

УДК 517.929

Андрянова Н. Р.

Анализ алгоритма Z. Artstein стабилизации уравнения с запаздыванием

Рекомендовано к публикации профессором Харитоновым В. Л.

1. Введение. Задача стабилизации системы дифференциальных уравнений с запаздываниями в состоянии и управлении решалась методом ее сведения к системе без запаздываний [1]. Для этого использовался интегральный закон управления, в котором участвовала неявно заданная матрица и предлагался алгоритм ее нахождения с опорой на собственные числа системы, т. е. корни квазиполинома. Точные значения последних найти не всегда удается.

В предложенной работе для случая скалярного уравнения находится допустимая погрешность собственного значения, которая не нарушит стабилизируемость. Решение основано на анализе характеристического уравнения замкнутой системы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t-r) + b_0u(t) + b_1u(t-h), \quad (1)$$

r и h — положительные числа, $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$. Допустим, для него удалось подобрать стабилизирующее управление

$$u(t) = -kx(t) - k \int_{t-r}^t e^{a(t-r-\theta)} a_1x(\theta) d\theta - k \int_{t-h}^t e^{a(t-h-\eta)} b_1u(\eta) d\eta. \quad (2)$$

Число a находится из уравнения $a = a_0 + e^{-ra}a_1$. Также оно является корнем характеристической функции для уравнения (1)

$$q(s) = s - a_0 - a_1e^{-sr}.$$

Значение a точно не всегда удается найти. Поэтому вместо точного значения используется приближение \tilde{a} , которое можно найти численно.

Андрянова Наталья Романовна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: natasha23062@mail.ru, тел.: +7(981)940-80-79

Рассмотрим управление, где вместо a используется величина \tilde{a} :

$$u(t) = -kx(t) - k \int_{t-r}^t e^{\tilde{a}(t-r-\theta)} a_1 x(\theta) d\theta - k \int_{t-h}^t e^{\tilde{a}(t-h-\eta)} b_1 u(\eta) d\eta. \quad (3)$$

Требуется выяснить, с какой погрешностью следует вычислить \tilde{a} , чтобы приближенное управление (3) стабилизировало уравнение (1).

3. Робастный анализ. По условию, система (1), (2) экспоненциально устойчива и корни ее характеристической функции имеют отрицательную вещественную часть.

Использовалась замена переменных, предложенная Эйлером: $x(t) = e^{st}\gamma$, $u(t) = e^{st}\mu$, где γ , μ — постоянные, одновременно ненулевые векторы. Определитель получившейся матрицы системы относительно γ , μ и есть характеристическая функция

$$F(s) = \frac{s - a_0 - a_1 e^{-sr}}{s - a} (s - a + bk),$$

где $b = b_0 + e^{-ha} b_1$.

Чтобы управление (2) стабилизировало уравнение (1), необходимо задать ограничения на параметры. Коэффициент k выбирается так, чтобы $a - bk < 0$. Это требование возникает после сведения уравнения с запаздыванием к известному варианту без запаздывания $\dot{z}(t) = az(t) + bu(t)$ с управлением $u(t) = -kz(t)$ [1]. Числитель $F(s)$ — квазиполином запаздывающего типа, имеющий не более чем конечное число собственных чисел в правой полуплоскости [2]. Число a выбрано так, чтобы сократить один корень с положительной вещественной частью функции $q(s)$.

Запишем характеристическое уравнение для замкнутой системы (1), (3)

$$\tilde{f}(s) = \underbrace{\frac{s - \tilde{a}_0 - a_1 e^{-sr}}{s - \tilde{a}} (s - \tilde{a} + \tilde{b}k)}_{f(s)} + \underbrace{(\tilde{a}_0 - a_0)}_{\mu} \left(1 + k \frac{e^{-\tilde{a}h} - e^{-sh}}{s - \tilde{a}} b_1 \right),$$

где $\tilde{a}_0 = \tilde{a} - e^{-r\tilde{a}} a_1$ и $\tilde{b} = b_0 + e^{-h\tilde{a}} b_1$. Фигурными скобками снизу введены функции, используемые дальше.

