)x(t)$.

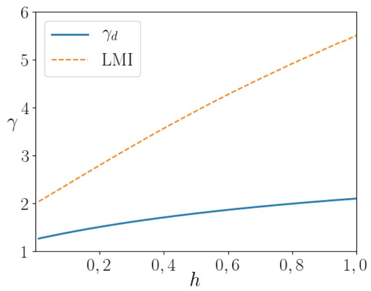

Рис. 1. Сравнение алгоритмов

7. Заключение. Для линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений предложен алгоритм оценки параметров переходных процессов устойчивых систем и его программная реализация. В дальнейшем результаты могут быть обобщены на системы уравнений с несколькими запаздываниями.

Литература

1. Цимфер С. А. Оценка параметров переходного процесса линейной системы на основе прямого метода Ляпунова // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 138–143.

2. Цимфер С. А. Метод Нелдера – Мида в задаче оценки параметров переходного процесса линейной дифференциально-разностной системы // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 69–74.

3. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.

4. Mondie S., Kharitonov V. L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. Vol. 50, No 2. P. 268–273.