Когда у $f(s)$ в знаменателе появится один корень $\tilde{a} \geq 0$, он сократится с одним корнем в числителе [1]. Наличие в числителе

пары комплексных корней с неотрицательной вещественной частью, или двух и более положительных корней, или кратного положительного корня приведет к тому, что полного сокращения не получится. Этот случай в данной работе не рассматривается. Для приближенного управления (3) коэффициент k выбираем из условия $\tilde{a} - \tilde{b}k < 0$.

Утверждение 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что если $|\tilde{a} - a| \leq \delta$, то $|\mu| \leq \varepsilon$.*

Доказательство следует из цепочки отношений

$$|\mu| = |\tilde{a}_0 - a_0| = |\tilde{a} - e^{-r\tilde{a}}a_1 - (a - e^{-ar}a_1)| \leq \delta + e^{-r\tilde{a}}(e^{r\delta} - 1)|a_1|.$$

Покажем, что при достаточно малых μ функция $\tilde{f}(s)$ не потеряет устойчивость. Именно, ее корни не пересекут мнимую ось. С этой целью воспользуемся равенством

$$\tilde{f}(s) = f(s) + \mu \left(1 + k \frac{e^{-\tilde{a}h} - e^{-sh}}{s - \tilde{a}} b_1 \right) = f(s)(1 + \mu g(s)),$$

$$g(s) = \frac{s - \tilde{a}}{s - \tilde{a}_0 - a_1 e^{-sr}} (s - \tilde{a} + \tilde{b}k)^{-1} \left(1 + k \frac{e^{-\tilde{a}h} - e^{-sh}}{s - \tilde{a}} b_1 \right).$$

Утверждение 2. *Если существует $c = \text{const}$, такая что*

$$|g(i\omega)| \leq c,$$

то для $\mu \in (0, \frac{1}{c})$ и для любых $\omega \in \mathbb{R}$ следует $\tilde{f}(i\omega) \neq 0$.

Доказательство. От противного, предположим, что найдется ω_0 , такое что $\tilde{f}(i\omega_0) = 0$, т. е.

$$\tilde{f}(i\omega_0) = f(i\omega_0) [1 + \mu g(i\omega_0)] = 0.$$

Функция $f(i\omega_0) \neq 0$ по договоренности при описании возможных сокращений корней $f(s)$. Значит, $1 = -\mu g(i\omega_0)$. Откуда

$$1 = |\mu| |g(i\omega_0)| < \frac{1}{c} c = 1.$$

Получили противоречие.

Установим ограниченность $g(i\omega)$. Сначала рассмотрим случай, когда $\tilde{a} = 0$. Имеем

$$|g(i\omega)| = \left| \frac{i\omega}{i\omega - \tilde{a}_0 - a_1 e^{-i\omega r}} (i\omega + \tilde{b}k)^{-1} \left(1 + k \frac{1 - e^{-i\omega h}}{i\omega} b_1 \right) \right|.$$

С учетом $|e^{-i\omega h/2}| = 1$, получаем

$$|g(i\omega)| \leq \sup_{\omega \in [0, \infty)} \frac{1 + |kb_1|h}{\tilde{b}k \left| 1 - \left| \tilde{a}_0 \frac{1 - e^{-i\omega r}}{i\omega} \right| \right|} = c_1.$$

В случае, когда $\tilde{a} > 0$, получаем

$$|g(i\omega)| = \left| \frac{i\omega - \tilde{a}}{i\omega - \tilde{a}_0 - a_1 e^{-i\omega r}} (i\omega - \tilde{a} + \tilde{b}k)^{-1} \left(1 + k \frac{e^{-\tilde{a}h} - e^{-i\omega h}}{i\omega - \tilde{a}} b_1 \right) \right|.$$

Зная, что \tilde{a} является корнем уравнения $s - \tilde{a}_0 - a_1 e^{-sr} = 0$, выразим $\tilde{a}_0 = \tilde{a} - a_1 e^{-\tilde{a}r}$,

$$\left| \frac{i\omega - \tilde{a}}{i\omega - \tilde{a}_0 - a_1 e^{-i\omega r}} \right| = \left| \frac{1}{1 + a_1 \frac{e^{-\tilde{a}r} - e^{-i\omega r}}{i\omega - \tilde{a}}} \right|.$$

Тогда

$$|g(i\omega)| \leq \sup_{\omega \in [0, \infty)} \frac{1 + |kb_1| \frac{e^{-\tilde{a}h} + 1}{\tilde{a}}}{\tilde{b}k \left| 1 + a_1 \frac{e^{-\tilde{a}r} - e^{-i\omega r}}{i\omega - \tilde{a}} \right|} = c_2.$$

Оценим параметр μ , используя утверждения 1, 2:

$$|\tilde{a}_0 - a_0| \leq \delta + e^{-r\tilde{a}}(e^{r\delta} - 1)|a_1| \leq \begin{cases} \frac{1}{c_1}, & \text{при } \tilde{a} = 0, \\ \frac{1}{c_2}, & \text{при } \tilde{a} > 0. \end{cases} \quad (4)$$

4. Пример. Подберем квазиполином с коэффициентами в области D-разбиения, которой соответствует одно собственное число с вещественной частью в правой полуплоскости такого вида: $q(s) = s - 10 + le^{-s}$. Очевидно, при $l = 0$ этим собственным числом будет $s = 10$.

Линии $i\omega - 10 + le^{-i\omega} = 0$ задают разбиения комплексной плоскости, на них распо-

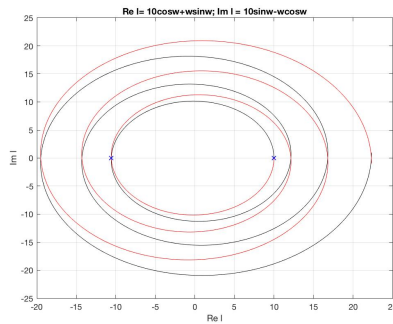


Рис. 1. График функции $l = (10 - i\omega)e^{i\omega}$

ложены чисто мнимые корни $q(s)$. Отсюда $l = (10 - i\omega)e^{i\omega}$. Ее график представлен на рис. 1. В условии коэффициенты вещественные, значит интересующая область находится в сегменте, выделенном точками на вещественной оси. Возьмем отсюда $l = 3$.

Численно находим корень уравнения $s - 10 + 3e^{-s} = 0$. Метод касательных для начального приближения $s_0 = 10$ из выбранного ранее отрезка $s \in [-10, 10]$ дает следующие приближения на первых двух шагах:

$$s_1 = s_0 - \frac{q(s_0)}{q'(s_0)} \approx 9,9998637816578,$$

$$s_2 = s_1 - \frac{q(s_1)}{q'(s_1)} \approx 9,99986378165654.$$

Допустим, $\tilde{a} = 10$. Тогда $\tilde{b} = 1 - 2e^{-20} \approx 1$. Выберем k так, чтобы $\tilde{a} - bk = 10 - (1 - 2e^{-20})k < 0$. Например, $k = 12$.

4.1. Робастный анализ. Рассмотрим систему (1), (3) с выбранными выше параметрами

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 10x(t) - 3x(t-1) + u(t) - 2u(t-2), \\ u(t) = -12x(t) + 36 \int_{t-1}^t e^{10(t-1-\theta)} x(\theta) d\theta + 24 \int_{t-2}^t e^{10(t-2-\eta)} u(\eta) d\eta. \end{cases}$$

Опираясь на утверждение 2, вычислим постоянную $c = c_2 \approx 0,13$. В нашем случае $\delta < 10^{-3}$. Выполняется неравенство $\delta + 3e^{-10}(e^{2\delta} - 1) < \frac{1}{c}$, значит приближенное управление будет стабилизировать систему.

Однако, графическое представление решения этой системы пошаговым методом со сколь угодно малой погрешностью с использовани-

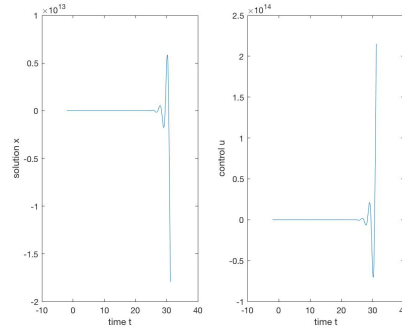


Рис. 2. Графики решения приближенной системы

ем квадратурных формул обнаруживает ее неустойчивость. На рис. 2 показано решение этой системы пошаговым методом в MATLAB с погрешностью $1/80$ для 2500 шагов с использованием квадратурной формулы левых прямоугольников.

4.2. Внутренняя устойчивость. В связи с возникающими сложностями вычисления интегралов в уравнении управления, вместо них используются конечные суммы. Но такая замена приводит к тому, что уравнение управления меняет тип с запаздывающего на нейтральный. В статье [3] доказано утверждение о потере устойчивости системы при замене конечными суммами в случае внутренней неустойчивости.

Внутренняя устойчивость системы (1), (3) — это экспоненциальная устойчивость уравнения

$$u(t) = -k \int_{t-h}^t e^{\tilde{a}(t-h-\eta)} b_1 u(\eta) d\eta.$$

Возвращаясь к примеру, проверим внутреннюю устойчивость уравнения

$$u(t) = 24 \int_{t-2}^t e^{10(t-2-\eta)} u(\eta) d\eta.$$

Его характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\varphi(s) = 1 - 24 \int_{-2}^0 e^{\eta(s-10)-20} d\eta = 1 - 24e^{-20} \frac{1 - e^{-2(s-10)}}{s - 10} = 0.$$

В круге $|s - (0,4316 + 3,3080i)| < 0,2$ по принципу аргумента у него нашлся корень с положительной вещественной частью. Значит оно внутренне неустойчиво. Это еще раз доказывает, что замена интегралов конечными суммами нарушит устойчивость замкнутой системы при достаточно малых разбиениях пределов интегрирования.

5. Анализ в случае интегрально-дифференциального управления. Перепишем систему (1), (2) с другим управлением, где λ — положительная константа:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_0x(t) + a_1x(t-r) + b_0u(t) + b_1u(t-h), \\ \frac{du(t)}{dt} + \lambda u(t) &= -k \left([a_0 + a_1e^{-ar} + \lambda]x(t) + [b_0 + b_1e^{-ah}]u(t) + \right. \\ &\left. + a_1(a + \lambda) \int_{t-r}^t e^{a(t-r-\theta)}x(\theta)d\theta + b_1(a + \lambda) \int_{t-h}^t e^{a(t-h-\eta)}u(\eta)d\eta \right). \end{aligned}$$

В работе [4] показано, что при замене в таком управлении интегралов конечными суммами поведение системы не изменится.

Нетрудно убедиться, что характеристическая функция новой замкнутой системы с точным значением параметра будет иметь вид

$$f(s) = \frac{s - a_0 - a_1e^{-sr}}{s - a}(s - a + bk)(s + \lambda).$$

А характеристическое уравнение замкнутой системы с приближенным значением параметра

$$(s + \lambda) \left[\frac{s - \tilde{a}_0 - a_1e^{-sr}}{s - \tilde{a}}(s - \tilde{a} + \tilde{b}k) + \mu \left(1 + kb_1 \frac{e^{-\tilde{a}h} - e^{-sh}}{s - \tilde{a}} \right) \right] = 0,$$

где $\mu = \tilde{a}_0 - a_0$. Очевидно, что оценка (4) остается в силе.

6. Заключение. Таким образом, получена оценка отклонения параметра \tilde{a} от его точного значения в случае интегрального и интегрально-дифференциального управления.

Литература

1. Fiagbedzi Y. A., Pearson A. E. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. AC-31. No 9. P. 847-855.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / пер. с англ. под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Мир, 1967. 548 с.
3. Gu K. A review of some subtleties of practical relevance for time delay systems of neutral type // ISRN Applied Mathematics. 2012. Article ID 725783. P. 46.
4. Харитонов В. Л. Управления на основе предиктора: задача реализации // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 53-65.